Digitized by Google

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung,

angefangen

von

Georg Simon Klügel,

ehemals Professor der Mathematik und Physik zu Halle, ꝛc.

fortgesetzt

von

Carl Brandan Mollweide,

Professor der Mathematik zu Leipzig.

Erste Abtheilung.

Die reine Mathematik.

Vierter Theil

von Q bis S.

Mit sieben Kupfertafeln.

Leipzig, 1823.

Bey E. B. Schwickert.

Vorrede.

Es wird nicht nöthig seyn, den Lesern mit Aufzählung der Hindernisse, welche das Erscheinen der mir aufgetragenen Fortsetzung und Beendigung des Klügelschen mathematischen Wörterbuchs so lange verzögert haben, beschwerlich zu fallen. Dem vornehmsten derselben, Mangel an litterarischen Hülfsmitteln, ist ziemlich abgeholfen worden, und es ist die Aussicht vorhanden, daß solches noch mehr geschehen wird. Ich werde künftighin nicht bloß von dieser, sondern auch von anderen Seiten ungehinderter fortarbeiten können, um den Lesern den fünften und letzten Theil der ersten, die reine Mathematik umfassenden, Abtheilung dieses Werkes sobald als möglich in die Hände zu bringen, und hoffe solches schon zu Michaelis nächsten Jahres leisten zu können.

Die Reichhaltigkeit mancher der noch rückständigen, mitunter nicht zu leichten, Artikel machte nämlich eine Trennung und Absonderung in zwey Theile nothwendig, obgleich das Werk ursprünglich nur auf vier Theile angelegt und berechnet war. Die Leser sollen, wie ich hoffe, bey der getroffenen Einrichtung nicht verloren haben, indem auf diese Weise die Entwickelung und Darstellung wichtiger Gegenstände mit der nöthigen Ausführlichkeit und Deutlichkeit geschehen kann.

Bey dem großen Zuwachse, den die Mathematik, insbesondere die Analysis, vorzüglich im Auslande, fast täglich erhält, ist auch schon Stoff genug zu Ergänzungen, sowohl der vorigen Theile, als des gegenwärtigen Theils dieses Wörterbuchs vorhanden, zu geschweigen, daß manches schon früher vorhandene aus leicht begreiflichen Ursachen übersehen worden ist. Ich bin, wenn es von mir gewünscht wird, und Leben und Gesundheit es verstatten, nicht abgeneigt, in der Folge auch einen Supplementband dieses Werks, welcher Nachträge und Ergänzungen enthält, zu liefern.

Ich habe nur noch mit wenigen Worten den Antheil anzuzeigen, den ich an der Ausarbeitung des vorliegenden Theils des mathematischen Wörterbuchs habe.

Die Artikel: Magisches Quadrat, und alle des Buchstabens S., von dem: Stereographische Projection an, bis auf die Artikel: Subtraction, Summe und Synthesis, worüber der verewigte Klügel einiges aufgesetzt hatte, was ich ergänzt habe, rühren ganz von mir her. Die andern Artikel sind größtentheils noch Klügels Arbeit, welche aber einer Revision, und mitunter sehr der Ergänzung bedurften. Die Artikel: Quadratwurzel, Quadratur, Rectification und Sphäroid, haben beträchtliche Zusätze durch mich erhalten. Der vorletzte unter den genannten Artikeln war schon abgedruckt, als ich erst Kenntniß von der vortrefflichen Methode des Herrn Hofrath Gauß zur Rectification der ganzen Ellipse sowohl, als einzelner elliptischen Bogen, welche aus dessen Abhandlung: Determinatio attractionis, etc. §. 16—18. sich ergiebt, erhielt. Ich würde sie sonst statt der Legendreschen, weil sie vorzüglicher ist, aufge-

nommen haben. Ob der kleine Zusatz, welchen ich in dem Art. Quadratur, 145, bey der von diesem großen Geometer angegebenen Methode der mechanischen Quadraturen angebracht habe, so bedeutend ist, daß es sich der Mühe verlohnt, ihn auf die Fälle von mehr als drey Ordinaten auszudehnen, muß ich dem Urtheile der Sachverständigen überlassen.

Die Weitläufigkeit des Artikels: Summirung der Reihen, wird man nach Durchlesung desselben vermuthlich nicht tadeln, zumal, wenn man erwägt, wie wichtig dieser Gegenstand ist, und daß man selbst in dem großen, hierher einschlagenden Werke von Lacroix nicht alles denselben betreffende bekannte in einer schicklichen Ordnung beysammen findet.

Hiermit empfehle ich diese Arbeit der gütigen und nachsichtsvollen Aufnahme der geneigten Leser, mich selbst aber der Gewogenheit derselben.

Geschrieben an der Leipziger
Jubilate-Messe, 1823.

Mathematisches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literarischen Nachrichten in alphabetischer Ordnung.

Erste Abtheilung.

Arithmetik, Analysis und Geometrie, die niedere und die höhere.

Q.

Quadrangulum, Viereckige Figur, s. Viereck.

Quadrant ist der vierte Theil des Umfanges eines Kreises; auch ein Sector, welcher der vierte Theil der Kreisfläche ist. Es gehört dazu ein rechter Winkel am Mittelpuncte.

Quadrant heißt auch ein Instrument zur Messung der Winkel in der Astronomie und praktischen Geometrie. Es wird auf verschiedene Arten eingerichtet.

Von der Eintheilung des Quadranten s. die Artikel, Grad und Maß, Th. III. S. 601.

Quadrantal-Dreyeck, sphärisches, ist ein solches, worin eine der Seiten ein Quadrant ist.

Quadrat ist eine ebene geradlinichte Figur mit vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln. — Wie ein Quadrat über einer gegebenen Linie gezeichnet wird, zeigt Euklides, B. I. S. 46.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches so groß ist als zwey gegebene zusammengenommen, folgt aus dem pythagorischem Lehrsatze.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Unterschied zweyer gegebenen Quadrate sey, beschreibe man über des größern Seite, a, einen Halbkreis, trage in denselben von dem einen Endpuncte die Seite b des zweyten Quadrats als Chorde, und ziehe dann die Chorde, c, des Complements zum Halbkreise, so ist diese die Seite des verlangten Quadrats. — Denn die beiden Chorden machen mit einander einen rechten Winkel (Kreis, 20.); daher ist $bb + cc = aa$, das ist $cc = aa - bb$.

Die **Diagonale** eines **Quadrats** ist mit der Seite der Länge nach incommensurabel, d. i. verhält sich zu derselben nicht, wie eine ganze Zahl zu einer ganzen. — Dieses beweiset Euklides, erst am Ende seiner arithmetischen Elemente, auf zweyerley Weise, durch den Widerspruch, worauf die Annahme der Rationalität des Verhältnisses führt.

Allgemein ist der Satz: das Verhältniß der Katheten eines rechtwinklichten Dreyecks sey $= 1 : p$, und p eine ganze Zahl, so ist das Verhältniß der Hypotenuse zu jeder der Katheten ein irrationales. — Gesetzt, das Verhältniß der kleinern Kathete zu der Hypotenuse könne je ein rationales, $m : m + n$, seyn, so ist $1 : 1 + p^2 = m^2 : (m + n)^2$, daher $1 : p^2 = m^2 : 2mn + n^2$, und $m^2 p^2 = (2m + n) n$. Ist das Verhältniß, $m : m + n$, in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt, so haben auch m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler. Nun müßte das Product $(2m + n) n$ durch m theilbar seyn, wie es das gleiche $m^2 p^2$ ist. Da aber der eine Factor n weder durch m selbst, noch durch einen Factor von m theilbar ist, so müßte der andere Factor, $2m + n$, durch m theilbar seyn. Die Division giebt den Quotienten, $2 + \frac{n}{m}$, welcher keine ganze Zahl ist. Das Verhältniß der kleinern Kathete zu der Hypotenuse ist also ein irrationales, daher ist auch das Verhältniß der größern Kathete, welche ein Vielfaches der kleinern ist, zu der Hypotenuse ein irrationales.

Quadratgrad ist eine Meß-Einheit, die auf verschiedene Art bestimmt werden mag.

Erstlich für ebene Flächen ist sie ein Quadrat, zu dessen Seite die Länge des Bogens von einem Grade auf dem Umfange eines gegebenen Kreises genommen wird, auf ähnliche Art, wie Quadratfuß, Quadratzoll die Quadrate über einem Fuß, einem Zoll, bedeuten. Der Halbmesser des Kreises sey $= a$, so ist der halbe Umfang $= \pi a$ (Cyklometrie, Th. I. S. 642.). Also ist $\frac{\pi a}{180} = 1$ Kreis-Grad, und $\frac{\pi^2 a^2}{180.180} = 1$ Quadratgrad. Die Kreisfläche, durch den Halbmesser a ausgedrückt, ist $= \pi aa$. Sie hält also $10313\frac{1}{4}$ Quadratgrade nächstens.

Von dieser Meß-Einheit wird man schwerlich Gebrauch zu machen finden, da man nicht leicht geradlinichte Längen durch Kreisbogen messen wird. Wenn eine Kreisfläche zur Meß-Einheit dient, so könnte der Quadratgrad für den Bruchtheil zur Einheit genommen werden.

Zweytens: Theile einer Kugelfläche lassen sich bequem durch ein gleichseitiges und gleichwinkliges sphärisches Viereck angeben, auf ähnliche Art wie ebene Flächen durch das Quadrat einer bestimmten geraden Linie. Nimmt man zu den Seiten des sphärischen Vierecks einen Bogen von Einem Grad, so wird ein solches schicklicher ein Quadratgrad genannt werden, als vorher das ebene Viereck. Die Winkel desselben sind $90^\circ\ 0'\ 15,''17$ nächstens. (Trigonometrie, sphärische). Es verhält sich zu der Kugelfläche, wie der Überschuß seiner Winkel über vier Rechte zu acht Rechten, nahe wie 62,84 Sec. zu 720 Grad, das ist, wie zu 41248.

Drittens: Eigentlicher wird auf der Kugelfläche ein kreisförmiger Raum, dessen Durchmesser dem Bogen nach $= 1$ Grad ist, ein Quadratgrad heißen.

Der Halbmesser der Kugel sey = a, so ist dieser Flächenraum = 2π aa (1 cos 30′) = 4π aa (sin 15′)^2, Complanation Th. I. S. 515. Da die ganze Kugelfläche = 4π aa ist, so verhält sich dieser Quadratgrad zu der Kugelfläche, wie (sin 15′)^2 : 1, das ist, wie 1 : 52525.

Der vierseitige Quadratgrad und der kreisförmige verhalten sich wie 52525 : 41248, oder wie 4 : 3,141165. Das Verhältniß eines ebenen Quadrats zu dem eingeschriebenen Kreise ist 4 : π = 4 : 3,141592.

Das ebene Quadrat und das sphärische, deren Seiten die Länge eines Grades von dem Umfange eines gegebenen Kreises haben, verhalten sich wie 5 π : 15,71 nächstens, d. i. wie 15,70796 : 15,71 oder wie 1 : 1,00013 = 0,99987 : 1.

Der ebene Kreis und der sphärische, deren Durchmesser die Länge eines Grades von dem Umfange eines gegebenen Kreises haben, verhalten sich wie π^2 : 720^2(sin 15′)^2, d. i. wie π^2 : (3,141582 . . .)^2. — Die sphärische Kreisfläche ist kleiner als die ebene, weil der Umfang kleiner ist; hingegen ist das sphärische Quadrat größer als das ebene, weil der Umfang derselbe ist wie in diesem.

Zum Beyspiele dieser Art logarithmisch-trigonometrischer Rechnungen diene folgendes, wobey der Artikel, Logarithmus, §. 88, nachzusehen seyn mag.

log. sin 15′	=	7,6398160 — 10
2 log. sin 15′	=	5,2796320 — 10
Complement	=	4,7203680
Zahl	=	52525,2.

Man sehe auch Kästners geometrische Abhandlungen, zweyte Sammlung, S. 205 — 213 und S. 487 — 493. Das in diesem Artikel vorgetragene ist daraus nicht genommen.

Quadratmaßstab ist eine eingetheilte gerade Linie, worauf die Theilungszahlen die Verhältnisse der Quadrate von den zugehörigen Längen angeben. Er wird folgendergestalt gezeichnet.

Man setzt zwey gerade Linien, AB, AC, (Fig. 1.) rechtwinklicht zusammen, nimmt auf AB die Länge AD so groß als die Einheit für die Längen seyn soll, wodurch das Quadrat von AD die Einheit für die Flächen wird. Auf AC nehme man A1 = AD, und ziehe D1; dann nehme man A2 = D1 und ziehe D2; darauf nehme man A3 = D2 und ziehe D3. So fahre man fort, so weit als der Maßstab reichen soll. Den Grund der Eintheilung giebt der pythagorische Lehrsatz.

Der Maßstab wird zur Vergleichung des Flächen-Inhalts ähnlicher Figuren, besonders der Kreisflächen, beym Visiren oder Ausmessen der Fässer, gebraucht.

Man kann die Längen auch von einem gleichtheiligen Maßstabe auftragen. Nur muß man die Quadratwurzeln aus den ganzen Zahlen, von 2 bis zu der letzten Zahl auf dem Maaßstabe haben. Es ist, wenn AD = 1000 genommen wird,

A 1 =	1000	A 7 =	2646 —
A 2 =	1414 +	A 8 =	2828 +
A 3 =	1732 +	A 9 =	3000 .
A 4 =	2000	A 10 =	3162 +
A 5 =	2236 +	A 11 =	3317 —
A 6 =	2449 +	A 12 =	3464 +

In Schulze's Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln, findet sich im 2ten Bande auf S. 288 — 295 eine Tafel der Quadrat- und Cubikwurzeln aus den ersten 1000 ganzen Zahlen bis auf die siebente Decimalstelle von Röhl berechnet. Bis zur sechsten Decimalstelle giebt eben dieselben Böbert in seinen Tafeln der Quadrat- und Cubikzahlen S. 141 — 150. Auch Vega hat in seine logarithmischen und trigonometrischen Tafeln B. II. S. 162 die Quadrat- und Cubikwurzeln der Zahlen von 1 bis 100 aufgenommen. Hiervon kann die Tafel der Quadratwurzeln zur Anfertigung des Quadratmaßstabes benutzt werden.

Die Tafel der Cubikwurzeln dient auf gleiche Weise zur Verfertigung eines Maßstabes für ähnliche

Körper. Der Durchmesser einer Kugel z. B. sey in 1000 Theile getheilt, so hält der Durchmesser einer doppelt so großen 1260 —; einer dreymahl so großen 1442 +; einer viermal so großen 1587 +; . . . der Durchmesser einer achtmahl so großen 2000 Theile.

Quadratwurzel und **Quadratzahl** sind relative Begriffe. Jene ist einer der beiden gleichen Factoren (rationalen oder irrationalen), worin sich eine gegebene Zahl auflösen läßt; eine Quadratzahl ist eine Zahl, so fern sie als ein Product aus zwey gleichen Factoren, den Wurzeln, gedacht wird. In Beziehung auf diese heißt sie das Quadrat der Wurzelzahl.

1. Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, verfährt man umgekehrt, wie bey der Synthesis oder der Zusammensetzung des Quadrats aus den Theilen der Wurzel.

2. Eine Zahl werde erstlich allgemein aus irgend welchen Theilen zusammengesetzt, nämlich

$$N = a + b + c + d + e + f + \ldots,$$

so besteht ihr Quadrat aus den Quadraten jedes Theils und den doppelten Producten jedes der Theile in jeden andern. Denn da das Quadrat ein Product aus zwey gleichen Factoren ist, so wird jeder Theil von N in jeden Theil von N multiplicirt. Sind die zu dem Partialproducte genommenen Factoren dieselben so ist ihr Product nur einmahl vorhanden, wie aa, bb, cc, u. s. f. Sind die Factoren verschieden, wie a, b, so entstehen daraus zwey gleiche Producte, ab, ba. Die Form des Quadrats einer mehrtheiligen Zahl N ist also

$$N^2 = \int aa + 2\int ab,$$

wo das vorgesetzte Zeichen $\int$ die Summe aller ähnlichen Verbindungen bedeutet. S. Polynomischer Lehrsatz, § 5. Enthält die Zahl N subtractive Theile, so werden die Producte aus zwey Theilen mit entgegengesetzten Vorzeichen subtractiv. Th. I. S. 375. Th. II. S. 109.

3. Die Theile einer Zahl können zweytens auch

nach den Potenzen einer beliebigen Größe z geordnet werden,

$$N = az^m + bz^{m-1} + cz^{m-2} + dz^{m-3} + ez^{m-4} + \text{etc.}$$

wie es mit unsern Zahlen geschieht, wenn $z = 10$ genommen wird. Die Reihe geht da in die Decimalbrüche über, wenn der Exponent von z negativ wird.

Es ist nun

$$\begin{aligned} N^2 = aaz^{2m} & \\ + 2abz^{2m-1} & \\ + (2ac + bb)\,z^{2m-2} & \\ + (2ad + 2bc)\,z^{2m-3} & \\ + (2ae + 2bd + cc)\,z^{2m-4} & \\ + (2af + 2be + 2cd)\,z^{2m-5} & \\ + \text{etc.} & \end{aligned}$$

4. Exempel. Es sey $N = 478{,}35$, so ist $m = 2$; $a = 4$; $b = 7$ u. s. f. und das Quadrat von 478,35 ist:

16....	
56...	
49..	
752	
64	
286	8...
	9..
4	783.
	25
228775	,6755

Der Strich scheidet die Einer von den Decimaltheilen.

5. Um aus einer gegebenen Zahl, wie hier, 228775,6755, die Quadratwurzel zu ziehen, nimmt man die Theile nach einander weg, wie sie hier zusammengesetzt sind. Die Quadrate fangen mit der niedrigsten Ziffer in einer ungeraden Stelle an, von der Stelle der Einer an gerechnet, die doppelten Producte in einer geraden Stelle. Da in jedem Lehrbuche der Arithmetik darüber Unterricht ertheilt wird, so ist es nicht nöthig, diesen hier zu wiederholen.

6. Um eine irrationale Wurzel auf viele Stellen zu finden, muß man den binomischen Lehrsatz anwenden. Die gegebene Zahl N zerlege man in zwey Theile von der Form, $a^2 + b$ oder $a^2 - b$, wo man a so nahe an die Wurzel zu nehmen hat, als es vorläufig bequem angeht. Dazu sind die Tafeln der Quadrate ganzer Zahlen behülflich. Es ist (Binomischer Lehrsatz, 10 u. 13.)

$$(a^2 + b)^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a^2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{b^2}{a^4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{b^3}{a^6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{b^4}{a^8} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{b^5}{a^{10}} - \frac{1 \cdot 1 \cdot \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot \cdot 12} \frac{b^6}{a^{12}} + \text{etc.}\right]$$

Kann man den Bruch $\frac{b}{a^2}$ nicht klein genug machen, so setze man zu der aufgegebenen Zahl ein solches Quadrat als Factor hinzu, wodurch jener Bruch klein genug werde, und dividire hernach die gefundene Wurzel durch die Wurzel aus dem angewandten Multiplicator. Man mag auch b subtractiv nehmen, wenn dadurch a der Wurzel näher gebracht wird. Die Glieder der Reihe nach 1 sind dann alle subtractiv.

7. Nach der Formel, das. 17. ist

$$(a^2 + b)^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{(a^2 + b)} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{b^2}{(a^2 + b)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{b^3}{(a^2 + b)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{b^4}{(a^2 + b)^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{b^5}{(a^2 + b)^5} \text{ etc.}\right]$$

Diese Reihe mag vorzüglich brauchbar seyn, wenn der Theil b gegen den a^2 sich nicht klein genug nehmen läßt.

8. Stirling hat in seiner Erläuterung von Newtons Methodus differentialis eine, wie es scheint, we-

nig beachtetete und daher fast unbekannte, Form des binomischen Lehrsatzes angegeben. Aus dieser folgt:

$$(a^2 + b)^{\frac{1}{2}} = a \Big[1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4a^2 + 3b}{a^2 + b} \cdot \frac{b}{a^2}$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{8a^2 + 5b}{(a^2 + b)^2} \cdot \frac{b^3}{a^4}$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{12a^2 + 7b}{(a^2 + b)^3} \cdot \frac{b^5}{a^6}$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \ldots 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \ldots 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} \cdot \frac{16a^2 + 9b}{(a^2 + b)^4} \cdot \frac{b^7}{a^8}$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \ldots 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \ldots 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20} \cdot \frac{20a^2 + 11b}{(a^2 + b)^5} \cdot \frac{b^9}{a^{10}} - \text{etc.} \Big]$$

welche Reihe unter denselben Umständen eine weit schnellere Convergenz gewährt, als jede der beiden vorigen.

9. Exempel. Aus der Zahl 12 die Quadratwurzel zu ziehen. Sie wird zur Berechnung des Umfanges eines Kreises aus dem Halbmesser gebraucht. Cyklotechnie, Th. I. S. 660. — Man multiplicire sie durch 4, und suche die Wurzel aus $48 = 49 - 1$, wo $a = 7$ $b = -1$ ist. Die Rechnung giebt

$\sqrt{(49 - 1)} = 7$ [1 — 0,010204 081632 653 . .
— 0, ... 52 061640 983 . .
— 0, ... 531241 234 . .
— 0, ... 6776 036 . .
— 0, ... 96 801 . .
— 0, ... 1 481 . .
— 0, ... 24 . .
— etc.]

Daraus wird

$\sqrt{48} = 6{,}928\ 203\ 230\ 275\ 516 \ldots$

$\sqrt{12} = 3{,}464\ 101\ 615\ 137\ 758 \ldots$

Die letzte Ziffer ist fehlerhaft, wegen der abgebrochenen Rechnung. In Sherwin's mathematical tables, wo $\sqrt{12}$ bis zur 72sten Decimalstelle angegeben ist, ist die 15te Ziffer 4.

10. Mit eben den berechneten Zahlen hat man auch die Quadratwurzel aus 50, da $50 = 49 + 1$. Die Glieder der Reihe nach der Einheit sind wechselnd additiv und subtractiv, wie in der Formel selbst. Es ist

$$\sqrt{50} = 7{,}071067\ 811865\ 484.$$

11. Nach der zweyten Formel (7.) ist

$$\sqrt{(49+1)} = 7\ [1 + 0{,}01 \\ + 0{,}\ldots 15 \\ + 0{,}\ldots\ldots 25 \\ + 0{,}\ldots\ldots\ldots 4375 \\ + 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots 7875 \\ + 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 14437 \\ + 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 268.. \\ + \text{etc.}]$$

Das ist,

$$\sqrt{50} = 7{,}071067\ 811865\ 435\ ..$$

Diese zweyte Rechnung müßte noch einen oder zwey Schritte mehr thun, um mit der ersten ganz überein zu stimmen. Beide sind in den letzten Ziffern mangelhaft.

12. Die Formel in (8) giebt

$$\sqrt{(49-1)} = 7\ [1{,}\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \\ - 0{,}\ 010\ 257\ 227\ 891\ 156 \\ + 0{,}\ \ldots\ \ldots\ 546\ 545\ 547 \\ - 0{,}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ .43\ 608 \\ + 0{,}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ ..4]$$

wodurch

$$\sqrt{48} = 6{,}\ 928\ 203\ 230\ 275\ 509$$

und $\sqrt{12} = 3{,}\ 464\ 101\ 615\ 137\ 754$

wird. Man sieht, daß hier nur durch fast halb so viel Glieder, als in (9) doch eine eben so große, oder vielmehr größere, Genauigkeit erhalten ist, als dort.

13. Die Wurzel aus 2 wird durch die Wurzel aus 50, die aus 3 durch die Wurzel aus 48 gleich gefunden, da $50 = 2 \cdot 25$, und $48 = 3 \cdot 16$ ist. Die Wurzel aus 5 zu erhalten, suche man die $\sqrt{5 \cdot 16} = \sqrt{80} = \sqrt{(81-1)}$. Ferner ist $\sqrt{7 \cdot 9} = \sqrt{63} = \sqrt{(64-1)}$; $\sqrt{11 \cdot 9} = \sqrt{(100-1)}$

$\sqrt{13 \cdot 25} = \sqrt{(324 + 1)}$; $\sqrt{17 \cdot 64} = \sqrt{(1089 - 1)}$; $\sqrt{19 \cdot 196} = \sqrt{(3721 + 3)}$; u. s. f.

14. Eine abgekürzte, in allgemeinen Rechnungen brauchba·e, Formel ist

$$\sqrt{(a^2 + b)} = a\left(1 + \frac{2b}{4a^2 + b} + \frac{b^3}{32a^6}\right).$$

Exempel. Es ist $48 = 49 - 1$, also nach dieser Formel,

$$\sqrt{48} = 7\left(1 - \frac{2}{195} - \frac{1}{3764768}\right).$$

15. Das folgende Täfelchen zeigt die Reste, welche das Quadrat einer ganzen Zahl bey der Division durch 9 oder durch 11 läßt, zufolge des Restes, welchen die Wurzel giebt.

Reste der Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste der Quadrate.	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1
	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Das Verzeichniß ist behülflich, die in den Tafeln der Quadratzahlen angegebenen zu prüfen. Ein Fehler in einer einzelnen Ziffer wird durch jede der Proben immer entdeckt. S. Rechnungsprobe.

16. Die griechischen Mathematiker haben sich früh mit der Aufgabe beschäftigt, rechtwinklige Dreyecke anzugeben, deren Seiten sich wie ganze Zahlen verhalten. Eine Regel, dergleichen zu finden, wird dem Pythagoras, eine andere dem Plato zugeschrieben. Proklus führt sie in seinem Commentar über das erste Buch des Euklides, zum 47. S. an. Eine allgemeinere, jene beiden unter sich enthaltende Regel hat Euklides in dem ersten Lehnsatze zum 30. S. des 10. Buchs seiner Elemente gegeben. Diophantus zeigt in seinen Arithmeticis, L. II. Qu. 8. und 9. wie eine gegebene Quadratzahl in zwey Quadrate von rationalen, wenn auch gebrochenen, Wurzeln zerlegt wird, zwar nur an einem einzelnen Falle, aber doch auf eine

Art, die sich dem Verfahren in der neuen Analysis nähert. Die Frage gehört in die unbestimmte Analytik, mag aber auch ganz schicklich hier ihre Auflösung erhalten.

17. Die Aufgabe, analytisch ausgedrückt, ist, für die unbestimmte Gleichung.

$$xx + yy = zz,$$

die Formen der drey veränderlichen Größen anzugeben, wodurch, für jeden rationalen Werth der einen, die Werthe der beiden andern auch rational werden. Davon ist die Auflösung in ganzen Zahlen ein besonderer Fall.

I. Es sind, für ein gegebenes z, die Formen der rationalen Werthe von x und y zu finden. — Mit der Gleichung, $xx + yy = zz$, verbinde man eine vom ersten Grade, $mx + y = z$, in welcher der Werth von m kleiner als die Einheit ist. Diese quadrirt ist $m^2xx + 2mxy + yy = zz$. Aus beiden Gleichungen folgt die neue, $(1 - m^2)\,x = 2my$. Diese und die angenommene Gleichung geben:

$$x = \frac{2m}{1 + m^2}\,z; \quad y = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}\,z.$$

Die angenommene Gleichung vom ersten Grade kann auch seyn, $mx - y = z$, wo m größer als die Einheit ist. Derselbe Gang der Rechnung liefert:

$$x = \frac{2m}{m^2 + 1}\,z; \quad y = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}\,z.$$

Diese Werthe entstehen aus jenen, wenn m mit $\frac{1}{m}$ vertauscht und die gehörige Reduction vorgenommen wird.

Damit für ein ganzes z ganze Werthe von x und y Statt haben: muß entweder z oder 2z selbst oder aber ein Factor von z oder 2z die Form $m^2 + 1$ haben, da dann für m der gehörige Werth genommen wird. Z. B. Es sey $z = 15 = 3 \cdot 5$. hier ist $5 = 4 + 1$, also $m = 2$, und

$$x = \frac{2 \cdot 2}{4 + 1} \cdot 15 = 12; \quad y = \frac{4 - 1}{4 + 1} \cdot 15 = 9.$$

Es sey $z = 39 = 3 \cdot 13$, und $2z = 3 \cdot 26$, wo 26 die Form $m^2 + 1$ hat. Diese giebt $m = 5$.

Dadurch wird erhalten:

$$x = \frac{2 \cdot 5}{25 + 1} \cdot 39 = 15; \quad y = \frac{24}{26} \cdot 39 = 36.$$

II. Für eine gegebene Kathete x werden die Formen der rationalen Werthe der andern Kathete y und der Hypotenuse z unmittelbar aus den in I. für x und y gefundenen Formen hergeleitet. Es ist

$$y = \frac{m^2 - 1}{2m} x; \quad z = \frac{m^2 + 1}{2m} x.$$

Für jeden ganzen Werth von x lassen sich die Werthe von y u. z immer in ganzen Zahlen angeben. Ist x ungerade, so nehme man $m = x$; ist x gerade, so ist $m = \frac{1}{2} x$ oder $2m = x$ zu nehmen.

In dem ersten Falle ist

$$y = \tfrac{1}{2} (xx - 1); \quad z = \tfrac{1}{2} (xx + 1).$$

In dem zweyten ist

$$y = \tfrac{1}{4} (xx - 4); \quad z = {}^{1} (xx + 4).$$

Zum Exempel

x	7	8	9	10	11	12	13	14
y	24	15	40	24	60	35	84	48
z	25	17	41	26	61	37	85	50

Die Erfindung der Regel für ein ungerades x wird dem Pythagoras zugeschrieben; die für ein gerades x dem Plato.

Quadrat, magisches, ist ein in gleiche Fächer abgetheiltes Quadrat, worein die Glieder einer beliebigen arithmetischen Progressiion so eingetragen sind, daß ihre Summen, in jedem mit den Seiten parallelen Streifen und längs jeder Diagonale, gleich groß werden.

Zum Beyspiel

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Die Zahl der Fächer an einer Seite heißt die Seitenzahl oder Wurzel des Quadrats, und man unterscheidet hiernach magische Quadrate gerader und ungerader Seitenzahlen, die man auch wohl kurz gerade und ungerade Quadrate nennt.

1. Die magischen Quadrate sind, außer dem etwa in der Steganographie möglichen Gebrauche, von keinem weitern Nutzen, als es jedes sinnreiche und schwierige Räthsel ist Sie dienen zur Uebung des arithmetischen Geistes, und nur das Vergnügen der Auflösung kann sie interessant machen, je weniger man bey der ersten Betrachtung gleich einsieht, wie man, auch bey einer mäßigen Menge Zahlen, die verlangte Anordnung werde treffen können. Sie haben vermuthlich ihren Ursprung in Indien; denn La Loubere hat ihre Kenntniß in Ostindien, besonders in Surate, sehr verbreitet gefunden. Von den Indiern mögen sie zugleich mit den Zahlzeichen zu den Arabern, und von diesen zu den Griechen und Occidentalen gekommen seyn. Ihre Benennung haben sie ohne Zweifel von dem Gebrauche, den man ehemahls von diesen künstlichen Anordnungen einer Zahlenreihe als Talismanen machte. In dieser Hinsicht waren die ersten sieben magischen Quadrate, zu den Seitenzahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, deren Fächer mit der natürlichen Progression besetzt sind, besonders wichtig. Sie hießen Planetensiegel, das von 3 insbesondere Sigillum Saturni, und so die übrigen, nach der Folge der Planeten im Ptolemäischen System von oben herunter Sigilla Jovis, Martis, Solis, Veneris, Mercurii, Lunae. Von diesem Gebrau-

che oder vielmehr Mißbrauche der magischen Quadrate handelt Kircher in seiner Arithmologia ausführlich. Schon in Indien, dem Lande ihrer Entstehung, scheinen sie auf ähnliche Weise angewandt worden zu seyn.

2. Emanuel Moschopulos, der um 1400 lebte, ist, so viel man weiß, der erste, welcher über die magischen Quadrate geschrieben hat. Sein Aufsatz darüber ist im Manuscripte auf der königlichen Bibliothek in Paris vorhanden. Unter den Abendländern wird Agrippa von Nettesheim (+ 1535) der erste seyn, der der magischen Quadrate erwähnt in seinen Büchern de occulta philosophia. Von ihm lernte Bachet de Meziriac sie kennen, und versuchte die Regel ihrer Zusammensetzung zu entdecken, welches ihm auch bey den ungeraden Quadraten glückte, für welche er eine allgemeine Methode in seinen Problemes plaisants, 1613, bekannt machte, aber mit den geraden Quadraten kam er nicht zu Stande. Nach Bachet beschäftigte sich Arnaud mit den magischen Quadraten, und gab in den zuerst 1667 zu Paris ohne seinen Namen erschienenen Nouveaux Elemens de Géometrie eine Anweisung, sowohl ungerade als gerade magische Quadrate nach einer gleichförmigen Methode, nämlich durch Ansetzung von Einfassungen (enceintes) an dergleichen Quadrate von 9 und 16 Fächern zu bilden.

Frenicle, der durch seine Geschicklichkeit, mit den verworrensten Fragen der Arithmetik fertig zu werden, ausgezeichnet ist, ging viel weiter als Bachet und Arnaud. Er lehrte nicht allein die nach der Methode des ersteren verfertigten magischen Quadrate ungerader Seitenzahlen auf mancherley Weise verändern, sondern zeigte auch insbesondere gegen Arnaud, welcher die Zahl der Veränderungen des magischen Quadrats von 4 auf 16 gesetzt hatte, daß solches 880 mahl verändert werden könne. Die durch Einfassungen gebildeten magischen Quadrate wies er auf eine viel allgemeinere Art als Arnaud zu verfertigen und zu verändern an. Und da die nach Arnauds Ver-

fahren construirten magischen Quadrate die Eigenschaft haben, daß man die Einfassungen von außen nach innen zu, ohne die magische Anordnung zu verletzen, nach und nach wegnehmen kann, so schränkte Frenicle, dem die Aufgabe unter dieser Gestalt noch nicht schwer genug war, die weg zu nehmenden Einfassungen auf eine oder mehrere bestimmte ein. Ja er kehrte die Bedingung sogar um: gewisse Einfassungen sollten von dem magischen Quadrate unzertrennlich seyn, das heißt, das magische Quadrat sollte aufhören, ein solches zu seyn, wenn jene Einfassungen weggenommen würden, es aber bleiben, wenn dies mit andern geschähe. Seine Abhandlung über die magischen Quadrate ist den Liebhabern dieser Künsteleyen von de la Hire mitgetheilt worden, und befindet sich in den Divers ouvrages de Mathematique et de Physique par Msrs de l'Ac. Roy. des Sc. Par. 1693, auch im zweyten Bande der ältern Abhandlungen der Pariser Akademie.

Poignard, Canonicus zu Brüssel, gab im J. 1703 eine Schrift über die magischen Quadrate heraus, die er, der dabey angebrachten neuen Kunststücke wegen, sublimes nennt. Dadurch ward de la Hire veranlaßt, zwey ausführliche Abhandlungen über diesen geometrisch-arithmetischen Gegenstand zu verfassen, welche in den Schriften der Akademie vom Jahre 1705 befindlich sind. In dem Jahrgange derselben von 1710 ist ein Aufsatz von Sauveur enthalten, welcher die Vereinfachung und Verallgemeinerung der bis dahin bekannten Methoden zur Anfertigung der magischen Quadrate und die Vermehrung derselben mit neuen zum Zweck hat. Der Aufsatz ist aber sehr unordentlich abgefaßt, und zum Theil nur Entwurf. Ein neues Verfahren für die Quadrate gerader Seitenzahlen wird in einer Abhandlung von Ons-en-Bray, welche in den Mém. vom J. 1750 steht, gelehrt. Die doppelt-geraden Quadrate werden nämlich aus mehreren magischen Partialquadraten, deren jedes 16 Fächer hat, zusammengesetzt; die einfach geraden aber aus einem Quadrate der vorigen Gattung, woran

an eine Einfassung magischer Art gesetzt wird. Noch ein Aufsatz über die Construction der magischen Quadrate überhaupt von Rallier des Ourmes ist in den vierten Band der Mém. presentés aufgenommen und mit vieler Klarheit und Präcision geschrieben.

Den deutschen Rechenmeistern und Cossisten sind die magischen Quadrate nicht unbekannt geblieben. Stiefel handelt davon in seiner Arithmetica integra Lib. I. cap. 3. jedoch nicht unter der Benennung magischer Quadrate. Seine Methode ist die der Einfassungen um ein Mittelquadrat von Einem Fache oder von sechszehn Fächern. Er hat solche also früher als Arnaud und Frenicle angewandt; auch ist sein Verfahren einfacher und netter. Adam Riese lehrt in seinem 1550 in 4 gedruckten Rechenbuche S. 103 und folgg. die Verfertigung magischer Quadrate ungerader Seitenzahlen nach der ersten Regel von Moschopulos, und theilt noch die Quadrate zu den Seitenzahlen 4, 6, 8, doch ohne ihre Construction gehörig zu zeigen, mit. Nach Stifels und Riesens Vorgange, haben die Rechenmeister des 17ten Jahrhunderts und der ersten Hälfte des 18ten, in ihren Rechenbüchern der magischen Quadrate größtentheils erwähnt, doch schränken sie sich mehrentheils auf die ungeraden, als welche am leichtesten zu verfertigen sind, ein. Clausberg giebt zwar in seiner demonstrativen Rechenkunst §. 1505 die magischen Quadrate von 4, 6, 8, 10, aber keine Anleitung zu ihrer Construction welche nach Stifel, den er nicht nennt, ausgeführt ist. Eine besondere Schrift von Cornelius Capito, alle magische Quadrattafeln zu verfertigen und viele 100, 1000 ja millionenmahl zu verändern, Glückstadt, 1767. 8. scheint wenig bekannt geworden, und unbenutzt geblieben zu seyn. Daher findet man in neueren deutschen mathematischen Schriften wenig Unterricht über diesen Gegenstand. Denn was Vieth in dem Leipziger Magazine für reine und angewandte Mathematik Jahrg. 88. S. 228 und folgg. und Lorenz in seinem Lehrbegriffe der Syntaktik davon gelehrt haben, ist unzureichend

und zum Theil mangelhaft. Ich habe deswegen in einer akademischen Gelegenheitsschrift, welche auch in den Buchhandel gekommen ist, die Construction der magischen Quadrate etwas ausführlicher abgehandelt, und besonders die Zusammensetzung derselben aus Einfassungen und die Verfertigung der Quadrate gerader Seitenzahlen einfacher und leichter zu machen gesucht. Auf diese Schrift muß ich mich, der Kürze halben, wegen der Beweise und der weitern Ausführung beziehen, indem ich hier die Regeln zur Construction magischer Quadrate bloß historisch und zwar hauptsächlich nur solche mittheilen werde, welche zierliche und symmetrische Anordnungen gewähren. Die Vorschriften selbst werden sich auf jede beliebige arithmetische Progression beziehen, zunächst aber in den zur Erläuterung beygefügten Exempeln nur auf die natürliche Zahlenreihe angewandt werden.

I. Gewöhnliche magische Quadrate.

A. Ungerade.

3. Für die Construction magischer Quadrate von ungeraden Seitenzahlen giebt es kein einfacheres Verfahren, als das der Inder zu Surate. Nach demselben werden die auf einander folgenden Glieder der Progression in die Fächer eingetragen, deren von der linken zur rechten aufwärts gehende Diagonalen eine einzige gerade Linie bilden, indem man beym Eintragen dieser Richtung der Diagonalen folgt, d. i., von der linken zur rechten aufwärts steigt. Ist man dabey in den ersten oder obersten Horizontalstreifen gekommen, so geht man mit dem nächsten Gliede der Progression in das unterste Fach des folgenden Verticalstreifens über, so wie, wenn man in den letzten oder äußersten Verticalstreifen zur rechten gekommen ist, man in das erste Fach des nächsthöheren Horizontalstreifens zurückgeht. Kommt man auf ein schon besetztes Fach, welches eintrifft, wenn die Stellenzahl des zuletzt eingetragenen Gliedes der Seitenzahl des Quadrats

gleich, oder ein Vielfaches derselben ist, so setzt man das folgende Glied in das nächste Fach unter dem zuletzt besetzten. Das erste Glied der Progression, mit welchem der Anfang des Eintragens gemacht wird, kommt in das mittelste Fach des obersten oder ersten Horizontalstreifens zu stehen.

Das nach dieser Methode construirte magische Quadrat zur Seitenzahl 7 fällt so aus

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

4. Moschopulus lehrt in der oben (2) angeführten Schrift ein doppeltes Verfahren zur Construction eines ungeraden magischen Quadrats. Das erste, dem Verfahren der Inder ähnliche, ist folgendes. Man trägt die Glieder der Progression nach ihrer Folge in die Fächer ein, deren von der linken zur rechten abwärts gehende Diagonalen eine zusammenhängende gerade Linie ausmachen, und zwar so, daß man beym Eintragen jener Richtung der Diagonalen nachgeht oder von der linken zur rechten abwärts steigt. Von dem untersten Fache eines Verticalstreifens geht man in das oberste des nächsten Streifens, und von dem letzten Fache eines Horizontalstreifens in das erste des nächstfolgenden Streifens über. Verfällt man hierbey auf ein schon besetztes Fach, welches geschieht, wenn die Zahl der eingetragenen Glieder der Seitenzahl des Quadrats oder einem Vielfachen derselben gleich ist, so setzt man das einzutragende Glied in demselben Verticalstreifen zwey Fächer tiefer als das zuletzt eingetragene, und wenn es dadurch außerhalb des

Quadrats zu stehen käme, in das höchste noch unbesetzte Fach des Streifens. Den Anfang des Eintragens macht man mit dem ersten Gliede der Progression, und setzt solches in das nächste Fach unter dem mittelsten des ganzen Quadrats.

Nach Moschopulos zweyter Methode geht man, wenn ein Fach mit einem Gliede der Progression besetzt ist, mit dem nächsten Gliede allemal zwey Fächer tiefer und in den nächsten Verticalstreifen. Hierbey sind der erste Vertical- und Horizontalstreifen als die nächsten an den letzten und als an solche anschließend zu betrachten. Kommt man hierdurch auf ein schon besetztes Fach, welches auch hier geschieht, wenn die Anzahl der eingetragenen Glieder so groß ist, als die Seitenzahl des Quadrats oder ein Vielfaches derselben, so setzt man das einzutragende Glied in demselben Verticalstreifen vier Fächer tiefer, als das zuletzt eingetragene, wobey man dem vorigen zufolge im Zählen der Fächer das erste Fach des Streifens auf das letzte folgen läßt. Das erste Glied der Progression, womit das Eintragen anfängt, wird in das mittelste Fach des ersten oder höchsten Horizontalstreifens gesetzt.

Hiernach kommen die beiden folgenden Anordnungen des magischen Quadrats von 7

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	2[illegible]	45
46	15	40	9	34	3	28

38	14	32	1	26	44	20
5	23	48	17	42	11	29
21	39	8	33	2	27	45
30	6	24	49	18	36	12
46	15	40	9	34	3	28
13	31	7	25	43	19	37
22	47	16	41	10	35	4

In den nach der Methode der Inder und nach der ersten Regel von Moschopulos construirten magischen Quadraten

machen je zwey Glieder in Fächern, welche von dem mittelsten in der geraden Linie durch die Mitte der Fächer gleichweit abstehen, zusammengenommen das Doppelte des mittelsten Gliedes aus. Z. E. 48 + 2 = 2 . 25. Die nach der zweyten Regel von Moschopulos angefertigten Quadrate, deren Seitenzahl eine Primzahl zu 3 ist, haben die Eigenschaft, daß auch je zwey einer Diagonale parallel laufende Reihen, deren Gliederanzahl so groß ist, als die Seitenzahl des Quadrats, dieselbe Summe mit den Horizontal-Vertical- und Diagonalreihen geben. So ist in der zweyten der beyden vorigen Anordnungen 26 + 11 + 45 + 30 + 15 + 7 + 41 = 175 = 14 + 5 + 45 + 36 + 34 + 25 + 16. Etwas dem ähnliches hat unter derselben Bedingung in den nach dem Verfahren der Inder construirten Quadraten statt, doch nur bey den Reihen, die der von der linken zur rechten abwärts gehenden Diagonale parallel sind.

B. Gerade und zwar

a) Geradgerade.

5. Um ein magisches Quadrat von einer doppelt geraden Seitenzahl, welche = 4m seyn mag, zu construiren, formire man zuerst das natürliche Quadrat, d. i. dasjenige, worein die Glieder der in das magische Quadrat zu bringenden Progression nach der Ordnung eingetragen sind. Man bezeichne sowohl die horizontalen als verticalen Streifen desselben nach der Reihe durch daneben und darüber oder darunter gesetzte Zahlen 1, 2, 3 .... 4m, so wird jedes Fach, so wie das in ihm befindliche Glied, durch die beiden Zahlen bestimmt, welche anzeigen, die wie vielten in ihrer Ordnung die Streifen sind, welchen das Fach gemeinschaftlich ist. Man kann diese Zahlen neben oder auch übereinander schreiben, so daß die erste oder untere den horizontalen Streifen, die andere oder obere aber den verticalen Streifen anzeigt. Wir werden dies aber im Folgenden nicht brauchen. Nun setze man die Zah-

len von 1 bis 2m in irgend welcher Ordnung man will in einer Columne unter einander, wobey es nicht nöthig ist, ein anderes Anfangsglied als 1 zu wählen, und neben 1 in einer Zeile noch m der übrigen Glieder, als Anfangsglieder so vieler Columnen. Unter jedes Anfangsglied schreibe man die übrigen, wie sie in der ersten Columne auf einander folgen, indem man das erste Glied als auf das letzte folgend ansieht. Jeder Zahl der einzelnen Columnen füge man noch ihre Ergänzung zu 4m + 1 bey, und lasse nun die Zahlen der ersten Columne Anzeiger der horizontalen Streifen, die der m übrigen aber Anzeiger der verticalen Streifen seyn, so werden durch die Verbindung jedes der beiden horizontalen Anzeiger einer Zeile mit jedem der nebenstehenden verticalen Anzeiger, 4m Fächer oder Glieder des natürlichen Quadrats, überhaupt aber durch den ganzen Typus 8mm Fächer oder Glieder bezeichnet. Diese Glieder streiche man in dem natürlichen Quadrate durch, und trage die übrigen in ein andres Quadrat von so viel Fächern, als das natürliche hat, und zwar in die ähnlich liegenden Fächer ein. In die leer gebliebenen Fächer nach der Reihe trage man die durchgestrichenen Glieder in umgekehrter Ordnung oder rückwärts gelesen ein, oder, welches dasselbe ist, man setze statt jedes durchgestrichenen Gliedes seine Ergänzung zu der Summe der beiden äussersten, d. i. zu 16mm + 1, so ist das magische Quadrat fertig.

Das Verfahren zu erläutern dienen die beiden folgenden Schemata, wovon das erste das natürliche Quadrat zur Seitenzahl 8, das andere das daraus nach der Formel

1, 8	2, 7	3, 6
2, 7	4, 5	1, 8
4, 5	3, 6	2, 7
3, 6	1, 8	4, 5

abgeleitete magische Quadrat ist.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(1)	1	~~2~~	3	4	5	~~6~~	~~7~~	8
(2)	~~9~~	10	11	~~12~~	~~13~~	14	15	~~16~~
(3)	~~17~~	18	19	~~20~~	~~21~~	22	23	~~24~~
(4)	25	~~26~~	~~27~~	28	29	~~30~~	~~31~~	32
(5)	33	~~34~~	~~35~~	36	37	~~38~~	~~39~~	40
(6)	~~41~~	42	43	~~44~~	~~45~~	46	47	~~48~~
(7)	~~49~~	50	51	~~52~~	~~53~~	54	55	~~56~~
(8)	57	~~58~~	~~59~~	60	61	~~62~~	~~63~~	64

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

b) Ungeradgrade.

6. Man formire auch hier zuerst das natürliche Quadrat, und bezeichne die Streifen desselben, wie in (5). Auch mache man hier einen Typus von 2 m + 1 Zeilen, wenn 4 m + 2 die Seitenzahl des Quadrats ist, und von m + 2 Columnen, auf dieselbe Weise, wie dort gezeigt ist, nur daß man hier den Zahlen ihre Ergänzungen zu 4m + 3 beyfügt. Die Glieder des natürlichen Quadrats, welche durch die Verbindung der Anzeiger der horizontalen Streifen in der ersten Columne mit den in derselben Zeile befindlichen Anzeigern der verticalen Streifen in der letzten Columne bestimmt werden, bezeichne man durch darunter gesetzte Puncte, und eben so

bezeichne man die Glieder, welche der Verbindung der horizontalen Anzeiger mit den verticalen der vorletzten Columne entsprechen, durch darüber gesetzte Puncte. Die übrigen durch den Typus bestimmten Glieder des natürlichen Quadrats durchstreiche man, so wird man in allem $8m + 4$ unten punctirte, eben so viel oben punctirte und $(8m + 4)(m - 1)$ durchgestrichene Glieder haben. Je vier punctirten Gliedern, welche zusammengehören, $\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ d. i., in zwey Streifen befindlich sind, welche von den einander gegen über liegenden Seiten des Quadrats gleich weit abstehen, gebe man in den gleichliegenden Fächern des magischen Quadrats, wenn sie oben punctirt sind, diese Stellung $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ a & b \end{pmatrix}$ oder auch $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix}$; sind sie aber unten punctirt, diese $\begin{pmatrix} \beta & a \\ b & \alpha \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} b & \alpha \\ a & \beta \end{pmatrix}$. Man kann auch die letzte Stellungsänderung bey den oben punctirten Gliedern, und die erste bey den unten punctirten anbringen. Mit den übrigen Gliedern, den durchgestrichenen und den gar nicht bezeichneten, verfahre man nach der Anweisung in (5), so erhält man ein magisches Quadrat.

Zur Erläuterung dieser Vorschriften folgen hier die magischen Quadrate von 6 und von 10. Ersteres ist nach der Formel

1,6	2,5	3,4
2,5	3,4	1,6
3,4	1,6	2,5

letzteres nach dieser

1,10	2, 9	4, 7	5, 6
2, 9	3, 8	5, 6	1,10
3, 8	4, 7	1,10	2, 9
4, 7	5, 6	2, 9	3, 8
5, 6	1,10	3, 8	4, 7

construirt. Bey den punctirten Gliedern sind die zuerst angegebenen Veränderungen der Stellung gewählt worden.

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

1	99	3	97	96	5	94	8	92	10
90	12	88	14	86	85	17	83	19	11
80	79	23	77	25	26	74	28	22	71
31	69	68	34	66	65	37	33	62	40
60	42	58	57	45	46	44	53	49	51
50	52	43	47	55	56	54	48	59	41
61	32	38	64	36	35	67	63	39	70
21	29	73	27	75	76	24	78	72	30
20	82	18	84	15	16	87	13	89	81
91	9	93	4	6	95	7	98	2	100

Es bedarf übrigens wohl kaum einer Erinnerung, daß man statt des Durchstreichens und Punctirens jede andere Art die durch die Formel angedeuteten Glieder zu bezeichnen und zu unterscheiden gebrauchen könne.

7. Die bisher (3 – 6) vorgetragenen Methoden zur Construction magischer Quadrate lassen eine merkwürdige Erweiterung zu. Darüber sehe man die oben (2) angeführte Commentatio de quadratis magicis, art. 47.

8. Eine sinnreiche, einfache, und dabey doch sehr

allgemeine Methode zur Construction magischer Quadrate, welche hier noch eine kurze Erklärung verdient, ist die von Poignard und de la Hire. Nach dieser formirt man zuerst zwey Hülfsquadrate, deren jedes für sich magisch, aber leicht construirbar ist, aus welchen dann das verlangte magische Quadrat zusammengesetzt wird. Die leichte Anfertigung der Hülfsquadrate hängt davon ab, daß jedes nur so viel verschiedene Glieder enthält, als die Seitenzahl Einheiten hat, und daß diese Glieder in den verschiedenen Streifen wiederhohlt werden. Zu dem einem dieser Quadrate werden die ersten Glieder der in das magische Quadrat einzutragenden Progression in der gehörigen Anzahl genommen, zu dem andern kommen die Vielfachen von dem Producte der Seitenzahl in die Differenz der Progression nach der Reihe, o nicht ausgeschlossen. Ist nun die Seitenzahl ungerade, so trägt man die Glieder jedes Hülfsquadrats in die Fächer des ersten oder höchsten Horizontalstreif ns eines jeden in einer beliebigen Folge ein, und füllt die noch leeren Fächer des ersten Verticalstreifens beider Quadrate nach der Reihe dadurch aus, das man die Glieder des ersten Horizontalstreifens, von dem ersten anzufangen, nach einer für beide Quadrate verschiedene Zahl, welche größer als 2, und um eins vermindert eine Primzahl zu der Seitenzahl des Quadrats läßt, abzählt, indem man das erste Glied als an das letzte anschließend betrachtet, und jedesmahl das Glied, wobey eine Zählung sich endigt und eine neue sich anfängt, in den ersten Verticalstreifen setzt. Neben jedes Glied setzt man die übrigen in derselben Ordnung, wie in dem ersten Horizontalstreifen, wobey wieder das erste als auf das letzte folgend angesehen wird. Sind auf diese Weise alle Horizontalstreifen angefüllt, so darf man nur ein Quadrat machen, in welchem jedes Glied eines Faches die Summe der Glieder in den gleichliegenden Fächern der beiden Hülfsquadrate ist, so entsteht ein magisches Quadrat, welches die gegebene Progression in seinen Fächern enthält.

Beyspiel. Für das magische Quadrat zur Seitenzahl 5 mit der natürlichen Progression sind die Glieder des ersten Hülfsquadrats 1, 2, 3, 4, 5; die des andern 0, 5, 10, 15, 20. Setzt man jene in der Folge 5, 1, 2, 3, 4; diese so: 15, 10, 20, 0, 5 in die ersten Horizontalstreifen, so entstehen, wenn man jene nach 3, diese nach 4 abzählt, die folgenden beiden Hülfsquadrate

5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3
1	2	3	4	5
3	4	5	[illegible]	2

15	10	20	0	5
0	5	15	10	20
10	20	0	5	15
5	15	10	20	0
20	0	5	15	10

Aus beiden kommt dieses magische Quadrat von 5

20	11	22	3	9
2	8	19	15	21
14	25	1	7	18
6	17	13	24	5
23	4	10	16	12

Der Grund, warum die Abzählung nach einer größern Zahl als 2 geschehen muß, ist, die Wiederhohlung des in dem letzten Fache des ersten Horizontalstreifens befindlichen Gliedes in der einen Diagonale zu vermeiden. Darum darf man auch nicht nach der Seitenzahl abzählen, es sey denn, daß das mittlere Glied in dem ersten oder letzten Fache, sich befindet, bey welchem die Wiederhohlung allerdings gestattet ist, wie diese beiden Hülfsquadrate zeigen.

1	5	4	[illegible]	3
5	4	2	3	1
4	2	3	1	5
2	3	1	5	4
3	1	5	4	2

10	0	5	20	5
5	10	0	15	20
20	5	20	0	15
15	20	5	10	0
0	15	20	5	10

wo in dem ersten Quadrate die Summe der Diagonale, welche bloß das Glied 3 enthält, auch 15, wie die der übrigen Reihen, ist. In dem andern giebt die Diagonale mit dem Gliede 10 zur Summe 50, gleich den andern Reihen.

Daß die um 1 verminderte Zahl, nach welcher man abzählt, eine Primzahl zu der Seitenzahl sey, ist nöthig, damit nicht in demselben Verticalstreifen einerley Glied mehrmahl zu stehen komme. Übrigens erhellt die magische Beschaffenheit der Hülfsquadrate aus ihrer Construction selbst, nach welcher alle Reihen dieselben Glieder enthalten. Diese Beschaffenheit bleibt auch in dem daraus zusammengesetzten Quadrate, in welchem, wegen der verschiedenen Abzählungen in den Hülfsquadraten, kein Glied der Progression wiederhohlt werden kann.

9. Da die von de la Hire vorgeschriebene Methode zur Construction gerader magischer Quadrate kaum andere Anordnungen liefern möchte, als das im Vorhergehenden angegebene und gehörig erweiterte Verfahren, so verweise ich die Liebhaber derentwegen auf de la Hire's Aufsatz selbst, zumahl da es nach dem bisherigen nicht schwer seyn dürfte, auch ohne denselben jene Methode mit Zuziehung der obigen Quadrate von 6, 8 und 10 zu entwickeln.

II. Magische Quadrate mit magischen Einfassungen.

10. So können diejenigen magischen Quadrate heißen, von welchen man eine oder mehrere der äußern

Einfassungen wegnehmen kann, ohne daß das übrig bleibende Quadrat aufhört magisch zu seyn. Dergleichen ist das hier beygefügte Quadrat von 7.

4	49	48	47	8	9	10
5	15	37	36	18	19	45
6	16	22	29	24	34	44
43	33	27	25	23	17	7
39	30	26	21	28	20	11
38	31	13	14	32	35	12
40	1	2	3	42	41	46

Nimmt man hier die äußerste Einfassung, welche die Glieder 1, 2, 3 . . . 12, und 38, 39, 40 . . . 49 in ihren Fächern enthält, weg, so bleibt ein magisches Quadrat von 25 Fächern übrig. Wird auch von diesem die Einfassung mit den Gliedern 13, 14 . . . 20 und 30, 31 . . . . 37 weggenommen, so bleibt ein neunfächeriges magisches Quadrat übrig. Und nimmt man endlich auch von diesem die Einfassung mit den Gliedern 21, 22, 23, 24 und 26, 27, 28, 29 weg, so bleibt das einfächerige Quadrat mit dem Gliede 25 übrig, welches die Mitte des ganzen Quadrats bildet, und gleichfalls als ein magisches anzusehen ist.

11. An jeder Einfassung kommen vier Streifen, zwey horizontale und zwey verticale, vor, wovon je zwey zusammenstoßende ein Eckfach gemeinschaftlich haben. Die zwischen den Eckfächern liegenden Fächer können kurz Zwischenfächer heißen. Ist die Zahl der Fächer eines Streifens ungerade, so giebt es ein mittelstes Fach. Die Fächer selbst werden in den horizontalen Streifen von der linken zur rechten, in den verticalen von oben nach unten gezählt werden. Jedes Eckfach wird zweymahl gezählt; es kann z. B. das letzte in einem Vertical- und das erste in einem Horizontalstreifen seyn. Die Einfassungen wollen wir, wenn nicht das Gegen-

theil erinnert wird, von außen nach innen zu zählen, so daß die äußerste die erste und die innerste die letzte ist. Dieses vorausgesetzt, läßt sich nun die Construction der hier betrachteten magischen Quadrate zeigen.

A. Ungerade.

12. Man unterscheide kleinere und größere Glieder der in das magische Quadrat einzutragenden Progression. Jene sind kleiner, diese größer als das mittlere Glied, oder als die halbe Summe der beiden äußersten Glieder. Ferner nenne man Ergänzungsglieder diejenigen, welche von den äußersten gleich weit abstehen, deren Summe also so groß als das doppelte mittlere Glied oder als die Summe der beiden äußersten ist. Ist nun die Seitenzahl des Quadrats $= 2n + 1$, so ist die Anzahl der kleinern Glieder $= 2nn + 2n$. Von diesen kommen die $4n$ ersten auf die erste Einfassung, die $4n - 4$ folgenden auf die zweyte, die $4n - 8$ nächsten auf die dritte u. s. w., auf jede folgende Einfassung 4 weniger, als auf die nächstvorhergehende, bis sie alle unter die n Einfassungen vertheilt sind.

Aus den für jede Einfassung bestimmten, der Ordnung nach auf einander folgenden kleineren Gliedern mache man vier Abtheilungen, jede von gleich vielen derselben, und trage die Glieder der ersten Abtheilung in die ersten Zwischenfächer des unteren Horizontalstreifens der Einfassung bis zum Mittelfache, dieses mit eingeschlossen, ein. Das erste Glied der zweyten Abtheilung kommt in das obere Eckfach des vorderen Verticalstreifens (des zur linken) zu stehen, die übrigen in die darauf folgenden Zwischenfächer bis zum Mittelfache, doch ohne dieses. Das erste Glied der dritten Abtheilung setze man in das Mittelfach des hintern Verticalstreifens (desjenigen zur rechten), die übrigen aber in die auf das Mittelfach folgenden Zwischenfächer des oberen Horizontalstreifens. Endlich trage man das erste Glied der vierten und letzten Abtheilung in das obere Eckfach des hinteren Verticalstreifens,

die andern aber in die auf das Mittelfach folgenden Zwischenfächer desselben ein, so ist die Vertheilung der kleineren Glieder geschehen. Jedem kleineren Gliede setze man, welches ohne Rechnung, durch eine aus zwey Reihen bestehende Liste der kleineren und größeren Glieder, worin dieselben gehörig unter einander stehen, geschehen kann, sein Ergänzungsglied gerade oder ins Kreuz gegenüber, je nachdem das kleinere Glied in einem Zwischen- oder Eckfache befindlich ist, so ist auch die Vertheilung der auf die Einfassung kommenden größeren Glieder gemacht. Man kann diese aber auch ganz so wie die kleineren Glieder, nur in umgekehrter Ordnung, eintragen. Sind auf diese Weise alle Einfassungen besetzt, so trage man noch das mittlere Glied der Progression in das mittelste Fach des ganzen Quadrats ein, so ist das magische Quadrat fertig.

Das obige Quadrat von 7 kann diesen Vorschriften zur Erläuterung dienen. Die Listen der Glieder sind

für die erste Einfassung

1 2 3	4 5 6	7 8 9	10 11 12
49 48 47	46 45 44	43 42 41	40 39 38

für die zweyte

13 14	15 16	17 18	19 20
37 36	35 34	33 32	31 30

für die dritte und letzte

21	22	23	24
29	28	27	26

Die letzte Einfassung enthält außer dem Mittelfache jedes Streifens weiter keine Zwischenfächer; in jeder Abtheilung der kleineren Glieder für dieselbe befindet sich aber auch nur ein Glied.

Übrigens können die kleineren Glieder, welche in die Zwischenfächer eines Streifens zu stehen kommen, in dieselben beliebig, und in welcher Ordnung man will, vertheilt werden, wenn man nur immer das gleich-

liegende Fach des gegenüber liegenden Streifens für das Ergänzungsglied offen läßt.

B. Gerade.

13. Bey diesen giebt es kein mittelstes Fach des ganzen Quadrats, aber auch kein mittleres Glied der Progression. Die Stelle des Mittelfachs vertritt ein sechszehnfächeriges Quadrat. In den Einfassungen fallen ebenfalls die Mittelfächer weg, und es giebt bloß Zwischenfächer. Der Unterschied zwischen größern und kleinern Gliedern bleibt. Wenn 2n die Seitenzahl des Quadrats oder der äußersten Einfassung ist, so kommen auf die erste Einfassung die ersten 4n — 2 kleineren Glieder der Progression, auf die zweyte die folgenden 4n — 6, auf die dritte die nächsten 4n — 10 u. s. w., auf die letzte endlich, welche das sechszehnfächerige Quadrat zunächst umgiebt, die 10 letzten kleineren Glieder, außer acht, welche in das innere Quadrat von 16 Fächern vertheilt werden. Die Construction der Einfassungen ist verschieden, je nachdem die Fächerzahl derselben durch 4 oder 8 theilbar ist.

14. Ist die Fächerzahl der Einfassung bloß ein Geviertes, so theile man die ganze Reihe der in die Einfassung zu bringenden kleineren Glieder in zwey Hälften, und trage die Glieder der ersten Hälfte, mit Ausschluß der beiden letzten, in die Fächer der beiden Horizontalstreifen folgendergestalt ein. Das erste Glied setze man in das erste oder vordere Eckfach des oberen Streifens, die beiden folgenden in die beiden ersten Zwischenfächer des untern, die beiden nächsten in das dritte und vierte Zwischenfach des obern, und so fahre man mit dem Eintragen der Glieder fort, indem man sie immer paarweise, und mit den Streifen abwechselnd, so in die auf einander folgenden Fächer derselben einträgt, daß bloß diejenigen Fächer eines Streifens leer bleiben, denen in dem andern besetzte Fächer gerade gegenüber liegen. Endlich setze man das vorletzte Glied der ersten Hälfte in das erste Zwi-

Zwischenfach des Verticalstreifens zur rechten, das letzte Glied aber in das letzte Zwischenfach des oberen Horizontalstreifens. Mit den Gliedern der zweyten Hälfte verfahre man so. Das erste setze man in das letzte oder hintere Eckfach des oberen, das zweyte in das vorletzte Zwischenfach des unteren Horizontalstreifens, das dritte kommt in das zweyte Zwischenfach des Verticalstreifens zur linken zu stehen, die übrigen, bis auf die beiden letzten, werden Paarweise, die beiden letzten einzeln, in die unbesetzten Zwischenfächer der beiden Verticalstreifen, indem man von dem dritten Fache des Verticalstreifens zur rechten anfängt, auf die eben beschriebene Art eingetragen.

15. Läßt sich die Fächerzahl der Einfassung durch 8 theilen, so theile man wieder die ganze Reihe der kleineren Glieder, welche in dieselbe kommen sollen, in ihre beiden Hälften, und trage die Glieder der ersten Hälfte, keins ausgenommen, in die beiden Horizontalstreifen auf die Art ein, wie die Glieder der ersten Hälfte ohne zwey in die in (14) betrachteten Einfassungen eingetragen werden. Die beiden letzten Glieder kommen dabey in die beiden letzten Zwischenfächer des untern Horizontalstreifens zu stehen. Die Glieder der zweyten Hälfte werden in die beiden Verticalstreifen indem man von oben in dem Verticalstreifen zur rechten anfängt, eben so, wie die Glieder der ersten in die Horizontalstreifen, eingetragen, nur mit der Ausnahme, daß man die beiden ersten Glieder, welche paarweise eingetragen werden, das zweyte und dritte Glied der ganzen Reihe nämlich, sogleich unter das erste setzt, und das $(4p + 4)$te und $(4p + 5)$te Glied, wo p aus der Gliederanzahl der zweyten Hälfte $8p + 3$ oder $8p + 7$ zu bestimmen ist, einzeln, sonst aber in der Ordnung mit den übrigen Gliedern einträgt.

16. Sind die kleineren Glieder auf die eine oder andere Art in eine Einfassung eingetragen, so werden die leer gebliebenen Fächer mit den größeren Gliedern eben so wie bey den ungeraden Quadraten, nach der Anweisung in (12) ausgefüllt. Es ist nun zur Vollendung des

ganzen Quadrats bloß noch die Construction des innern sechszehnfächerigen Quadrats übrig, welche, da die acht größern Gliedern desselben unmittelbar auf die acht kleineren in der Progression folgen, nach (5) ausgeführt wird. Oder man ordne, um die Anfertigung des Typus zu ersparen, wenn a, b, c, d, e, f, g, h die kleineren Glieder in der gehörigen Folge, und A, B, C, D, E, F, G, H ihre Ergänzungsglieder sind, so daß die in das innere Quadrat zu bringende Progression a, b, ... g, h, H, G, ... B, A ist, diese Glieder auf eine dieser beiden Arten zu einem magischen Quadrate

a	B	C	d
E	f	g	H
h	G	F	e
D	c	b	A

a	d	B	C
A	D	b	c
G	F	h	e
g	f	H	E

so ist das aus demselben und aus den Einfassungen zusammengesetzte Totalquadrat gleichfalls magisch.

Hier ist als Exempel zur Erläuterung das magische Quadrat von 8, welches man mit der in (5) gegebenen Anordnung vergleichen kann.

1	63	62	4	5	59	58	8
16	15	49	48	44	19	20	9
55	47	25	28	39	38	18	10
11	22	40	37	26	27	43	54
53	42	34	35	32	29	23	12
13	24	31	30	33	36	41	52
14	45	16	17	21	46	50	51
57	2	3	61	60	6	7	64

Nimmt man hier die äußere Einfassung weg, und vermindert jedes Glied in dem übrigbleibenden Quadrate um 14, so hat man ein magisches Quadrat der Sei-

tenzahl 6. Auf diese Weise enthalten also die Quadrate dieser Art alle magische Quadrate kleinerer Seitenzahlen in sich.

17. Man kann die Vertheilung der kleineren Glieder in die Einfassungen und in das innere Quadrat auch anders machen, und überhaupt noch mancherley Veränderungen bey den aus Einfassungen gebildeten Quadraten anbringen. Darüber sehe man die angeführte Dissertation.

III. Magische Quadrate mit symmetrischen Abtheilungen.

18. Es wird an ein Paar Beyspielen sich die Beschaffenheit und die Construction dieser Quadrate am besten zeigen lassen. Zuerst ein ungerades, das von der Seitenzahl 9.

Man denke sich dieses Quadrat in 9 neunfächerige Quadrate, deren jedes für sich magisch ist, zerlegt, und es seyn a, b, c . . . . h, k die mittleren Glieder dieser Quadrate, welche sich in den mittelsten Fächern derselben befinden, in diese Ordnung gestellt

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{matrix}$$

In jedem der Partialquadrate ist die Reihensumme 3 mahl so groß als das mittlere Glied. Soll also das Totalquadrat magisch seyn, so muß

$$3a + 3b + 3c = 3a + 3e + 3k$$
$$= 3a + 3d + 3g \text{ u. s. w.}$$

oder

$$a + b + c = a + e + k$$
$$= a + d + g \text{ u. s. w.}$$

seyn, d. i., die mittleren Glieder der Partialquadrate müssen für sich ein magisches Quadrat geben. Man theile nun die ganze Reihe der in das Totalquadrat zu bringenden Glieder 1, 2, 3 . . . . 81 in 9 Progressionen ab, welche sind

1, 2 . . . . 5 . . . . 8, 9
10, 11 . . . . 14 . . . . 17, 18
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
73 74 . . . . 77 . . . . 80, 81

so bilden die mittleren Glieder derselben 5, 14 . . . . . 77 gleichfalls eine arithmetische Progression, sind also der magischen Anordnung fähig, und das aus ihnen nach der Methode der Inder formirte magische Quadrat ist

68	5	50
23	41	59
32	77	14

Da jetzt die mittleren Glieder der Partialquadrate bestimmt sind, so ist es leicht die Fächer, welche das mittelste in jedem Quadrate umgeben, mit den zu jedem mittleren Gliede gehörigen übrigen Gliedern der einzelnen Progressionen auszufüllen, da denn das nachstehende Quadrat sich ergiebt.

71	64	69	8	1	6	53	46	51
66	68	70	3	5	7	48	50	52
67	72	65	4	9	2	49	54	47
26	19	24	44	37	42	62	55	60
21	23	25	39	41	43	57	59	61
22	27	20	40	45	38	58	63	56
35	28	33	80	73	78	17	10	15
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	76	81	74	13	18	11

Es ist leicht zu sehen, daß, wenn eins der Partialquadrate construirt ist, die übrigen bloß durch Vermehrung oder Verminderung seiner Glieder formirt werden können.

19. Für die Construction der geraden Quadrate obiger Art ist noch zu bemerken, daß die in (16) mitgetheilten, aus den Gliedern a, b, c, ... h und A, B, C . . . . H gebildeten Quadrate auch dann noch magisch sind, wenn nur a, b, c, d arithmetisch proportional, und e, f, g, h nach der Ordnung um gleichviel größer oder kleiner, A, B . . . . . H aber beziehungsweise die Ergänzungen von a, b . . . . . h zu derselben Zahl sind. Die Reihensumme in dem magischen Quadrate ist alsdann $2(A + a) = 2(B + b)$ u. s. w. So geben die Zahlen 1, 2, 3 . . . . 16 in diese Ordnung gebracht,

1	9	5	13
3	11	7	15
2	10	6	14
4	12	8	16

wo die angezeigten Bedingungen Statt haben, die magischen Anordnungen

1	8	12	13
14	11	7	2
15	10	6	3
4	5	9	16

1	13	8	12
16	14	9	5
10	6	15	3
7	11	2	14

20. Um jetzt das magische Quadrat von 8 aus vier Partialquadraten zusammenzusetzen, theile man die ganze Reihe der kleineren Glieder von 1 bis 32 in 8 Tetraden, und nehme zu jedem der Partialquadrate zwey derselben, welche man will. Man füge ihnen noch die größeren Glieder, welche sie zu 65 ergänzen, bey, so wird die Reihensumme in jedem der Partialquadrate 2 . 65 oder 130, also in dem aus demselben gebildeten Totalquadrate 260 seyn, wie erfordert wird.

Sind z. E. die kleineren Glieder für das erste Quadrat

1, 2, 3, 4
21, 22, 23, 24

für das zweyte

5, 6, 7, 8
29, 30, 31, 32

für das dritte

13, 14, 15, 16
25, 26, 27, 28

für das vierte

9, 10, 11, 12
17, 18, 19, 20

so entsteht folgendes Totalquadrat

1	4	63	62	5	8	59	58
64	61	2	3	60	57	6	7
42	43	24	21	34	35	32	29
23	22	41	44	31	30	33	36
13	16	51	50	9	12	55	54
52	49	14	15	56	53	10	11
38	39	28	25	46	47	20	17
27	26	37	40	19	18	45	48

21. Man sieht aus den bisherigen Beyspielen, daß sich nur die Quadrate zusammengesetzter Seitenzahlen, die einfach geraden ausgenommen, auf diese Weise zusammen setzen lassen. Je mehr Factoren die Seitenzahl hat, desto mannichfaltiger ist die Zusammensetzung. Das Quadrat von 12 läßt sich z. B. zusammensetzen 1) aus 4 Quadraten von 36 Fächern; 2) aus 9 Quadraten von 16 Fächern mit einerley oder verschiedenen Reihensummen; 3) aus 16 Quadraten von 9 Fächern. Nimmt man die Reihensummen der Partialquadrate alle gleich, wie in dem letzten Exempel, so giebt das eine sehr einfache

und doch großer Abänderungen fähige Construction der doppelt geraden Quadrate. Daß die einfach geraden sich auf diese Weise nicht zusammensetzen lassen, erhellt daraus, daß es kein vierfelderiges magisches Quadrat giebt. Man kann diese Quadrate aber immer, wenn ihre Seitenzahl größer ist als 6, aus einem Quadrate der vorigen Gattung, um welches eine Einfassung magischer Art gesetzt wird, bilden. Davon stehe hier noch ein Exempel an dem magischen Quadrate zur Seitenzahl 10.

1	99	98	4	5	95	94	90	9	10
93	19	22	81	80	27	30	73	72	8
12	82	79	20	21	74	71	28	29	89
88	76	77	26	23	68	69	34	31	13
87	25	24	75	78	33	32	67	70	14
15	35	38	65	64	43	46	57	56	86
16	66	63	36	37	58	55	44	45	85
84	60	61	42	39	52	53	50	47	17
18	41	40	59	62	49	48	51	54	83
91	2	3	97	96	6	7	11	92	100

Veränderungen der magischen Quadrate.

22. Das magische Quadrat zur Seitenzahl 3 läßt nicht mehr als eine Anordnung zu, welches so erhellt. Die Reihensumme dieses Quadrats ist 15, und diese läßt sich nur auf achterley Weise aus je dreyen der Elemente 1, 2, 3 . . . . 9, ohne eins zu wiederhohlen, zusammensetzen. Es ist nämlich $15 = 1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 2 + 5 + 8 = 2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 4 + 5 + 6$. Unter diesen acht gleichen Summen sind nur vier, welche in die Diagonalen und Mittelstreifen gesetzt werden können, nämlich diese $1 + 5 + 9$,

2 + 5 + 8, 3 + 5 + 7, 4 + 5 + 6, denen das Glied 5 gemeinschaftlich ist. Da die Diagonalen mit jedem Streifen ein Glied gemeinschaftlich haben, so dienen von jenen vier Summen bloß die beiden 2 + 5 + 8, 4 + 5 + 6, welche mit jeder der vier Summen 1 + 6 + 8, 2 + 4 + 9, 2 + 6 + 7, 3 + 4 + 8 ein Glied gemein haben, in die Diagonalen, folglich bilden die beiden andern 1 ÷ 5 + 9 und 3 + 5 + 7 die Mittelstreifen. Das Glied 5 kommt also in das mittelste Fach des ganzen Quadrats, die Glieder 2, 4, 6 und 8 aber in die Eckfächer zu stehen. Durch die Stellung der Glieder in den Eckfächern werden die Glieder in den Zwischenfächern bestimmt, so daß 9 zwischen 2 und 4, 7 zwischen 2 und 6, 3 zwischen 4 und 8, und 1 zwischen 6 und 8 zu stehen kommt. Deswegen bleibt in den horizontalen und verticalen Streifen sowohl als längs den Diagonalen immer dieselbe Verbindung von Zahlen, wie auch ihre Stellung sonst sich ändern mag, welches aber für keine wesentliche Veränderung zu rechnen ist.

23. Mit dem Quadrate von 4 verhält es sich schon anders. Die Reihensumme in demselben ist 34, welche auf 86erley Arten aus je vier von den Elementen 1, 2, 3 . . . . 16 sich zusammensetzen läßt, so daß keins derselben wiederhohlt wird. Das magische Quadrat von 4 erfordert nur 10 solcher Zusammensetzungen, von denen vier unter sich kein Element, mit jeder der übrigen sechs aber ein Glied gemeinschaftlich haben müssen. Es läßt sich bey der verhältnißmäßig großen Anzahl möglicher Zusammensetzungen gegen diejenige der erforderlichen erwarten, daß der Forderung auf eine vielfache Weise Genüge geschehen kann. Wirklich hat auch Frenicle, wie oben angeführt ist, 880 verschiedene Anordnungen des magischen Quadrats von 4 geliefert.

24. Bey den Quadraten höherer Seitenzahlen wird die Anzahl der möglichen Veränderungen noch größer. Ein einziges Quadrat von 6, bestehend aus einem innern sechszehnfächerigen magischen Quadrate und einer

magischen Einfassung von 20 Fächern, wie dieses nach (13 und 14) construirte,

1	35	34	30	5	6
33	11	14	25	24	4
8	26	23	12	13	29
28	20	21	18	15	9
10	17	16	19	22	27
31	2	3	7	32	36

verstattet bey denselben Eckzahlen 1, 6, 31, 36 und denselben Gliedern des innern Quadrats 11, 12, 13....26 durch bloße Versetzung der Glieder in den Zwischenfächern der Einfassung und Abänderung des inneren Quadrats an 4055040 Veränderungen. Denn das eingeschlossene Quadrat leitet wenigstens 880 Veränderungen, und jede Seite desselben kann an einen Streifen der Einfassung zweymahl gelegt werden, z. E. die Seite 11, 14, 25, 24 an den Streifen 1:6 so 24, 25, 14, 11. Dies giebt 2. 4. 880 oder 7040 Arten der Verbindung des innern Quadrats mit derselben Einfassung. Nun sind in den Zwischenfächern der Horizontalstreifen der Einfassung 4 Paar Ergänzungsglieder, welche 1. 2. 3. 4 = 24 mahl versetzt werden können. Eben so oft aber können auch die in den Zwischenfächern der Verticalstreifen befindlichen 4 Paar Ergänzungsglieder versetzt werden. Dies giebt bey denselben Eckzahlen 24 . 24 = 576 Veränderungen in der Stellung der Zahlen in den Zwischenfächern der Einfassung. Daher ist die Zahl der Veränderungen des ganzen Quadrats = 576 . 7040 = 4055040.

Läßt man das Eckglied 1 der Einfassung und damit auch des ihm gegenüberliegende, so wie die Glieder des innern Quadrats ungeändert, so kann man die beiden

andern Eckglieder, und die Glieder in den Zwischenfächern der Einfassung auf 21erley Weise verändern. Folglich ist die Zahl der Veränderungen, bey demselben Eckgliede 1 und denselben Gliedern des innern Quadrats 11, 12 .... 26, = 4 055 040 . 21 = 85 155 840. Ändert man auch das Eckglied 1 und die innern Glieder des Quadrats, so wird diese Zahl noch bedeutend vermehrt. Und in dieser großen Menge von Veränderungen sind noch nicht diejenigen begriffen, welche das gewöhnliche magische Quadrat von 6 zuläßt.

25. Von dem magischen Quadrate zur Seitenzahl 7 lassen sich nach de la Hire's Methode, welche die der Inder und von Moschopulos unter sich begreift, 363 916 800 verschiedene Anordnungen finden. Denn bey einer bestimmten Folge der Zahlen in den obersten Horizontalstreifen der beiden Hülfsquadrate sind 4 Folgen der Zahlen in den ersten Verticalstreifen möglich. Jede Anordnung in dem einen Hülfsquadrate läßt sich mit dreyen des andern zu einem magischen Quadrate, worin kein Glied wiederhohlt wird, verbinden. Also entstehen bey derselben Folge der Zahlen in den ersten Horizontalstreifen der beiden Hülfsquadrate 4 . 3 Veränderungen. Die Folge der Zahlen in dem ersten Horizontalstreifen jedes Hülfsquadrats läßt sich aber 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. abändern; daher ist die Zahl der hieraus und aus der verschiedenen Folge der Zahlen in den ersten Verticalstreifen, hervorgehenden Veränderungen

$$(1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7)^2 . 1 . 3 = 304819200.$$

Wird das mittlere Glied der Progression in einem der beiden Hülfsquadrate in der einen oder andern Diagonale wiederhohlt, so ist die Zahl der Veränderungen eines solchen Quadrats 1. 2. 3. 4. 5. 6. 2. Die Zahl der Veränderungen, welche durch Verbindung eines solchen Hülfsquadrats mit einem der vorigen Art entstehen, ist also

$$(1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 .)^2\ 7 . 4 . 2 . 2 = 58060800.$$

Endlich ist die Zahl der Veränderungen, welche durch die

Verbindung der Hülfsquadrate von der letzten Art unter sich hervorgebracht werden,

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)^2 \cdot 2 = 1036800.$$

Die Zahl aller Veränderungen überhaupt ist also

$$304819200 + 58060800 + 1036800 = 363916800,$$

wie angegeben ist. Diese Angabe erstreckt sich aber noch nicht mit auf die Quadrate mit magischen Einfassungen. Jeder Entwurf dieser Art, welcher aus einem innern magischen Quadrate von 9 Fächern und zwey Einfassungen von 16 und 24 Fächern besteht, leidet durch Versetzung der Glieder in den Zwischenfächern der Einfassungen und durch Drehen und Wenden der Quadrate von 9 und 25 Fächern

$$(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2 = 33177600$$

Veränderungen. Setzt man aber das Quadrat von 7 aus einem fünf und zwanzig fächerigen magischen Quadrate mit einer Einfassung gleicher Art von 24 Fächern zusammen, so verstattet jede solche Anordnung, weil das innere Quadrat nach de la Hire's Methode auf 41472 Arten zusammengesetzt werden kann,

$$41472 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)^2 \cdot 8 = 4777574400$$

Veränderungen. Bedenkt man die große Menge der Entwürfe beider Arten, so erregt die ungeheure Menge von Veränderungen allerdings Erstaunen. Mit der Zahl der aus den Elementen 1, 2, 3 . . . 49 zu formirenden, magischen oder nicht magischen Quadrate, welche zwischen $6082 \cdot 10^{59}$ und $6083 \cdot 10^{59}$ fällt, ist sie indeß kaum zu vergleichen.

Noch einige andere Arten magischer Quadrate.

26. Anstatt einer arithmetischen Progression kann auch eine geometrische in die Fächer eines Quadrats so eingetragen werden, daß das Product der Zahlen in den Horizontal- Vertical- und Diagonalreihen dasselbe ist.

Zum Beyspiel.

128	1	32
4	16	64
8	256	2

1	8	16384	8792
32768	4096	2	4
512	1024	128	216
64	32	256	2048

Diese Quadrate entstehen, wenn statt der Glieder 1, 2, 3 . . . der natürlichen arithmetischen Progression, die zugehörigen Glieder einer geometrischen Reihe, in den obigen Beyspielen 1, 2, 4, 8 . . . ., gesetzt werden. Die Gleichheit der Producte beruht auf den Eigenschaften der Logarithmen.

27. Noch kann man die Glieder einer harmonischen Progression in die Fächer eines Quadrats so eintragen, daß die Zahlen in horizontaler, verticaler und diagonaler Richtung harmonisch proportional sind, d. h. daß für je drey nächst auf einander folgenden Glieder a, b, c ist $c = \frac{ab}{2a - b}$. Dergleichen ist das Quadrat

1260	840	630
504	420	360
315	280	252

Diese Quadrate haben gar nichts künstliches. Denn da die reciproken der Glieder einer arithmetischen Progression eine harmonische Progression bilden, so darf man nur die Glieder einer arithmetischen Progression, z. Exempel, 2, 3, 4 . . . . . 10, so in ein Quadrat eintragen, daß die Zahlen in horizontaler, verticaler und diagonaler Richtung stetig arithmetisch proportionirt sind, welches leicht ist. Zum Beyspiel,

2	3	4
5	6	7
8	9	10

Nun suche man zu den Zahlen 2, 3, 4 . . . . . 10 den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus, welcher ist 2520. Die Quotienten desselben durch die Glieder 2, 3, 4, ... 10 geben die in das Quadrat statt dieser zu setzenden Glieder einer harmonischen Progression.

28. Eine eigene Art magischer Quadrate, welche durch Subtraction immer einerley Zahl liefern, findet sich in den Actis Eruditor. 1686. p. 393 von Kochanski beschrieben. Sauveur (Mém. de l'Acad. des Sc. 1710) hat noch das magische Kreuz, das magische Gitter, und den magischen Würfel hinzugethan. In Fränklins sämmtlichen Werken 2 B. S. 307 und folgg. der deutschen Übersetzung kommen ein Paar magische Quadrate von besonderer Einrichtung, auch ein magischer Cirkel vor.

29. Euler hat in der Comm. Acad. Petropol. T. XV. eine schwere, mit der von den magischen Quadraten etwas übereinstimmende Aufgabe aufgelöset. Sie heißt: Es sollen neun in ein Quadrat so zu stellende Zahlen gefunden werden, daß folgende zwölf Bedingungen erfüllt werden:

A, B, C,
D, E, F,
G, H, I,

$$
\begin{array}{ll}
1. & AA + DD + GG = 1. \\
2. & BB + EE + HH = 1. \\
3. & CC + FF + II = 1. \\
4. & AB + DE + GH = 0. \\
5. & AC + DF + GI = 0. \\
6. & BC + EF + HI = 0. \\
7. & AA + BB + CC = 1. \\
8. & DD + EE + FF = 1. \\
9. & GG^{?} + HH + II = 1. \\
10. & AD + BE + CF = 0. \\
11. & AG + BH + CI = 0. \\
12. & DG + EH + FI = 0.
\end{array}
$$

Die Untersuchung ist für die Lehre von den krummen Flächen und Linien von doppelter Krümmung wichtig, wenn man von einem System rechtwinkliger Coordinaten x, y, z zu einem andern der Coordinaten X, Y, Z übergeht, ohne den Anfangspunct zu verändern. In diesem Falle werden nämlich die X, Y, Z durch x, y, z so ausgedrückt

$$
\begin{array}{l}
X = Ax + By + Cz \\
Y = Dx + Ey + Fz \\
Z = Gx + Hy + Iz
\end{array}
$$

und x, y, z durch X, Y, Z auf diese Art

$$
\begin{array}{l}
x = AX + DY + GZ \\
y = BX + EY + HZ \\
z = CX + FY + IZ
\end{array}
$$

und es haben alsdann die angezeigten Relationen nebst noch andern zwischen den neun Größen A, B, C, D, E, F, G, H, I statt Die Aufgabe, wie sie vorgetragen ist, scheint mehr als bestimmt zu seyn, ist aber wirklich eine unbestimmte. Die letzten sechs Gleichungen folgen nämlich aus den ersten sechs. Übrigens dient die Stellung der neun Größen ins Viereck in der That nur zur Versinnlichung der Relationen zwischen denselben.

Quadratische Gleichung ist eine Gleichung vom zweyten Grade. s. Gleichung.

Quadrato-cubische Zahl ist die fünfte Potenz einer Grundzahl, so wie diese die quadrato-cubische Wurzel in Absicht auf die Potenz als Grundzahl ist. S. Potenz, 5.

Quadrato-quadratische Gleichung ist eine Gleichung vom vierten Grade.

Quadrato-quadratische Zahl ist die vierte Potenz einer Grundzahl, welche hinwiederum die eben so genannte Wurzel aus der Potenz ist.

Quadratrix ist eine krumme Linie, die über derselben Axe mit einer gegebenen krummen Linie beschrieben ist, und durch ihre Ordinaten die Flächenräume dieser angiebt. Ihre Ordinaten nemlich verhalten sich wie die zu den Abscissen gehörigen Flächenräume der gegebenen Linie, oder es sind auch die Quadrate ihrer Ordinaten, oder die Rechtecke aus der Abscisse und Ordinate, den Flächenräumen der vorgegebenen Linie gleich. Da man durch die Integralrechnung den Inhalt der Figuren bequemer und faßlicher angeben kann, als durch die Construction einer zweyten Linie, so macht man jetzt kaum Gebrauch von dieser Art zu quadriren.

1. Die älteste Quadratrix ist die des Dinostratus, eines Zeitgenossen des Plato. Es ist (Fig. 2.) AB der Quadrant eines Kreises, der mit dem Halbmesser CA beschrieben ist, und M ein Punct desselben. Auf AC sey ein Punct P so genommen, daß $AB : AM = AC : AP$ sey. In diesem Puncte P werde auf AC die senkrechte PN errichtet, welche den Halbmesser CM in N schneidet, so ist N ein Punct der Quadratrix.

2. Man ziehe NQ senkrecht auf den Halbmesser CB, so folgt aus der angenommenen Proportion, daß $AB : BM = AC : NQ$ ist. Nun setze man AC oder $BC = a$, $CQ = x$, $NQ = y$; der Winkel BCM verhalte sich zu zwey Rechten, wie $\varphi : \pi$, so ist $y = \frac{2\varphi}{\pi} a$,

die Gleichung für die Quadratrix. Auch ist $y = x \tan \varphi$; also $x = \frac{2\varphi}{\pi \tan \varphi} a$.

Für den Punct D, wo die Quadratrix den Halbmesser BC schneidet, ist $\varphi = 0$ und $\tan \varphi = 0$, also $x = \frac{0}{0} a$. Entwickelt man $\tan \varphi$ in eine Reihe $\varphi + A\varphi^3 + B\varphi^5 +$ etc. (Cyklometrie, 14.), so ist $x = \frac{2a}{\pi(1 + A\varphi^2 + B\varphi^4 + \text{etc.})}$, welcher Werth für $\varphi = 0$ wird $CD = \frac{2a}{\pi}$. Die Gränze von $\frac{\varphi}{\tan \varphi}$ welche $= 1$ ist, wird in diesem Falle für den Quotienten gesetzt.

3. Die Curve ist nicht auf den Bogen AD eingeschränkt. Sie erstreckt sich auf der andern Seite von AC ins Unendliche fort, indem für $\varphi = \pi$, x unendlich groß, und $y = 2a$ wird. Für negative φ von 0 bis π ist die Curve unterhalb der Abscissenlinie BZ dieselbe wie oberhalb. Für die Winkel φ von π bis 2π kommt die Curve von dem unendlich weit entfernten Puncte auf der Asymptote, deren Abstand von der Abscissenlinie $= 2a$ ist, her zurück, und erstreckt sich wieder ins Unendliche auf der Seite CX, wo die Gränze von y ist $4a$. Solcher Hin- und Hergänge giebt es unendlich viele, jeden mit einer Asymptote der Abscissenlinie parallel, in dem Abstande $2a$ von einander, sowohl auf der einen Seite der Abscissenlinie als auf der andern, so wie eine Spirale, insbesondere die archimedische, auch unzählig viele Umgänge macht.

4. Es sey NT die in N berührende, welche die CB in T schneide, so ist $CT = \pi \cdot \frac{CN^2}{2CB}$. — Denn es ist die Subtangente $QT = -\frac{ydz}{dy}$ (berührende Linie

nie, 12,15) und $CT = \frac{xdy - ydx}{dy}$. Da $\frac{y}{x} = tg\,\varphi$ ist, so ist $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$ (Differentialformeln, 38.) Daraus ist

$$CT = \frac{xx}{\cos\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{dy} = CN^2 \cdot \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\pi}{2a} \cdot CN^2 = \frac{CN^2}{CD},$$

also die dritte Proportionale zu der Basis der Quadratrix CD und dem Radius vector CN.

5. In D ist die Subtangente = CD, also die berührende senkrecht auf die Axe; in A ist sie $= \frac{1}{2}\pi a$, dem Quadranten. Für $\varphi = \pi$, wo CN unendlich groß ist, ist sie auch unendlich.

6. Da die Ordinaten NQ sich wie die zugehörigen Bogen verhalten, und der Quadrant des Kreises $= \frac{CB^2}{CD}$ ist, so kann durch diese Linie, so fern man sie als gezeichnet annimmt, der Kreis und jeder Sector desselben quadrirt werden. Daher hat diese Linie bey den Alten ihren Namen, τετραγωνιζουσα, quadratrix, erhalten. Sie dient auch zur Theilung eines Kreisbogens AM oder Winkels ACM in jede Anzahl von Theilen durch die Theilung der zugehörigen Abscisse AP. Es läßt sich dieses auch durch Theilung der Ordinate NQ bewerkstelligen.

7. Pappus, der sich in dem 4ten Buche seiner Sammlung, Satz 25 ff. mit dieser Linie beschäftigt, erinnert mit Recht, daß das gesuchte dabey als bekannt angenommen wird. Man müsse ja, um jeden Punct N der krummen Linie zu bestimmen, schon das Verhältniß des Umfanges zum Halbmesser wissen. Die Linie sey eine mechanische (μηχανικωτερα) und in der Ausübung den Künstlern (μηχανικοις) zu vielen Aufga-

ben nützlich. Man kann nämlich durch fortgesetzte Hal- birungen des Quadranten AB und des Halbmessers AC viele Puncte wie N finden, und durch deren Hülfe die krumme Linie zur Anwendung genau genug zeichnen. Doch auch diese Mühe ersparen unsere Winkelinstru- mente. Pappus zeigt noch, wie sich verschiedene Auf- gaben durch diese Linie auflösen lassen. — Der griechi- sche Text von S. 25 — 29 ist aus einer Vaticanischen Handschrift abgedruckt in des Josephi Torelli Geo- metricis, Veronae 1769.

8. Den Satz, daß AB : CB = CB : CD ist, erweiset Pappus, nach Art der Alten, dadurch, daß er zeigt, CD könne weder größer noch kleiner seyn als die dritte Proportionale zu AB und CB. Näm- lich es sey nicht AB : CB = CB : CD, so ist die dritte Proportionale zu AB und CB entweder größer oder kleiner als CD. Sie sey zuerst größer und = CE. Man beschreibe mit dem Halbmesser CE einen Kreis- bogen, welcher die Quadratrix irgendwo in N schneide, und ziehe NQ senkrecht auf CB, so ist AB : CB = BM : QN. Nun soll auch seyn AB : CB = CB : CE, folglich ist CB : CE = BM : QN. Wegen der con- centrischen Bogen ist CB : CE = BM : EN. Folg- lich wäre der Bogen EN gleich der senkrechten NQ, welches unmöglich ist. Also ist CD nicht kleiner als jene dritte Proportionale. Auf ähnliche Art wird er- wiesen, daß CD nicht größer ist. Folglich ist CD ihr gleich. — Wie aber dieser Satz gefunden sey, sagt Pappus nicht.

9. Tschirnhausen hat die Quadratrix für den Kreis abgeändert. Es bleibt AB : AM = AC : AP, aber er zieht durch M eine parallele mit AC, welche durch ihren Durchschnitt mit der auf AC in P senkrech- ten einen Punct seiner Quadratrix angiebt.

10. Newton nennt Quadratrices überhaupt die Linien, deren Ordinaten NQ (Fig. 2) eine Func-

tion des zugehörigen Kreisbogens sind. Opuscula T. I. p. 102. In einem Briefe an Oldenburg, ibid. p. 318. giebt er die Abscisse CQ durch die Ordinate NQ mittelst einer Reihe an, deren Grund aus Cyklometrie, 16. sich gleich ergiebt.

Joh. Bernoulli bemerkt, daß die Cykloide dient, Kreissegmente leicht in einem gegebenen Verhältnisse zu theilen. Operum T. I p 199.

Dieser Geometer giebt noch eine Construction an, eine gerade Linie in einen Kreisbogen zu verwandeln, durch welche zugleich Puncte einer Quadratrix der Alten gefunden werden. Opp. T. I. p. 446. Davon in dem folgenden Artikel, Quadratur.

Wallis wendet auf die Quadratrix der Alten die Lehre von der Zusammensetzung zweyer Bewegungen an. Opp. T. II. p. 663. Er irrt sich aber, daß er die ganze Quadratrix aus vier solchen Bogen, wie AD, in den vier Quadranten des Kreises zusammensetzt.

Montucla schränkt den ganzen Lauf der Quadratrix auf den Raum zwischen zwey Asymptoten ein. Gesch. der Mathematik, II. S. 78. Ausführlich handelt von dieser Linie, besonders ihren Asymptoten, Kästner in den geom. Samml. II. S. 218 — 241.

Quadratur (Tetragonismus) ist die Verwandlung einer krummlinichten ebenen Fläche in eine gleich große geradlinichte Figur, insbesondere in ein gleich großes Quadrat. Bisweilen heißt auch Quadratur die Verwandlung einer geradlinichten Figur in ein Quadrat. — Auch Complanation einer krummen Fläche wird Quadratur genannt.

1. Archimedes war der erste welcher krummlinichte Figuren quadrirte. Zu der Quadratur des Kreises that er zwar nur den ersten Schritt, allein er quadrirte die Parabel, wie in dem Artikel, Exhaustions-Methode, Th. II. S. 167. ff. erzählt ist; er verglich die Fläche einer Ellipse mit einer Kreisfläche (von Ko-

noiden und Sphäroiden, 5. 6. Satz), auch die Flächenräume an seiner Spirale für jeden Umlauf des Halbmessers mit einer Kreisfläche, (von den Spiralen, 14. ff. S.).

Vor Archimedes hatten zwey griechische Geometer, Bryson und Antipho, die Kreisfläche zu messen gesucht, jener auf eine ganz irrige Art, dieser auf eine bessere, durch die Berechnung eines kleinen Sectors, den er als geradlinicht ansah.

2. Cavaleri, dessen Methode des untheilbaren im ersten Theile erklärt ist, kam damit in dem Werke, worin er sie aus einander setzt, in Beziehung auf Flächenräume nicht weiter als bis zu der Quadratur der Parabel und der Spirale, bey der letztern durch eine Vergleichung mit einem parabolischen Raume. Aber in den exercitationibus geometricis, die 1647 herausgekommen sind, giebt er die Quadratur höherer Parabeln, von der Form $ay^n = b^n x$. Sein Ordensgenosse, Stephanus de Angelis, leitete daraus noch manche Sätze die Quadratur dieser Linien betreffend her, und zeigte auch, wie ihre Cubirung und die Lage des Schwerpunctes gefunden werden. De infinitis parabolis, Venetiis, 1659. — Fermat quadrirte die apollonische Parabel auf eine sinnreiche Art. Er nahm die Abscissen in geometrischer Progression, wodurch die Ordinaten auch in einer solchen, etwas verschiedenen, stehen, und die Rechtecke aus den Ordinaten in die zugehörigen Unterschiede der Abscissen, ebenfalls eine geometrische Progression ausmachen. Werden diese Unterschiede ohne Ende vermindert, so ist eine unendliche geometrische Reihe zu summiren, deren Summe die Fläche der Parabel giebt. Auf ähnliche Art quadrirte er eine Parabel, deren Gleichung ist $b^3 x^2 = a^2 y^3$. Auch erdachte er eine Spirale, an welcher die Winkel, welche der sich drehende Radius beschreibt, sich wie die Quadrate der Radiorum verhalten, und quadrirte diese Spirale. — Roberval, dem Fermat die Aufgabe, diese Curve zu quadriren, vorgelegt

hatte, kam damit auch zu Stande. Descartes fand ebenfalls ihre Quadratur. Roberval berechnete die Flächenräume einer Curve, die man Limaçon nannte, s. Th. I. S. 543. Er bestimmte auch den Flächenraum auf einer Cylinderfläche, der durch die Herumführung der Spitze eines Zirkels darauf abgeschnitten wird, wenn der Zirkel den Durchmesser des Cylinders bespannt. Merkwürdig ist es, daß er auch die Cykloiden jeder Art quadrirte, nämlich den ganzen zwischen der Basis und dem Scheitel enthaltenen Raum. Slüse (Slusius) quadrirte die krummen Linien, deren Gleichung ist $a^m y^n = x^m (a - x)^n$, in dem Anhange zu seinem Mesolabum betitelt Miscellanea Cap. II. Auch quadrirt er Spiralen, deren Gleichung auf eine gleiche Art allgemein gemacht wird. Cap. III. Torricelli fand für sich die Fläche der gemeinen Cykloide, Pascal sogar die Abschnitte derselben. — Gregorius von St. Vincent erdachte sehr viele Arten die Parabel zu quadriren. Niemand unter den ausgezeichneten Geometern hat die Quadratur des Kreises eifriger gesucht als dieser, wiewohl sie auch ihm mislang. Davon nachher.

3. Huygens fand den Schwerpunct eines hyperbolischen und elliptischen Abschnitts aus, und war dadurch im Stande, einen solchen Abschnitt mit einem über der Chorde eingeschriebenen Dreyeck zu vergleichen. Zu gleicher Zeit mit ihm, im Jahre 1651, leitete auch Lalouere die Quadratur des Kreises und der Hyperbel aus der Bestimmung ihres Schwerpunctes her, und ahmte dabey den statischen Beweis des Archimedes für die Parabel nach. Allein Huygens griff die Sache gerade zu an, wiewol seine Deduction noch zu weitläuftig ist. Ferner fand er, daß der unendlich lange Flächenraum zwischen der Cissoide, ihrer Asymptote und dem Durchmesser des erzeugenden Halbkreises dreymahl so groß ist als die Fläche dieses Halbkreises, (Opera reliqua, T. I. p. 226.). In einem Anhange zu der Abhandlung über die Ursache der Schwere, 1690,

zeigte er unter andern Sätzen über die Logistica auch die Vergleichung ihrer Fläche zwischen irgend zwey Ordinaten. Sogar quadrirte Huygens eine Linie vom dritten Grade, die blattähnliche, Folium benannte, von welcher unten (109) gehandelt wird. Er fand die Area der Ovale, ferner die Gleichheit des Flächenraums derselben, und desjenigen zwischen den beiden unendlichen Zweigen der Curve und der Asymptote, endlich, daß der Inhalt eines Abschnittes durch ein einziges Glied ausgedruckt werde. Opp. var. p. 514.

4. Jacob Gregory gab 1667 zu Padua eine sehr nett geschriebene Abhandlung heraus: Vera circuli et hyperbolae quadratura, worin er zu zeigen suchte, daß diese durch Annäherung nur immer genauer, aber nicht vollkommen gefunden werden könne. Er findet eine gut convergirende Reihe von ordentlichen Vielecken, die theils um den Kreis, theils in demselben beschrieben werden. Durch 13 solcher Paare berechnet er den Umfang bis auf die 15te Decimalstelle nach den Einern. Für die Hyperbel ist seine Methode der für den Kreis ganz gleichförmig. Auch findet er dadurch zuerst den log. nat. 10, und dann den log. 2 mittelst des log. $\left(1 + \frac{24}{1000}\right)$ oder log. $\frac{1024}{1000}$, wo $1024 = 2^{10}$ ist. Nun giebt er für jede Primzahl von 3 bis 97 zwey große Zahlen an, die nur um 1 verschieden, und Producte von Primzahlen sind, deren Logarithmen, bis auf eine derselben schon gefunden seyn, daher aus dem leicht zu findenden $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ oder $\log \frac{n+1}{n}$, wenn der Logarithmus von $n + 1$ oder von n schon bekannt ist, der Logarithmus der andern Zahl sogleich sich ergiebt, dadurch auch der verlangte Logarithmus der noch übrigen Primzahl, wie in dem Artikel, Logarithmus, gezeigt ist. Allein seine Reihe von Polygonen ist doch müh-

sam zu berechnen. In den Exercitationibus geometricis, die 1668 zu London herauskamen, hat er eine mit der Reihe, $2\left(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right)$ für $\log \frac{1+y}{1-y}$ übereinstimmende angegeben.

5. Die Arithmetica infinitorum von Wallis (vom Jahre 1655) war ein wichtiger Fortschritt in der höhern Mathematik. Sie ist eine Summirungsmethode und in sofern eine Erweiterung der Cavalerischen. Wallis gebrauchte die Induction auf eine sehr geschickte Art, und wußte das Gesetz der Analogie gut anzuwenden, da er z. B. die Quotienten $\frac{1}{x^m}$ als Multiplicatoren, x^{-m}, behandelte, und auf sie das anwandte, was er für Potenzen mit positiven Exponenten gefunden hatte. Auch auf gebrochne Exponenten dehnte er dieses aus, und fand überhaupt den Inhalt der Figuren, in welchen die Ordinate sich wie eine Potenz irgend einer Art von der Abscisse verhält. In dem Falle, da der Exponent größer als die Einheit ist, geräth er auf Flächenräume, die negativ sind, welche er daher für größer als unendlich erklärt, weil das Verhältniß $n:0$ eine unendlich große Größe in Beziehung auf die mit n correspondirende Größe andeutet, also $n:-m$ eine noch größere (Arith. infin. Prop. 104). Er hat nicht beachtet, daß eine Constante zu der negativen Größe kommen muß, und daß man, wenn diese unendlich groß ist, das Complement der Area zu $x-a$ (wo a eine gegebene Abscisse ist) statt der Area zu x suchen müsse. In einem Briefe an Huygens (Opp T. II. p. 545) zeigt er, wie durch seine Methode die von letzterm gefundene Quadratur der Cissoide auch bestimmt wird. Die Cykloide zu quadriren zeichnet er erstlich innerhalb derselben und des erzeugenden Kreises, in jener Trapezia, in diesem Dreyecke, von welchem jene mehr

als dreymahl so groß sind als die correspondirenden Dreyecke. Dann zeichnet er auch Trapezia und Dreyecke, die über die Cykloide und den Kreis hinausreichen, und zeigt, daß jedes der Trapezien kleiner ist als das dreyfache des zugehörigen Dreyecks. Daher ist die Cykloide dreymahl größer als die Kreisfläche. Die Gränzen der eingezeichneten und umschriebenen Figuren fallen in den Umfang der Cykloide und des Kreises, daher ist für die Fläche derselben das Verhältniß weder größer noch kleiner als 3 : 1, d. i., es ist 3 : 1 selbst.

6. Von Brounckers Reihe für die Hyperbel s. den davon handelnden Artikel; von Mercators Quadratur der Hyperbel s. Logarithmus 139 — 142.

7 Alle die bis zu Newtons Zeit gebrauchten sinnreichen, aber auch mühsamen besondern Methoden, den Flächenraum einer Figur zu finden, wurden unnöthig, als dieser scharfsinnige Geometer seine Analysis des Unendlichen erfand, und Leibnitz noch früher als Newton seine Differentialrechnung und deren Anwendung auf die Bestimmung der Flächenräume einer Curve bekannt machte.

8. Es sey ZCMZ (Fig. 3.) irgend eine Curve, BC, eine gegebene Ordinate derselben für die Abscisse AB und PM irgend eine andere Ordinale zu der Abcisse AP. Die Coordinaten seyen rechtwinklichte. Es sey $AP = x$; $PM = y$, so ist die Fläche BCMP $= \int y dx$, wo das Integral so genommen werden muß, daß es $= 0$ sey, wenn $x = AB$ und $y = BC$ ist. Diese Bedingung bestimmt die Constante.

Denn man ziehe noch eine Ordinate QN. Diese sey gleich $y + \Delta y$, so wie die zugehörige Abscisse $AQ = x + \Delta x$. Durch M ziehe man Mn parallel mit AQ bis an NQ, und durch N die Nm parallel mit derselben bis an MP. Die Area BCMP sey $= Z$, so ist $\Delta Z > y \Delta x$, und $\Delta Z < (y + \Delta y) \Delta x$,

oder $\frac{\Delta Z}{\Delta x} > y$; $\frac{\Delta Z}{\Delta x} < y + \Delta y$. Der Quotient hängt also sowohl von der Größe der Differenz Δy als von der Ordinate y ab. So fern der Quotient von der Größe der Differenz unabhängig seyn soll, ist derselbe $= y$, das heißt, $\frac{dZ}{dx} = y$, oder $dZ = ydx$, und $Z = \int ydx$. Wenn die Veränderungen von x und Z ungleichnamig sind, so ist $dZ = - ydx$. Das Integral $\int ydx$, in welchem der Werth von x und der zugehörigen Ordinate y unbestimmt gelassen wird, heißt die **unbestimmte Quadratur**, im Gegensatz der **bestimmten** für zwey bestimmte Werthe von x und y, bey welchen die Area anfängt und sich endigt, wie die Area BCMP zwischen den Ordinaten BC, PM, wenn die Abscissen AB, AP bestimmte Werthe erhalten.

9. In der Differentialformel ydx hat man aus der Gleichung zwischen x und y entweder y durch x auszudrucken, oder das Differential durch dy und eine Function von y anzugeben. Alsdann ist die Aufgabe von der Quadratur blos eine Sache der Integralrechnung.

In den erstern Zeiten nach der Erfindung der Integralrechnung gebrauchte man die Quadratur der krummen Linien als ein Mittel zur Integration. Man suchte die Curve zu construiren, deren Ordinate der Differentialfactor in der Differentialformel ydx ist. So mochte man für jeden Werth von x die zugehörige Area messen, welche das $\int ydx$ angab. Allein diese Methode ist zu mühsam und zu wenig genau, dagegen die Rechnung leichter und zuverlässig ist. Sie wird deshalb schon lange nicht mehr gebraucht, und die Quadratur einer Curve wird blos ihretwegen selbst durch Integrirung gefunden. Die Integralformeln werden

übrigens dadurch deutlicher, wenn man sie als Quadraturen einer Curve betrachtet.

10. Sind die Coordinaten nicht senkrecht auf einander, so hat man die Formel ydx noch mit dem Sinus des Ordinatenwinkels zu multipliciren.

11. Wenn die Ordinaten aus einem Puncte P (Fig. 4.) gezogen werden, so sey die Ordinate durch den Anfangspunct, $PA = a$, eine unbestimmte, $PM = u$, $APM = \varphi$, $PN = u + \Delta u$, $APN = \varphi + \Delta\varphi$. Man beschreibe durch M und N aus P die Kreisbogen Mn, Nm, so ist $Mn = u\Delta\varphi$; $Nn = (u + \Delta u)\Delta\varphi$, und der Sector $MPn = \frac{1}{2} uu\Delta\varphi$, Sector $NPm = \frac{1}{2}(u + \Delta u)^2 \Delta\varphi$. Die Area APM sey $= Z$, so ist Area $MPN + \Delta Z$. Nun ist $\frac{\Delta Z}{\Delta\varphi} > \frac{1}{2} uu$, und $\frac{\Delta Z}{\Delta\varphi} < \frac{1}{2}(u + \Delta u)^2$ Der Quotient, so fern derselbe von der Quantität der Differenzen Δu und $\Delta\varphi$ unabhängig seyn soll, ist $= \frac{1}{2} uu$, das ist $\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{1}{2} uu$ und $dZ = \frac{1}{2} uud\varphi$, also $Z = \frac{1}{2} \int uud\varphi$. Hier muß ebenfalls entweder u durch eine Function von φ oder $d\varphi$ durch du mit einer Function von u ausgedruckt werden. Beyspiele s. unten, 76 — 79; 86. 105.

12. Ehe wir zu diesen Differentialformeln Beyspiele nehmen, wird von der Quadratur des Kreises, der berüchtigten Klippe, woran so manche Hoffnung etwas großes zu leisten, gescheitert ist, etwas ausführlicher zu reden seyn. Montúcla hat in einer besondern Schrift: Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, à Paris 1754, die Versuche, diese Aufgabe aufzulösen, erzählt. Ich habe dieses Buch nicht erhalten können.

Quadratur des Kreises.

13. Die Quadratur des Kreises hängt von der Rectification desselben ab. Denn Archimedes hat bewiesen, daß die Kreisfläche gleich ist einem Dreyeck, dessen Grundlinie dem Umfange des Kreises und die Höhe dem Halbmesser gleich ist.

14. Der Beweis des Archimedes gründet sich darauf, daß in einem Kreise ein gleichseitiges Vieleck gezeichnet werden kann, dessen Unterschied von der Kreisfläche kleiner als eine gegebene Größe ist, und daß um den Kreis ein gleichseitiges Vieleck beschrieben werden kann, welches den Kreis um weniger als eine gegebene Größe übertrifft. Denn es sey der Kreis $= C$, das angegebene Dreyeck $= D$. Ist dieses nicht dem Kreise gleich, so ist es entweder kleiner oder größer. Ist es kleiner, so sey der Unterschied von dem Kreise $= U$, also $C = D + U$. Man beschreibe nun in dem Kreise ein Vieleck, V, dessen Unterschied von dem Kreise kleiner als U sey, oder $= U - u$, so ist $C = V + U - u$, also ist $D + U = V + U - u$, oder $D = V - u$, das ist, D ist kleiner als V. Nun ist V gleich einem Dreyeck, dessen Grundlinie der Umfang des Vielecks, und die Höhe die senkrechte von dem Mittelpuncte auf die Seite des Vielecks ist. Beides ist kleiner, als an dem Dreyeck D angenommen ist. Es ist also V kleiner als D, welches der vorigen Folgerung widerspricht. Folglich ist der Kreis nicht größer als das angenommene Dreyeck.

Zweytens sey, wenn es möglich ist, der Kreis kleiner als das Dreyeck D, oder $C + U = D$. Man beschreibe um den Kreis ein gleichseitiges Vieleck V, dessen Unterschied von dem Kreise sey $U - u$, so ist $C + U - u = V$, das ist $D - u = V$. Aber V ist gleich einem Dreyeck, dessen Grundlinie der Umfang des Vielecks und die Höhe der Halbmesser des Kreises ist, also größer als das Dreyeck D, welchem die vori-

ge Folgerung widerspricht. Folglich ist der Kreis nicht kleiner als das Dreyeck. Da derselbe nun auch nicht größer ist, so ist der Kreis so groß als das angegebene Dreyeck.

15. Der Beweis des vorher gebrauchten Satzes ist dieser. Es sey AB (Fig. 5.) die Seite eines gleichseitigen Vielecks in einem Kreise um den Mittelpunct C. Man halbire den Bogen AB in D, und ziehe AD, BD, dann durch D eine berührende EF, auch an A und B die berührenden AH, BH, welche die EF in E, F treffen. Das Dreyeck ADB ist größer als die Hälfte des Trapezium AEFB, weil es die Hälfte des Rechtecks über AB mit der Höhe DG ist. Es ist also noch vielmehr größer als die Hälfte des Abschnittes ADB, welcher kleiner als das Trapezium ist. Folglich ist seine Ergänzung zum ganzen Abschnitte ADB, d. i., die beiden gleichen Abschnitte über AD und DB zusammen kleiner als die Hälfte des Abschnittes ADB. Nun ist AD oder DB die Seite des gleichseitigen Vielecks im Kreise, welches doppelt so viel Seiten hat, als das, dessen Seite AB ist. Bezeichnet man jenes Vieleck durch P', dieses durch P, den Kreis durch C, so ist, wenn n die Seitenzahl des Vielecks P anzeigt, $C - P = n \times$ Segm. ADB und $C - P' = 2n \times$ Segm. AeD $= n$ (Segm. AeD + Segm. DfB) folglich $C - P' < \frac{1}{2}(C - P)$.

Also wird durch Verdoppelung der Seitenzahl der Unterschied zwischen dem Kreise und dem eingeschriebenen Vieleck um mehr als die Hälfte vermindert. Folglich kommt man durch fortgesetzte Verdoppelung der Vieleckseitenzahl nach dem, was Euklides im 10ten B. 1. S. erwiesen hat, einmahl auf ein Vieleck, das von dem Kreise um weniger als eine gegebene Größe verschieden ist.

Die in A und B berührenden schneiden sich in

H, so sind AH, BH die Hälfte der Seiten eines gleichseitigen umschriebenen Vielecks, und das Trilineum zwischen AH, BH und dem Kreisbogen ADB ist der sovielte Theil des ganzen Unterschiedes zwischen dem Vielecke und der Kreisfläche als die Einheit von der Zahl der Seiten ist. Zieht man durch D (die Mitte von ADB) die berührende EDF, welche AH und BH in E, F schneidet, so ist, wegen der gleichen Dreyecke CAE, CDE, AE = ED, und eben so BF = DF, und diese Linien sind die halben Seiten des äußern Vielecks von doppelt so viel Seiten als das mit den Seiten 2 AH oder 2 BH. Nun ist HE größer als ED, das ist als AE, daher das Dreyeck HDE größer als AED, also auch größer als die Hälfte des Dreyecks AHD; mithin das Dreyeck HEF größer als das Dreyeck AHD oder als die Hälfte des Vierecks AHBD, folglich um so mehr größer als die Hälfte des Trilineums AHBDA, welches kleiner ist als das Viereck. Daher ist die Ergänzung des Dreyecks HEF zu dem ganzen Trilineum AHBDA, d. i., die beiden gleichen Trilinea AEDeA und DFBfD zusammengenommen kleiner als die Hälfte des Trilineums AHBDA. Hieraus folgt auf ähnliche Art, wie vorhin, daß durch Verdoppelung der Seitenzahl des umschriebenen Vielecks der Überschuß des Vielecks über die Kreisfläche um mehr als um die Hälfte vermindert wird. Demnach kann ein umschriebenes Vieleck sich dem Kreise so sehr nähern, daß der Unterschied kleiner wird, als irgend eine gegebene Größe.

Wegen des ersten dieser beiden Sätze beruft Archimedes sich auf die Elemente, das ist Euklides XII. 2. Den zweyten Satz hat er in dem ersten Buche über Kugel und Cylinder, Satz 7. bewiesen.

16. Die Fläche eines Kreises verhält sich zu dem Quadrate seines Durchmessers, wie sein Umfang zum Vierfachen seines Durchmessers. — Denn es sey der Durchmesser = d, die Peripherie = p, so ist der

Kreis gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie der Umfang und die Höhe der halbe Halbmesser oder der vierte Theil des Durchmessers ist, weil das Dreyeck, dem der Kreis gleich ist, so groß ist. Es verhält sich also der Kreis zu dem Quadrate des Durchmessers zusammengesetzt wie p : d, und $\frac{1}{4}$ d : d (oder d : 4d) das ist wie p : 4d.

17. Die Umfänge der Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser oder Halbmesser; und die Flächen der Kreise wie die Quadrate der Durchmesser oder der Halbmesser. — Denn man beschreibe durch fortgesetzte Halbirungen der Bogen gleicher Winkel in beiden Kreisen zwey gleichseitige Vielecke von gleichviel Seiten, so verhalten sich die Umfänge dieser Figuren, da sie ähnliche sind, wie die Seiten oder wie die Durchmesser, und die Flächenräume derselben wie die Quadrate der Seiten oder der Durchmesser. Diese Verhältnisse bleiben, wie groß auch die Anzahl der Seiten genommen werden mag, und gelten daher auch von den Gränzen der Vielecke, das ist von den Umfängen und den Flächenräumen der Kreise.

Einen Beweis von der Form, wie in (14) giebt Hauber in seiner deutschen Ausgabe von Archimedes Schrift über Kugel und Cylinder in dem Anhange von dessen Kreismessung, S. 102. Man kann auch über das Verfahren Euklids und Archimeds in Betreff der Kreismessung zwey akademische Schriften von Pfleiderer de Dimensione Circuli vergleichen.

18. Den Satz, daß die Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, hat Euklides so erwiesen, daß er zeigt, daß das Verhältniß kein anderes, weder größeres noch kleineres, seyn könne, XII. 2. Geht man von diesem Satze aus, so folgt, daß die Kreisumfänge sich wie die Durchmesser verhalten. Denn die zwey Kreisflächen seyn C, c; ihre Durch-

messer D, d, Umfänge P, p, so ist $C : D^2 = P : 4D$, und $c : d^2 = p : 4d$ (16). Da $C : c = D^2 : d^2$ ist, so ist $C : D^2 = c : d^2$, also $P : 4D = p : 4d$ oder $P : p = D : d$.

19. Ein Kreisausschnitt (Sector) ist gleich einem rechtwinkligen Dreyeck, von dessen Seiten um den rechten Winkel die eine dem Halbmesser des Kreises, die andere der Länge des Bogens gleich ist. — Denn der Sector verhält sich zur Kreisfläche wie der zugehörige Bogen zum Umfange.

20. Die Ringfläche zwischen zwey concentrischen Kreisen ist gleich einem Kreise, dessen Halbmesser die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Summe und dem Unterschiede der Halbmesser der beiden Kreise ist, s. **Armilla.**

Oder: die Durchmesser der beiden Kreise seyn D, d, die Umfänge P, p; der Durchmesser des Kreises, welcher der Ringfläche gleich ist, sey d^1, Umfang p^1. Nun ist, wenn $P.D$, $p.d$, $p^1 d^1$ die Rechtecke von den bezeichneten Linien bedeuten, $P.D : p.d = D^2 : d^2$, (weil $P : p = D : d$ ist), also $P.D - p.d : P.D = D^2 - d^2 : D^2$. Ferner ist $P.D : p^1.d^1 = D^2 : d^1.d^1$. Also ist $P.D - p.d : p^1.d^1 = D^2 - d^2 : d^1 d^1$. Sollen die Ringfläche und der Kreis mit dem Durchmesser d^1 gleich groß seyn, so ist $P.D - p.d = p^1.d^1$, also auch $D^2 - d^2 = d^1 d^1$. Nun ist $D^2 - d^2 = (D + d)(D - d)$ zufolge Eucl. II. 6. also $d^1 d^1 = (D + d)(D - d)$. Das Quadrat einer mittleren Proportionale ist gleich dem Rechteck von den beiden äußern (Eucl. IV. 14.) Folglich ist der gesuchte Durchmesser die mittlere Proportionale zwischen $D + d$ und $D - d$.

21. Es sey π die halbe Peripherie für den Halbmesser $= 1$, so ist die Peripherie für den Halbmesser $a = 2\pi a$; die Kreisfläche $= \pi aa$. Der Bogen ei-

nes Sectors mit dem Halbmesser $= 1$ sey $= \varphi$, so ist der Bogen für den Halbmesser a zu demselben Winkel $= a\varphi$, und der Sector $= \frac{1}{2} aa\varphi$. Da die Winkel den Bogen, bey demselben Halbmesser, proportional sind, so kann man unter π und φ auch die zugehörigen Winkel, nämlich zwey Rechte und den zu den Bogen gehörigen verstehen, wenn Verhältnisse gebraucht werden.

22. Ein anderer Sector mit dem Halbmesser b und Winkel ω ist $= \frac{1}{2} bb\omega$. Ist dieser dem Sector $\frac{1}{2} aa\varphi$ gleich, so ist $\varphi : \omega = bb : aa$.

23. Sind die Bogen $a\varphi$, $b\omega$ gleich, so ist $\varphi : \omega = b : a$.

24. Wie der Umfang eines Kreises, so genau als es verlangt wird, gefunden werden könne, ist in dem Artikel, Cyklometrie, gewiesen. Da das Gesetz, nach welchem die Glieder der verschiedenen Reihen, welche man zu diesem Zwecke anwenden kann, offenbar ist, so kann man mit Recht sagen, daß die Quadratur des Kreises im analytischen Sinne gefunden sey. Eine geometrische Construction ist freylich noch nicht entdeckt, und scheint schwerlich gefunden werden zu können.

25. Die successive Verdoppelung der Seitenzahl eines gleichseitigen innern und äußern Vielecks im Kreise führt auf folgende Annäherung zu der Fläche eines Kreises.

Es seyn A, B, C, D, etc. die Flächen der eingeschriebenen Vielecke von n, 2n, 4n, 8n . . . Seiten, und P, Q, R, S, etc. die Flächen der umschriebenen Vielecke von n, 2n, 4n, 8n . . . . Seiten, für den Halbmesser $= r$. Es ist:

A

$A : B = B : P$ und $P + B : 2B = B : Q$,
$B : C = C : Q$ „ $Q + C : 2Q = C : R$,
$C : D = D : R$ „ $R + D : 2R = D : S$.
u. s. f.

Die innern Vielecke von n und 2n Seiten mit dem äußern von n Seiten sind in stetiger geometrischen Proportion; die äußern Vielecke von n und 2n Seiten mit dem innern von 2n Seiten sind in stetiger harmonischen Proportion.

Denn es sey der Centriwinkel der Vielecke A und P, nämlich $\frac{2\pi}{n} = \alpha$, so ist

$$A = \frac{1}{2} nr^2 \sin \alpha; \quad B = nr^2 \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

$$P = nr^2 \tang \frac{1}{2} \alpha; \quad Q = 2nr^2 \tang \frac{1}{4} \alpha.$$

Da $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha$, so ist $A : B = \cos. \frac{1}{2} \alpha : 1$. Auch ist $B : P = \cos \frac{1}{2} \alpha : 1$, folglich ist $A : B = B : P$.

Ferner ist $\tang \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ (Goniometrie, 38.) also ist $2A : P = 1 + \cos \alpha : 1$, und daher auch $2B : Q = 1 + \cos \frac{1}{2} \alpha : 1$.

Nun ist auch $P + B : P = 1 + \cos \frac{1}{2} \alpha : 1$, also ist $P + B : P = 2B : Q$, oder $P + B : 2P = B : Q$ Die folgenden Proportionen sind dieselben mit den beiden hier gefundenen, da nur die Anzahl der Seiten successiv verdoppelt wird.

E

26. Die geometrische Betrachtung zeigt diese Proportio nen noch augenscheinlicher. Es sey (F. 5.) AB die Seite eine eingeschriebenen Vielecks von n Seiten, so ist, nach der Cor struction (15.), wenn noch AE gezogen worden, $\Delta ACG =$

$\frac{1}{2n}$ A; $\Delta ACD = \frac{1}{2n}$ B; $\Delta ACH = \frac{1}{2n}$ P; 2 ΔACI

$= \frac{1}{2n}$ Q. Nun ist $\Delta ACG : \Delta ACD = CG : CI$

$= CG : CA$. Ferner $\Delta ACD : \Delta ACH = CD : CI$ $= CA : CH$. Wegen des rechten Winkels CAH i $CG : CA = CA : CH$ (Dreyeck 11.), also sind di drey Dreyecke in geometrischer Proportion, daher auc ihre 2n fachen, A, B, P.

Zweytens ist $\Delta ACD : \Delta ACH = CA : CI$ $= ED : EH = AE : EH$. Ferner ist auc $\Delta ACE : \Delta ECH = AE : EH$. Daher i $\Delta ACD : \Delta ACH = \Delta ACE : \Delta ECH$, das i

$B : P = \frac{1}{2} Q : P - \frac{1}{2} Q$. Daraus ist durch Ve

bindung $P + B : B = P : \frac{1}{2} Q = 2P : Q$, od

$P + B : 2P = B : Q$.

Nach diesen Proportionen hat Jakob Gr gory eine Reihe Vielecke, innere und äußere, vo Viereck an bis zu dem von 16384 Seiten berechne in der Schrift de vera circ. et hyp. quadratura Die Ausziehung der Wurzeln ist aber sehr mühsan s. oben 4.

27. Descartes hat eine sinnreiche Constru tion angegeben, wodurch zu einem gegebenen Kreisum fange der Halbmesser gefunden wird. Euler hat s

werthgeschätzt, sie zu erläutern und auf Rechnung zu bringen in den Novis Comm. Acad. Petrop. T. VIII. Sie ist folgende. Das Quadrat ABCD (Fig. 6.) habe denselben Umfang wie ein Kreis. Man ziehe die Diagonale AD und verlängere sie unbestimmt nach O hin. Zu diesem Quadrate setze man über der verlängerten AB das Rechteck BEFG, welches dem vierten Theile des Quadrats gleich sey, und dessen Winkelpunct F in die gerade AO falle. Ferner füge man zu diesem das Rechteck EHI, welches dem vierten Theile des Rechtecks BF (d. i. dem 16ten Theile des Quadrats AD) gleich sey, ebenfalls mit dem Winkelpuncte I auf AO. So fahre man fort, und es nähert sich die Grundlinie des Quadrats und der Rechtecke, wie AH, immer mehr dem Durchmesser des Kreises, dessen Umfang dem des Quadrates gleich ist. Inzwischen wäre es mühsam die Längen AE, AH u. s. f. zu bestimmen, wozu eine Construction, wie in dem Artikel, Anwendung der Geometrie, Th. I. S. 133. 2te Aufg. gezeigt ist, oder die Auflösung einer quadratischen Gleichung, erfordert wird.

Die Cartesische, dem Durchmesser sich nähernde, Reihe entsteht, wenn man eine Reihe von äußern regulären Vielecken sucht, deren Umfänge sich alle gleich sind. Es sey nämlich ABCD ein Quadrat, das um einen Kreis beschrieben ist, also AB der Durchmesser desselben, so wird AE der Durchmesser des Kreises in einem Achtecke von gleichem Umfange mit dem Quadrat; AH wird der Durchmesser des Kreises in dem Sechszehneck von eben dem Umfange, u. s. f. Die Gränze der so bestimmten Längen ist der Durchmesser eines Kreises von demselben Umfange wie das Quadrat. Dieses soll nun gezeigt werden.

28. Anstatt der Durchmesser kann man aber bequemer die Halbmesser nehmen. Es sey ABM (Fig. 7.) ein gegebener Kreis um den Mittelpunct C, AD die halbe Seite eines umschriebenen ordentlichen Vielecks,

Den Halbmesser des in das Vieleck von einer doppelt so großen Anzahl Seiten zu beschreibenden Kreises bey demselben Umfange zu finden, halbire man AD in E und ziehe EF senkrecht auf AD. Dann halbire man den Winkel ACD durch die gerade CF, welche EF in F treffe. Durch F ziehe man die parallele FH mit AD an die verlängerte CA in H, so ist CH der verlangte Halbmesser.

29. Die CF schneide AD in G. Es ist $AC : AG = CH : HF$. Auch ist wegen des halbirten Winkels ACD, $AC : CD = AG : GD$, (Dreyeck 9.) und daraus $AC : AC + CD = AG : AD$. Folglich aus beiden Proportionen $CH : HF = AC + CD : AD$. Da $HF = \frac{1}{2} AD$, so ist $CH = \frac{1}{2} (AC + CD)$, also $AH = \frac{1}{2} (CD - AC)$, und

$$CH \cdot AH = \frac{1}{4} (CD^2 - AC^2) = \frac{1}{4} AD^2.$$

30. Dieses führt unmittelbar auf die Cartesische Construction, wodurch man sich dem verlangten Halbmesser des gegebenen Kreisumfanges (in jener dem Durchmesser) schnell nähert. Die Linie FH tritt an die Stelle von AD, und so wird aus jeder halben Vielecksseite und dem zugehörigen Halbmesser ein folgender Halbmesser mit der zugehörigen Polygonseite gefunden.

31. Die Folge der Halbmesser, wie CA, CH etc. sey a, b, c, d, etc. die zugehörigen halben Polygonseiten sey p, q, r, s, etc. deren jede halb so groß ist, als die nächst vorhergehende, so ist

$$b (b - a) = \frac{1}{4} p^2; \quad c (c - b) = \frac{1}{4} q^2;$$

$$d\,(d - c) = \frac{1}{4}\,r^2;\quad e\,(e - d) = \frac{1}{4}\,s^2;\ \text{etc.}$$

oder, wenn AD = CA, d. i. $p = a$ genommen wird,

$$b\,(b - a) = \frac{1}{4}\,a^2;$$

$$c\,(c - b) = \frac{1}{4}\,b\,(b - a);$$

$$d\,(d - c) = \frac{1}{4}\,c\,(c - b);$$

$$e\,(e - d) = \frac{1}{4}\,d\,(d - c).\ \text{etc.}$$

Daraus ist

$$b = \frac{a + \sqrt{2aa}}{2};\quad c = \frac{b + \sqrt{(2bb - ab}}{2};$$

$$d = \frac{c + \sqrt{(2cc - bc)}}{2},\ \text{etc.}$$

Die Gränze dieser Größen ist der Halbmesser des Kreises, dessen Umfang $= 8a$ ist.

32. Man ziehe in dem Rechteck AGFH (Fig. 7.) die Diagonale AF, so ist das Dreyeck AHF ähnlich dem Dreyeck FHC. Denn da $CH \,.\, AH = \frac{1}{4} AD^2 = HF^2$ ist, so ist $CH : HF = HF : AH$. Daher ist der Winkel AFH = HCF. Folglich ist $AH = FH \,.\, \text{tg}\, \frac{1}{2}\alpha$, und $b = a + \frac{1}{2}\,\text{tg.}\, \frac{1}{2}\,\alpha$.

Auf gleiche Art ist $c = b + \frac{1}{4}\, p\ \text{tang}\ \frac{1}{4}\alpha$; $d =$

$c + \frac{1}{8} p \tang \frac{1}{8} \alpha$; $e = d + \frac{1}{16} p \operatorname{tg} \frac{1}{16} \alpha$.

Oder:

$a = p \cot \alpha$.

$b = p (\cot \alpha + \frac{1}{2} \tang \frac{1}{2} \alpha)$.

$c = p (\cot \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{1}{4} \alpha)$.

$d = p (\cot \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{1}{4} \alpha$

$+ \frac{1}{8} \tang \frac{1}{8} \alpha)$. u. s. w.

33. Die unendliche Reihe $p (\cot \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{1}{8} \alpha + \frac{1}{16} \operatorname{tg} \frac{1}{16} \alpha$ + etc.) giebt den Halbmesser eines Vielecks von unendlich vielen Seiten, das ist, eines Kreises, dessen Umfang demjenigen des Vielecks mit der Seite 2p gleich, oder $= 2np$ ist, wenn die Anzahl der Seiten $= n$ oder $\alpha = \frac{\pi}{n}$ ist.

34. So wie $a = p . \cot \alpha$, und $b = \frac{1}{2} p \cot \frac{1}{2} \alpha$ ist, so ist $c = \frac{1}{4} p \cot \frac{1}{4} \alpha$, $d = \frac{1}{8} p \cot \frac{1}{8} \alpha$, u. s. f. Setzt man für b, c, d, etc. diese ihre Werthe, so erhalten wir den goniometrischen Lehrsatz,

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\alpha = \cot\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha.$$

$$\frac{1}{4}\cot\frac{1}{4}\alpha = \cot\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha.$$

$$\frac{1}{8}\cot\frac{1}{8}\alpha = \cot\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{1}{8}\alpha.$$

und

$$\frac{1}{n}\cot\frac{1}{n}\alpha = \cot\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{1}{8}\alpha \ldots + \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\alpha.$$

Da $\cot\alpha - \operatorname{tang}\alpha = 2\cot 2\alpha$. (Goniometrie 44.), so ist

$$\operatorname{tang}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha \ldots + \frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\alpha$$

$$= \frac{1}{n}\cot\frac{1}{n}\alpha - 2\cot 2\alpha.$$

35. Für ein unendliches n ist $\cot\frac{1}{n}\alpha$ oder $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{n}\alpha}$

$= \frac{n}{\alpha}$, und es ist also

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha . + \text{etc.} =$$

$$\frac{1}{\alpha} - 2\cot 2\alpha.$$

36. Für $\alpha = 45°$ ist $\cot 2\alpha = 0$, und

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{16}\pi + \text{etc.} = \frac{4}{\pi}$$

37. Diese Sätze lassen sich auch, ohne eine geometrische Construction zu Hülfe zu nehmen, wie hier gelegentlich geschehen ist, aus der Formel, $\operatorname{tang}\alpha = \cot\alpha - 2\cot 2\alpha$, (Goniometrie, 44.), herleiten, wenn darin folgeweise für α gesetzt wird $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha$, $\frac{1}{8}\alpha$, u. s. f.

38. Die Differentiation der Reihe,

$$\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varphi \ldots = \frac{1}{\varphi} - 2\cot 2\varphi$$

giebt (Differentialformel, 38.)

$$\sec\varphi^2 + \frac{1}{4}\sec\frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{4^2}\sec\frac{1}{4}\varphi^2 + \frac{1}{4^3}\sec\frac{1}{8}\varphi^2 \text{ etc.} = \frac{1}{\sin\varphi^2 . \cos\varphi^2} - \frac{1}{\varphi^2}.$$

39. Aus der Formel, $\operatorname{cosec} 2\varphi = \cot\varphi - \cot 2\varphi$ (Goniometrie, 49.), wird auf ähnliche Art hergeleitet,

$$\operatorname{cosec} 2\varphi + \operatorname{cosec} 4\varphi + \operatorname{cosec} 8\varphi + \operatorname{cosec} 16\varphi + \text{etc.} = \cot\varphi - \cot 2^n\varphi.$$

40. Joh. Bernoulli giebt folgende Construction an, einen Kreisbogen zu finden, der einer gegebenen geraden Linie gleich sey, in einem Aufsatze de motu reptorio et transformatione curvarum, Opp. T. I. p. 446. Commerc. epist. T. II. p. 176. Es sey AP (Fig. 8.) die gegebene gerade, BC eine darauf senkrechte. Man ziehe AC willkührlich, und nehme CB = CA; halbire AB in D und ziehe

CD; nehme CE = CD, halbire DE in F, und ziehe CF; nehme CG = CF, halbire FG in H, und ziehe CH. So fahre man fort. Die Gränze der aus C gezogenen Linien sey CR, so ist der Kreisbogen RS, welcher mit dem Halbmesser CR innerhalb des Winkels ACB beschrieben wird, der gegebenen geraden AP gleich.

Bernoulli führt diese Construction nur gelegentlich an. Man sieht nicht wohl wie sie mit der Materie, wovon er handelt, zusammenhängt. Ein directer, goniometrischer Beweis folgt hier.

41. Es sey AC = r; der Winkel ACB = φ,

so ist $CD = r \cos \frac{1}{2} \varphi$; $CF = r \cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi$;

$CH = r \cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi . \cos \frac{1}{8} \varphi$. Setzt man diese Multiplicationen durch die Cosinus der halbirten Winkel fort, ohne Ende, und bezeichnet CR durch R, so ist

$$R = r \cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi . \cos \frac{1}{8} \varphi . \cos \frac{1}{16} \varphi . \text{ꝛc.}$$

Man entwickele dieses Product successiv, so entsteht eine Reihe von Cosinus, deren Winkel eine arithmetische Fortschreitung bilden.

Nämlich I. $\cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi =$

$$\frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{4} \varphi + \cos \frac{3}{4} \varphi \right).$$

II. $\cos \frac{1}{2} \varphi . \cos \frac{1}{4} \varphi . \cos \frac{1}{8} \varphi =$

$$\frac{1}{4}\left(\cos\frac{1}{8}\varphi + \cos\frac{3}{8}\varphi + \cos\frac{5}{8}\varphi + \cos\frac{7}{8}\varphi.\right)$$

$$\text{III.}\quad \cos\frac{1}{2}\varphi \ldots \cos\frac{1}{16}\varphi = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{1}{16}\varphi + \cos\frac{3}{16}\varphi \ldots + \cos\frac{13}{16}\varphi + \cos\frac{15}{16}\varphi\right).$$

und allgemein

$$\cos\frac{1}{2}\varphi \ldots \cos\frac{1}{m}\varphi = \frac{2}{m}\left(\cos\frac{1}{m}\varphi + \cos\frac{3}{m}\varphi \ldots + \cos\frac{m-3}{m}\varphi + \cos\frac{m-1}{m}\varphi\right).$$

Die Fortschreitung erhellt aus der Formel,

$$\cos A . \cos B = \frac{1}{2}\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B),$$

(Goniometrie, 27.). Was für eine der speciellen Reihen gilt, gilt auch für die nächst folgende.

Die Summe der letzten Reihe mit dem Factor $\frac{2}{m}$ ist $= \frac{\sin\varphi}{m\sin\frac{1}{m}\varphi}$, (Goniometrie, 64.), wo $a = \frac{1}{m}\varphi$, $b = \frac{2}{m}\varphi$, $n = \frac{1}{2}m - 1$ ist.

Ist m unendlich, so wird das Product der Cosinus $= \frac{\sin\varphi}{\varphi}$.

Es ist also $R = \frac{r \sin \varphi}{\varphi}$, oder $R\varphi = r \sin \varphi$.

Nun ist aber $R\varphi$ der Kreisbogen RS (21.) und $r \sin \varphi$ die gerade AP.

Kürzer erhält man den Werth des Products der Cosinus folgendermaßen. Es ist

$\sin \varphi = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cdot \cos \frac{1}{2} \varphi$; ferner $\sin \frac{1}{2} \varphi = 2 \sin \frac{1}{4} \varphi \cdot \cos \frac{1}{4} \varphi$; wiederum $\sin \frac{1}{4} \varphi = 2 \sin \frac{1}{8} \varphi \cdot \cos \frac{1}{8} \varphi$, u. s. w. Also ist $\sin \varphi = 2^n . \sin \frac{1}{2^n} \varphi \cdot \cos \frac{1}{2} \varphi \cdot \cos \frac{1}{4} \varphi \; \cos \frac{1}{8} \varphi \ldots \cos \frac{1}{2^n} \varphi$. Die Gränze dieses Products ist $\sin \varphi = \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi \cdot \cos \frac{1}{4} \varphi \cdot \cos \frac{1}{8} \varphi . \cos \frac{1}{16} \varphi$. etc. in infin.

Bernoulli bemerkt noch, daß die Puncte D, F, H. etc. in einer Quadratrix der Alten liegen, welches auch, wie Euler angemerkt hat, mit den Puncten D, F, etc. (Fig. 7.) der Fall ist.

41* Da nach dem vorigen

$$\varphi = \sin \varphi \cdot \sec \frac{1}{2} \varphi . \sec \frac{1}{4} \varphi . \sec \frac{1}{8} \varphi \ldots\ldots$$

also

$$\log \varphi = \log \sin \varphi + \log \sec \frac{1}{2} \varphi + \log \sec \frac{1}{4} \varphi + \ldots$$

so kann vermittelst dieser Formel der Logarithme eines Bogens aus den schon berechneten Logarithmen der Sinus und Secanten gefunden werden. Die Reihe nähert sich übrigens desto schneller der Gränze ihrer Summe, je kleiner der Bogen φ ist.

Für $\varphi = 1^\circ = \frac{1}{180}\pi$ ist

$$\log \sin \varphi = 8,241\,8553$$

$$\log \sec \tfrac{1}{2}\varphi = 0,000\,0165$$

$$\log \sec \tfrac{1}{4}\varphi = 0,000\,0041$$

$$\log \sec \tfrac{1}{8}\varphi = 0,000\,0010$$

$$\log \sec \tfrac{1}{16}\varphi = 0,000\,0003$$

$+ 1$ (Wegen der weggelassenen Glieder.)

$$\log \varphi = 8,241\,8773$$

Weil $\pi = 180\,\varphi$, also $\log \pi = \log 180 + \log \varphi$, so wird $\log \pi = 2,2552725 + 8,2418773 = 0,4971498$.

42. Da die Geschichte der Bemühungen, den Umfang des Kreises so genau als möglich zu finden, und die Wege dazu abzukürzen, in dem Artikel, Cyklotechnie, erzählt ist, so bleibt hier nur übrig, einiges von den fehlerhaften Angaben des Verhältnisses des Kreises zum Durchmesser beyzufügen. Eben so wie die Verwandlung der Metalle und das Perpetuum mobile von vielen Leuten eifrig gesucht ist, welche weder Chemie noch Mechanik verstanden, so ist auch die Quadratur des Kreises meistens von Leuten gesucht, die nicht die Elemente der Geometrie gehörig inne hatten.

Einige mögen geglaubt haben, daß auf die Quadratur des Kreises, wie auf die Auflösung der Aufgabe, die Meereslänge zu finden, ein Preis gesetzt wäre, wodurch sie also zugleich Ehre und Gewinnst zu erlangen sich einbildeten.

Gelehrte Gesellschaften haben sich genöthigt gesehen zu erklären, daß sie gar keine sogenannten Erfindungen der Quadratur des Kreises annehmen würden, weil sie mit zu vielen waren belästigt worden.

43ª. Der erste, welcher nach Wiederherstellung der Wissenschaften die Quadratur des Kreises eifrigst gesucht hat, ist der Cardinal Nicolaus de Cusa oder Cusanus (gest. 1464). Er hat sie wiederholentlich vorgenommen. In der Schrift: de mathematicis complementis sucht er den Halbmesser eines Kreises von gegebenem Umfange so zu bestimmen. Er stellt sich eine Reihe regulärer Vielecke, die gleichen Umfang haben, vom Dreyecke an, mit den in und um sie beschriebenen Kreisen vor. Den Halbmesser des innern Kreises nennt er die erste, des äußern die zweyte Linie. Diese Linien, bemerkt er, sind um so mehr von einander unterschieden, je größer die Seite des Vielecks ist, differiren also am meisten bey dem Dreyecke, und fallen beym Kreise zusammen. Die erste Linie ist beym Dreyecke am kleinsten, und wird für die auf das Dreyeck folgenden Vielecke größer, die zweyte Linie hingegen ist beym Dreyecke am größten, und wird in den folgenden Vielecken kleiner. Auch verhält sich der Überschuß der Fläche eines Vielecks über diejenige des isoperimetrischen Dreyecks wie der Unterschied der ersten Linien in dem Vielecke und Dreyecke. Ferner, je kleiner der Unterschied der ersten und zweyten Linie in einem Vielecke ist, desto mehr übertrifft die erste Linie des Vielecks die des isoperimetrischen Dreyecks, mithin übertrifft, weil im Kreise erste und zweyte Linie gleich sind, der Halbmesser des isoperimetrischen Kreises die erste Linie des Dreyecks am meisten, folglich ist der

Überschuß der Fläche des Kreises über die des Dreyecks am größten, und nimmt bey den folgenden Vielecken ab. Nun ist auch der Unterschied der ersten und zweyten Linie im Dreyecke am größten, und wird bey den folgenden Vielecken kleiner. Nimmt man also an, daß der Überschuß der Fläche des Kreises über die eines Vielecks von gleichem Umfange mit dem Kreise, sich wie der Unterschied der ersten und zweyten Linie des Vielecks verhält, so läßt sich aus der ersten und zweyten Linie irgend zweyer isoperimetrischeen Vielecke der Halbmesser eines Kreises, welcher mit den beiden Vielecken einerley Umfang hat, herleiten.

Ich habe Cusans Schlüsse vollständig dargestellt, weil sein Verfahren in der That sinnreich ist, und auf derselben Idee beruht, die der Cartesischen Construction (27) zum Grunde liegt. Der gesuchte Halbmesser wird nun so gefunden. Es sey p der gemeinschaftliche Umfang der beiden Vielecke und des Kreises, a, b erste und zweyte Linie für das eine, a′, b′ für das andere Vieleck, r der Halbmesser des Kreises, so ist $\frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}ap : \frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}a'p = b - a : b' - a'$, woraus $r = \frac{a'b - ab'}{a' - a + b - b'}$. Cusan lehrt den Halbmesser r durch eine ganz richtige Construction finden, wobey er die ersten und zweyten Linien des Drey- und Vierecks gebraucht. Die Rechnung giebt hiernach das Verhältniß des Diameters zur Peripherie, wie $1 : 4 + 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{6}$ d. i. 1 : 3,154192, welches also schon in der zweyten Decimalstelle unrichtig ist. Vielecke, deren Seitenzahl größer ist, welche also näher an den Kreis fallen, würden es richtiger geben. Das Fünf- und Sechseck giebt $\pi = 3,143534$. Cu-

san hält übrigens selbst die dargestellte Methode nicht für zuverlässig, und verweist deshalb auf andere seiner Erfindungen.

In der Schrift de transmutationibus geometricis giebt Cusan folgende Construction zur Verwandlung einer gegebenen geraden Linie in die Peripherie eines Kreises an. Man beschreibe ein gleichseitiges Dreyeck, dessen Umfang der gegebenen Linie gleich sey, und ziehe aus dem Mittelpuncte desselben an die Grundlinie eine gerade Linie, welcher von dieser den vierten Theil abschneidet. Setzt man dieser Linie den vierten Theil ihrer Länge zu, so erhält man den Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang dem des Dreyecks, also der gegebenen geraden Linie gleich ist. Nach dieser Construction ist $\pi = 3{,}142337$; welches etwas genauer als $\frac{22}{7}$ ist.

Eine gerade Linie so groß als der Umfang eines gegebenen Kreises zu finden, lehrt Cusan in der schon angezogenen Schrift de math. complem. Man soll in dem Kreise zwey auf einander senkrechte Durchmesser, einen horizontalen und verticalen ziehen, auf den verticalen von dem einen Endpuncte an die Sehne des Bogens von 120° auftragen, und mit derselben einen Kreis, welchen der gegebene von innen berührt, beschreiben, so schneide solcher von dem an beiden Seiten verlängerten horizontalen Durchmesser ein Stück ab, welches dem halben Umfange des gegebenen Kreises gleich sey. Diese Construction setzt das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie, wie 1 : 3,13949 voraus.

In einem besondern Aufsatze über die Quadratur des Kreises setzt Cusan die Peripherie eines gegebenen Kreises gleich dem Umfange eines gleichseitigen Dreyecks, welches in einem Kreise beschrieben worden, der die Summe der Sehne des Quadranten und des Halbmessers in dem gegebenen Kreise zum Durchmesser hat.

Hiernach ist $\pi = 3,13615$. Man sieht, daß Cusan die Resultate seiner verschiedenen Quadrirungsmethoden nicht scharf zu vergleichen gewußt hat, weil er sonst ihre Unrichtigkeit entdeckt haben würde. Diese ist von Regiomontan in einem Anhange zu dem Werke: de triangulis. Norimb. 1533. weitläufig gezeigt worden.

Noch ist ein von Cusanus in der Abhandlung de mathematica perfectione aufgestellter Satz, wonach die Länge eines Kreisbogens φ durch seinen Sinus und Cosinus so bestimmt wird, daß $\varphi = \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}$ ist, deswegen merkwürdig, weil es der erste der von Snellius zur leichteren Berechnung des Kreisumfangs gegebenen Sätze ist. (S. den Art. Cyklotechnie in dem Isten Th. dieses Wörterbuchs. S. 651.). Die Art, wie Cusan zu diesem Satze gelangt, ist folgende. Er betrachtet ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen Hypotenuse a, Perpendicularseite b, Grundlinie c seyn mag. Cusan nennt diese Seiten nach der Ordnung erste, zweyte, dritte Linie, und setzt b nicht größer als c. Mit a sey aus der Spitze des Winkels B, welchem b entgegensteht, ein Kreisbogen, der den genannten Winkel mißt, beschrieben. Die Länge dieses Bogens ist $a\varphi$, wenn φ die Länge des ähnlichen Bogens für den Halbmesser 1 ist. Nun sagt Cusan: wenn B am kleinsten sey, d. i. verschwinde, so sey $a\varphi : b = 1 : 1$; aber in diesem Falle auch $a = c$, mithin $a : c = 1 : 1$, folglich $a\varphi : b = a : c$. Wenn aber B am größten, nämlich 45°, und $a - c$ ebenfalls am größten, so sey zwar nicht $a\varphi : b = a : c$; aber in diesem Falle müsse es eine Linie x geben, welche zu a und c gesetzt das Verhältniß $a + x : c + x$ dem von $a\varphi : b$ gleich mache. Und da, was auch x für eine Größe habe, auch noch in dem Falle des kleinsten B, wo $a = c$, $a\varphi : b = a + x : c + x = a : c$ sey, so gelte der Satz beym größ-

größten und kleinsten Dreyecke, folglich auch von allen Zwischendreyecken. Wenn man also x für die beiden Fälle, wo $B = 45^\circ$ und $= 30^\circ$ ist, bestimmen könne, so habe man es für alle rechtwinklige Dreyecke gefunden. Cusan sucht nun auf mehrerley Arten, die freylich nicht recht klar sind, zu zeigen, daß $x = 2a$ seyn müsse. Sein letzter Beweis ist von einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreyecke hergenommen, wo er $a = 7$ und $b = c = 5$ nächstens, den Bogen $a\varphi = 5\frac{1}{2}$ nach Archimeds Bestimmung von $\pi = \frac{22}{7}$, setzt. Eine Bestimmung von x, ohne π zu kennen, läßt sich so erhalten. Da $b = a \sin\varphi$, $c = a\cos\varphi$, so ist $a\varphi : b = \varphi : \sin\varphi$. Man setze also $\varphi : \sin\varphi = 1 + x : x + \cos\varphi$, so hat man für $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ oder 30°, $\frac{1}{6}\pi : \frac{1}{2} = 1 + x : x + \frac{1}{2}\sqrt{3}$; für $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ oder 45°, $\frac{1}{4}\pi : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 + x : x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$, woraus durch Zusammensetzung wird $\frac{1}{6}\sqrt{2} : \frac{1}{4} = x + \frac{1}{2}\sqrt{2} : x + \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Hieraus findet sich $x = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3\sqrt{2} - 4} = 1{,}913$ also sehr nahe $= 2$; demnach $\varphi : \sin\varphi = 3 : 2 + \cos\varphi$.

Über Cusanus und seine Quadraturen des Kreises ist zu vergl. Kästners Gesch. der Math., B. I S. 400 — 416 und S. 477 — 481.

43[b]. Orontius Finäus, Professor der Mathematik in Paris (gest. 1555) wollte das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange auf mehrere neue Arten angeben, unter andern auch durch eine Construction, woben er den Durchmesser nach dem äußern und mittlern Verhältniß eintheilte, das kleinere Stück und jedes folgweise übrige kleinere, eben so. Da er aber hierbey das Verhältniß 1 : $3\frac{1}{7\frac{1}{8}}$ (d. i. 1 : 3, 14 102) gebrauchte, so war die Genauigkeit, mit welcher er eine gerade Linie dem Quadranten nahe gebracht zu haben glaubte, nur scheinbar. Sein Buch führt den Titel: De rebus mathematicis hactenus desideratis. Paris, 1556. Kästners Gesch. der Math. 1. Bd. S. 454. ff.

44. Simon a Quercu glaubte durch folgende Construction, die Länge des Quadranten angeben zu können. Im Kreise ziehe man einen Durchmesser, an dessen einem Ende eine berührende, von dem andern Ende eine gerade, in einer solchen Lage, daß das von ihr innerhalb des Kreises befindliche Stück so groß sey als das auf der berührenden abgeschnittene. Dieses Stück (oder jenes) soll dem Quadranten des Kreises gleich seyn. Es giebt denselben = 0,78615 des Durchmessers statt 0,78539 . . . Man bemerke inzwischen, daß für diese Lage der Cosinus des Winkels, welchen die Linie mit dem Durchmesser macht, der Tangente desselben gleich ist. Kästners Gesch. der Math. I. B. S. 481 und 632. Es ist auch merkwürdig, daß das Perpendikel von dem gesuchten Puncte des Umfanges den Durchmesser nach dem äußern und mittlern Verhältnisse theilt.

45. Joseph Scaliger, ein großer Vielwisser seiner Zeit (gest. 1609), von dem man ein gelehrtes Werk über die Chronologie hat, wagte sich auch an die Mathematik, weil er viel Griechisches und Lateinisches gelesen hatte. Von ihm sind Cyclometriae elementa duo. Lugd Batav 1694. fol. 122 p. Er fehlt aber sehr gröblich. Denn er behauptete, daß

der Umfang des in einem Kreise eingeschriebenen ordentlichen Zwölfecks größer sey, als der Umfang des Kreises, und bey Vielecken von mehrern Seiten noch vielmehr. Nun bemerkt er zwar selbst, daß dieses ein großes Paradoxon in der Geometrie sey, daß allerdings ein Bogen größer sey als seine Chorde, indessen die Rechnung zeige es doch anders. Der gelehrte Mann bedachte nicht, daß die Arithmetik und Geometrie sich nicht widersprechen können, und daß ein Rechnungsfehler von ihm müsse begangen seyn, wenn nicht in den Ziffern, doch in der Form der Rechnung. Er berechnet für einen Durchmesser = 16 den Sinus versus des Bogens von 30°, der Sinus = 4 gesetzt. Dabey fehlt er auf zweyerley Art. Um seine Figur nicht zu gebrauchen, sey der Durchmesser = d, also der Sinus von 30° $= \frac{1}{4}d$; ferner der Sinus versus = v, die Seite des Zwölfecks = z, so ist $z^2 = \frac{1}{16}d^2 + v^2$. Nun sagt Scaliger, das Quadrat von dem Umfange des Zwölfecks sey größer, als das von $12 \times \frac{1}{4}d$ (oder 3d), um $12v^2$, da er hätte setzen sollen, um $144v^2$. Dann hätte er freylich nach seiner Rechnungsart den Überschuß des Zwölfecks über den Kreisumfang noch größer gefunden. Allein er nimmt aus einer Größe wie $a^2 + b^2$ die Wurzel gleich $a + b$ an, welches sehr fehlerhaft ist, besonders in dem gegenwärtigen Falle. Er setzt $v = 1\frac{1}{13}$, welches zu viel ist, und addirt die Wurzel aus $12v^2$ zu dem dreyfachen des Durchmessers. Da $\sqrt{12v^2} = 3,73$ ist, so ist nach dieser Rechnung der Umfang des Zwölfecks beträchtlich mehr als $\frac{51}{16}$ des Durchmessers. Nun nimt

Scaliger, der Archimedischen Rechnung zufolge, die er sonst verwirft, an, daß der Umfang des Kreises kleiner sey, als $\frac{51}{16}$ des Durchmessers. So findet er den Satz, über welchen er sich selbst wundert. Gleich nach diesem Satze trägt er folgenden nicht weniger unerwarteten vor. Das Quadrat von dem Umfange des Kreises ist das zehnfache des Quadrats von dem Durchmesser. Das gäbe das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, wie 1 : 3,1622776 . . . Scaliger macht in dem geometrischen Beweise folgenden Schluß, $A = B$, und $C = D$, also $C = B$. Das Verhältniß $1 : \sqrt{10}$ wird auch, wie Purbach in seinem Tractat von den Sinus und Chorden meldet, bey den Indiern angenommen. Auch von den Arabern, wie Krafft, Geom. subl. §. 118. anführt. Charles de Bovelles hat in seiner praktischen Geom. Paris 1542, es auch gebraucht.

Daß Scaliger mit seiner Quadratur ziemlich verlacht worden ist, und daß sein kritischer Stolz sich nicht beugen lassen wollte, ist leicht zu erachten. Er suchte sich in einem Anhange zu seiner Schrift zu vertheidigen, wobey er einige von ihm begangene Fehler zugab. Übrigens blieb er dabey, daß Archimedes gefehlt habe. Von Scaligers Quadratur des Kreises ausführlich in Kästners Geschichte der Mathematik. Bd. I. S. 487—497, und S. 505—511. Clavius und Vieta haben sie streng geprüft und widerlegt. Auch Adrian Romanus hat in seiner Apologia pro Archimede, die Unrichtigkeit der Quadraturen von Scaliger, Orontius Finäus und Simon a Quercu gezeigt.

46[a]. Porta, der durch seine Experimentaluntersuchungen und durch seine Vergleichung des Auges mit der Camera obscura bekannt ist, hat 3 Bücher Elementorum curvilineorum. Romae 1610. 4. herausgegeben, in denen die Quadratur des Kreises ver=

heißen wird. Der 17te Satz des 3ten Buches ist: Datum circulum quadrare. Porta beschreibt in einen Halbkreis, indem er den Halbmesser dreymahl als Sehne einträgt, ein Trapez mit zwey parallelen Seiten, dessen Grundlinie der Durchmesser ist. Über jeder der drey gleichen Seiten dieses Trapezes, construirt er ein Dreyeck, in welchem die Winkel an der Grundlinie 60° und 45° fassen, der an Spitze 75° hält. Der Rest, welcher nach Wegnahme dieser drey gleichen Dreyecke von dem Trapez übrig bleibt, soll dem vierten Theile des Halbkreises gleich seyn. Das ist aber weit gefehlt. Denn das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, welches sich daraus ergiebt, ist 1 : 2,78461.

46[b]. **Philipp Lansberg**, der als Astronom, aber nicht sehr vortheilhaft bekannt ist, (gest. zu Middelburg 1632) gab heraus: Cyclometriae novae libri duo, Middelburgi 1616, worin er nicht sowohl die Quadratur des Kreises, als vielmehr eine bequeme geometrische Annäherung zu derselben lehren wollte. Es sey AB (Fig. 9.) ein Quadrant; dieser und der Halbmesser CB werden in gleich viele Theile getheilt; ein solcher Theil sey auf jenem AD, auf diesem CE; man ziehe ED, welche die in A berührende AT in F schneide, so ist nach Landsberg AF dem Bogen AD nahe gleich. Diese AF wird nun leicht berechnet, wenn der Sinus und Cosinus des Bogens AD bekannt sind. Denn man ziehe DG senkrecht auf CA, und EH derselben parallel, welche DG in K schneide, so ist EK : KD = EH : FH, und AF = FH + HA = FH + CE. Zu diesem Zweck hat er eine Tafel der Chorden, oder der doppelten Cosinus der Winkel, die durch fortgesetzte Halbirung des rechten bis zur 46sten entstehen, für einen Halbmesser, 10^{54}, berechnet, woraus er dann auch für jeden Fall den Sinus eines Bogens finden kann. Nun berechnet Lansberg für einen Halbmesser 10^{45}, den Bogen, welcher der 2^{45}ste Theil des Qua-

dranten ist, und findet die 29 ersten Decimalstellen mit den Ludolphschen Ziffern übereinstimmend.

47. Man kann diese Annäherung leicht prüfen. Es sey AD der nte Theil des Quadranten, der zugehörige Winkel $= \varphi$, so ist $\varphi = \frac{\pi}{2n}$. Der Halbmesser CA sey $= 1$, so ist

$$\cos \varphi : \sin \varphi - \frac{1}{n} = 1 : HF, \text{ und}$$

$$AF = \frac{1}{n} + \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{n} \sec \varphi. \text{ Nun ist}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \varphi + \frac{1}{3} \varphi^3 + \frac{2}{15} \varphi^5 + \text{etc. und}$$

$$\sec \varphi = 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{5}{24} \varphi^4 + \text{etc. Also ist}$$

$$AF = \varphi - \frac{\varphi^2}{2n} + \frac{1}{3} \varphi^3 - \text{etc. oder}$$

$$AF = \varphi - \frac{\varphi^3}{\pi} + \frac{1}{3} \varphi^3 - \text{etc.}$$

wo das zweyte und dritte Glied sich fast aufheben. Die Lansbergische Annäherung ist daher bey kleinen Bogen genau genug. Man sehe auch Kästners Geschichte der Mathematik. Bd. III. S. 59. Bd. IV. S. 415.

48ª. Chr. Severin Longomontanus, Professor der höheren Mathematik zu Kopenhagen, der ein sehr nützlicher Gehülfe Tycho's gewesen war, (gest. 1647.), gab mehrere Schriften über seine vermeintliche Quadratur des Kreises heraus, von welchen Kästner in der Gesch. der Mathem. Bd. III. S. 57. 58 drey an-

führt. Noch ist von ihm Inventio quadraturae circuli, Hafniae 1624. 154 p. 4to. Ich habe versucht mir von seiner Methode einen Begriff zu machen, konnte aber wegen des verworrenen Vortrags nicht dazu gelangen. Der Verf. behauptet S. 103, daß der Durchmesser sich zum Umfange verhalte, wie $\sqrt{616\frac{1}{3}}:78$, das ist, wie er es angiebt 1:3,141859604427, welches schon in der vierten Decimalstelle irrig ist. Das umschriebene Sechseck soll sich zum Kreise verhalten, wie 43 : 39. Der Verfasser ist von der Richtigkeit seiner Quadratur des Kreises so sehr überzeugt, daß er am Ende der Vorrede Gott innigst dankt, der ihn in seinem hohen Alter noch die wichtige Aufgabe aufzulösen gestärkt habe.

48[b]. Der bekannte Philosoph Hobbes (gest. 1679) gehört auch mit in die Reihe der unglücklichen Cirkelquadrirer. Bey seinen Problematis physicis, worin er die Schwere, die Ebbe und Fluth u. d. g. erklären will, befinden sich Propositiones XVI de magnitudine Circuli. Darin giebt er Prop. II. eine Construction, nach der die Länge des Quadranten so viel als der Halbmesser und die Tangente des Bogens von 30° zusammengenommen beträgt, welches auf das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, wie 1 : 3,1547 führt. In Prop. XV. lehrt er ein Quadrat in einen Kreis zu verwandeln, und setzt den Halbmesser des Kreises der Linie gleich, welche von der Mitte des Quadrats an die Grundlinie so gezogen ist, daß sie von dieser den vierten Theil abschneidet. Dies giebt das Verhältniß des Diameters zur Peripherie, wie 5 : 16 oder wie 1 : 3, 2. Dasselbe Verhältniß wendet Hobbes Prop. XVI. an, wo er einen Kreis in ein Quadrat verwandelt. — Als Wallis und Huygens diese Quadratur widerlegten, schrieb Hobbes die Schrift de principiis et ratiocinatione geometrarum, contra fastum Professorum geometriae, worin er al=

lerley an den Grundbegriffen der Geometrie auszusetzen hat, den Arabern, welche das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang $= 1 : \sqrt{10}$ setzten, beyfällt, und um seinen Satz von der Länge des Quadranten aufrecht zu erhalten, nicht nur den Pythagorischen Lehrsatz in Zweifel zieht, sondern auch, gleich Longomontan, die Richtigkeit der trigonometrischen Tafeln angreift, wie er denn die Tangente von $30° = 0,5811 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$ statt 0,5773 . . . setzt.

49. Gregorius a St. Vincentio (geb. zu Brügge 1584, gest. zu Gent 1667), einer der scharfsinnigsten und arbeitsamsten Geometer seiner Zeit, ist unter denjenigen, welche die Quadratur des Kreises gesucht haben, der merkwürdigste. Er hat ungeheure Mühe darauf verwandt. Da es ihm nicht geglückt ist, so mag man sagen, daß sie schwerlich zu finden sey. Sein großes geometrisches Werk, das nebst den Untersuchungen zur Quadratur des Kreises viele geometrische, auch neue Lehren, besonders über die Kegelschnitte enthält, führt den Titel: Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, Antwerpiae 1647. fol. Er hat darin vier Methoden, den Kreis zu quadriren angegeben. Huygens, der nebst andern eine Widerlegung dieser neuen Methoden bekannt machte, prüfte blos die erste, weil die andern auf demselben Grunde mit jener beruhen, und diese noch die deutlichste ist. Gregorius hat eigentlich nicht den Kreis quadrirt, wie er dann auch kein bestimmtes Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser angiebt, sondern er hat nur Wege angezeigt, auf welchen man zu der Quadratur möchte gelangen können. Auf dem ersten derselben suchte er, die Aufgabe auf die Cubirung eines Körpers zu bringen. Sein Verfahren läßt sich durch die neuere Analysis leicht darstellen.

50. Man bilde einen Körper über der Hälfte einer Parabel als Grundfläche, deren Gleichung sey

$ax = yy$. Durch die Axe derselben setze man dieselbe halbe Parabel senkrecht auf die Ebene jener, in einer solchen Lage, daß $a(a - x) = zz$ sey, wenn z die Ordinate zu der mit jener gemeinschaftlichen Absciss ist. Jeder Schnitt des Körpers durch die Ordinaten y und z sey ein Rechteck. Ein unbestimmtes Segment des Körpers, von dem Anfange der Abscissen an genommen, sey $= Z$, so ist $dZ = yzdx$ (Cubirung), d. i. $dZ = adx \sqrt{(ax - xx)}$. Diese Differentialformel durch a dividirt ist gerade dieselbe mit der für ein Segment einer Kreisfläche, von dem einen Endpunkte des Durchmessers a an genommen, wie gleich unten gezeigt wird.

Die Construction eines Körpers auf die hier beschriebene Art nannte Gregorius ductum plani in planum.

51. Huygens sucht das Verhältniß des Segments dieses Körpers für $x = \frac{1}{4} a$, zu dem Unterschiede dieses Segments von demjenigen für $x = \frac{1}{2} a$, weil aus demselben nach Gregorius Sätzen die Quadratur des Kreises gefunden wird. Jenes Verhältniß ist nämlich $\frac{1}{24} \pi a^3 - \frac{1}{32} a^3 \sqrt{3} : \frac{1}{48} \pi a^3 + \frac{1}{32} a^3 \sqrt{3} = 4\pi - 3\sqrt{3} : 2\pi + 3\sqrt{3}$. Setzt man es $= 1 : m$, so wird $1 : \pi$ oder das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange $= 4m - 2 : 3(m + 1)\sqrt{3}$. Nach Gregorius ergiebt sich nun das Verhältniß $1 : m$ aus den Verhälnissen eben solcher Segmente, wie die, deren Verhältniß $1 : m$ ist, an zwey andern Körpern. Diese Verhältnisse gab

er zwar selbst nicht an, allein Huygens entdeckte sie, und machte sie nebst dem Verfahren, wodurch er sie gefunden hatte, in seiner Widerlegungsschrift bekannt.

52. Die beiden Körper, die Gregorius zu Hülfe nehmen wollte, sind durch unsere Analysis leicht quadrirt, da Huygens es schon künstlich anfangen mußte. Die Grundfläche des einen dieser Körper ist ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreyeck, in welchem ist $x = y$. Auf diese senkrecht, durch die Axe der x, sey eben das Dreyeck gestellt, so daß $a - x = z$ sey, wo z die Ordinate zu der Absciße x bedeutet. Der Schnitt durch x und z sey ein Rechteck. Hier ist $dZ = yzdx = x(a-x)\,dx$, und $Z = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3$.

53. Die Grundfläche des andern Körpers ist wieder eine Parabel, die gegen die Axe der x convex ist, so daß $ay = xx$ ist. Für die durch die Axe der x senkrecht auf die Grundfläche gestellte Linie sey $az = (a-x)^2$, so ist $dZ = yzdx = \frac{x^2(a-x)^2}{aa}dx$, und $Z = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{2a} + \frac{x^5}{5a^2}$.

54^a. Huygens giebt für die Segmente des ersten dieser beiden Körper von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{4}a$, und von $x = \frac{1}{4}a$ bis $x = \frac{1}{2}a$, das Verhältniß $5 : 11$ an; für die Segmente des andern zu denselben x wie $53 : 203$, welches auch aus unsern Formeln folgt.

54[b]. Vermöge des 40sten Satzes im 10ten Buche von Gregorius Werke, enthält nun das Verhältniß 53 : 203 das Verhältniß 5 : 11 eben so oft, als dies selbst das Verhältniß 1 : m enthält. Huygens ist zweifelhaft, in welchem Sinne Gregorius den Ausdruck, ein Verhältniß enthalte ein anderes, gebraucht habe; ob in dem, daß dadurch angedeutet werde, das eine Verhältniß sey ein Vielfaches des andern, oder in einem andern Sinne. Allein der 37ste, 38ste, 39ste Satz des angeführten Buchs, auf welchen der 40ste beruht, und die von Gregorius selbst gleich im Anfange des 8ten Buches gegebene Erklärung, über die Zusammensetzung der Verhältnisse, lassen keinen Zweifel über die Bedeutung jenes Ausdrucks im 40sten Satze übrig. Gregorius versteht darunter eine Vervielfältigung der Verhältnisse, so daß nach ihm das Verhältniß 53 : 203 in dem Sinne, in welchem Euklides zweyfaches und dreyfaches Verhältniß sagt, das eben so vielfache des Verhältnisses 5 : 11 ist, welches dieses selbst von dem Verhältnisse 1 : m ist. Wofern nun das Verhältniß 53 : 203 das n fache des Verhältnisses 5 : 11 ist, so hat man hiernach

$\frac{203}{53} = \left(\frac{11}{5}\right)^n$, und $\frac{11}{5} = \left(\frac{m}{1}\right)^n = m^n$. Hieraus folgt $n = \frac{\log 203 - \log 53}{\log 11 - \log 5}$, und $\log m =$

$$\frac{\log 11 - \log 5}{n} = \frac{(\log 11 - \log 5)^2}{\log 203 - \log 5}.$$

Die ausgeführte Rechnung giebt
$\log m = 0{,}2010447$, und $m = 1{,}58871$; woraus denn $\pi = 3{,}08882$, also viel zu klein sich ergiebt, so daß demnach Gregorius mit dem Aufwande von so viel Zeit und Mühe nicht einmal dahin gelangt ist, wohin Cusan mit seinen ganz rohen Versuchen gekommen war.

Aus unserer Rechnungt folgt $n = 1,703217$, also noch nicht 2. Es scheint, als habe Huygens deswegen, weil n keine ganze Zahl ist, die Vervielfachung der Verhältnisse nicht zulassen wollen. Auch begreift man in der That nicht sogleich, wie im 40sten Satze die Vervielfachung nach einer gebrochenen, selbst irrationalen Zahl Statt haben kann, da im 37sten und 38sten Satze, auf welche der 39ste sich gründet, von dem der 40ste gewissermaßen nur einen Zusatz ausmacht, bloß zweyfache Verhältnisse vorkommen. Allein die Sache erklärt sich dadurch, daß zwar die Prämissen des 39sten Satzes richtig, die Schlußfolge hingegen falsch ist. Gregorius schließt nämlich so. Wenn $L : M = m (P : Q)$, [das m fache des Verhältnisses $P : Q$] und $P : Q = m (R : S)$; ferner $L : T = m (P : V)$, und $P : V = m (R : W)$; weiter $X : M = m (Y : Q)$, und $Y : Q = m (Z : S)$; endlich $X : T = m (Y : V)$ und $Y : V = m (Z : W)$: so ist auch das Verhältniß $L + X : M + T$ von dem Verhältnisse $P + Y : Q + V$ ein eben so vielfaches als das Verhältniß $P + Y : Q + V$ von dem Verhältnisse $R + Z : S + W$ ist. Das ist aber gar nicht allgemein richtig, wie Descartes auch in einem von Huygens mitgetheilten Briefe an Schooten bemerkt hat. Gregorius hat sich mit seiner Lehre von den Proportionalitäten, worin er die Größen der Verhältnisse durch ihre Exponenten mißt, selbst verwirrt.

Es würde, wie Huygens gezeigt hat, nichts helfen, wenn man zur Rettung und Vertheidigung des Gregorius die Redensart ein Verhältniß enthalte ein anders eben so oft, als ein drittes Verhältniß, ein viertes enthält, von einer Proportion zwischen den Exponenten der Verhältnisse auslegen wollte. In diesem Falle nämlich ist

$$\frac{53}{203} : \frac{5}{11} = \frac{5}{11} : \frac{1}{m}, \text{ woraus } m = \frac{6413}{5075},$$

und das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange $1 : \pi = 7751 : 17232 \sqrt{3} = 1 : 3{,}85069$ hervorgeht. Da π die Fläche des Kreises für den Halbmesser 1 ausdrückt, das dem Kreise bey derselben Größe des Halbmessers umschriebene reguläre Sechseck aber $2\sqrt{3}$ oder 3,4641 ist; so würde folgen, daß der Kreis größer als dieses Sechseck sey, welches eine Absurdität ist.

Die hier angezogene sehr gut abgefaßte Schrift von Huygens, welcher bey ihrer Bekanntmachung noch sehr jung war, steht in der Sammlung seiner Werke Vol. II. auch ein Schreiben von ihm an einen Vertheidiger des Gregorius.

In Kästners Geschichte der Mathematik, Band III. ist eine ausführliche Nachricht von dem Werke des Gregorius enthalten, die freylich größtentheils nur ein Inhaltsverzeichniß ist.

Die Construction, welche daselbst nach Gregorius angeführt wird, ist bey der Prüfung von Huygens dadurch umgangen, daß dieser ohne Gregors Sätze ein Paar Abschnitte eines Kreises angab, aus deren bekanntem Verhältnisse sich das Verhältniß eines gegen die ganze Kreisfläche in gegebenem Verhältniß stehenden Ausschnittes zu einem geradlinigen Dreyecke ergeben würde.

55ª. Nach diesem mißrathenen Versuche ist es nicht nöthig, sich bey den nachher gemachten aufzuhalten. Kästner führt in seiner Geometrie aus dem Mercure de France an, daß in Frankreich einer nach 25 jähriger Bemühung herausgebracht habe, der Durchmesser könne sich wohl zum Umfange verhalten wie 23099 : 72576, das wäre wie 1 : 3,1419. Die 25 Jahre sind verschwendet. — Im Jahre 1776 kam zu Berlin heraus: Neuerfundene mathematische Rechenschule, in welcher eine wahre Cirkelquadratur durch arithmetische Progressionstabellen, und alles bestimmen-

de unveränderliche mathematische Linien und mathematische Quadratpuncte gründlich bewiesen wird, von P. Fr. Hesse. Der Titel zeigt schon den Geist der Schrift. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange soll seyn 99 : 311, d. i. 1 : 3,14141, welches schon in der vierten Decimalstelle abweicht. Aus dem Buche erfährt man, daß ein Obristlieutenant Corsonich in Polen auch eine Quadratur angegeben, und einen Preis von 50 Ducaten demjenigen versprochen hat, der ihre Unrichtigkeit beweisen könnte. Nach ihm ist das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange wie 8 : 25, welches unter allen angeblichen Verhältnissen eins der Fehlerhaftesten ist. Die beiden Brüche

$\frac{25}{8}$ und $\frac{311}{99}$ sind übrigens in der Reihe der zwischen

den beiden Brüchen $\frac{3}{1}$ und $\frac{331}{106}$, welche kleiner als

$\frac{\text{Peripherie}}{\text{Diameter}}$ sind, eingeschalteten Näherungsbrüchen der

erste und vierzehnte. Man sehe den Artikel: Kettenbruch 12 und 13. — Auf das Verhältniß $1225 : 3844 = 35^2 : 62^2$ für den Durchmesser und Umfang sind mehrere fast zu gleicher Zeit verfallen, ein Rittmeister Leistner im Jahre 1737, um dieselbe Zeit ein Prediger Merkel, der aber seine Zahlen erst 1751 bekannt machte, und ein Schulcollege Böhm im Jahre 1765. In eben diesem Jahre ließ auch ein Professor Bischoff zu Stettin die Schrift des Merkel mit seinen Anmerkungen wieder auflegen. Darin erklärt er die Merkelsche Quadratur, ohngeachtet ihrer schon von Krafft erhaltenen Widerlegung, und trotz der Kenntniß von den bessern Bemühungen Ludolphs von Cölln und Sherwins, für die wahre und vollkommene. Merkels und Bischoffs Proben der von ihnen empfohlenen Quadratur sind so beschaffen, daß

jedes Paar beliebig angenommener Quadratzahlen für den Durchmesser und Umfang ihnen Genüge thut, wie in der Pseudoquadratur des Cirkels von Coriarius, Eutin 1766, gewiesen wird. Das Verhältniß 1225:3844 ist = 1 : 3,138 ..., also noch nicht einmahl so genau als das Archimedische 7 : 22. Indeß erhält es dadurch einen gewissen Werth, daß, weil seine Glieder Quadratzahlen sind, vermittelst desselben das Verhältniß des Durchmessers zu der Seite eines dem Kreise gleichen Quadrats, welches Verhältniß $2 : \sqrt{\pi}$ ist, rational ausgedrückt wird, nähmlich 35 : 31. Durch die Verwandlung von $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ in einen Kettenbruch lassen sich mehrere Paare Quadratzahlen finden, die das Verhältniß des Quadrats vom Durchmesser zu der Kreisfläche desto genauer angeben, je größer sie sind. Unter dieser giebt das Verhältniß 1521 : 1936 das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie wie 484:1521, welches in seinen Gliedern aus kleineren Zahlen besteht, als das Merkelsche, und doch genauer ist. Es ist nämlich = 1 : 3,14256. Ein Franzose Comiers hat dasselbe schon 1676 im Journal des Savans bekannt gemacht. M. s. auch Lamberts Abhandlung für die Erforscher der Quadratur des Cirkels in dessen Beyträgen Th. II. S. 142 u. folgg.

55[b]. Mit den unwissenden Cirkelquadrirern sind nicht in eine Klasse zu setzen diejenigen, welche Constructionen angegeben haben, wodurch eine dem ganzen Umfange des Kreises oder auch einem Theil desselben, sehr nahe gleich kommende gerade Linie gefunden wird. Dergleichen Construction zur Verwandelung der Peripherie in eine gerade Linie ist selbst von Euler vorhanden. M. s. Kraffts Instit. geom. subl. §. 135. Eine leicht ausführbare und doch sehr genaue ist folgende. Man errichte in den Endpuncten des Durchmessers an einerley Seite desselben zwey Perpendikel, wovon das eine dreymahl so groß als der Halbmesser, das andere

aber der Tangente des Bogens von 30° gleich ist. Die gerade Linie, welche die Endpuncte beider Perpendikel verbindet, ist sehr nahe der halben Peripherie gleich. Diese Construction hat Kochanski in den Act. Lipsiens. vom Jahre 1685 bekannt gemacht. Sie setzt das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie wie 1 : 3,141533 voraus, welches erst in der fünften Stelle von dem wahren abgeht. Olbers hat auch eine solche Construction angegeben, welche in Brandes Lehrbuche der Mathem. Th II. S. 222. mitgetheilt wird, und $\pi = 3,14162$ macht.

56. David Gregory hatte in der (4.) angeführten Schrift zu beweisen gesucht, daß für die Kreisfläche kein analytischer vollständiger Ausdruck mittelst des Quadrats des Durchmessers gefunden werden könne. Huygens ward dadurch nicht befriedigt, zwischen beiden Geometern entstand daraus ein Schriftwechsel, der in Huygens Werken zu finden ist.

57. Die Reihen, welche die Kreisbogen durch ihren Sinus oder ihre Tangente ausdrücken, oder auch diese durch jene angeben, haben zwar kein letztes Glied, doch könnte darum ein Bogen zugleich mit seinem Sinus oder seiner Tangente zu dem Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Denn wenn ein Bruch $\frac{m}{n}$, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, durch die wirkliche Division in Decimaltheilen entwickelt wird, so wird der Quotient, außer den Fällen, da n bloß 2 und 5 als Factoren enthält, eine unendliche Reihe von Decimaltheilen. Auf eine ähnliche Art könnte es sich hier auch verhalten.

58. Die Theorie der Kettenbrüche hilft uns aus der Ungewißheit. Wenn der Quotient zweyer ganzen Zahlen in einen Kettenbruch verwandelt wird, so bricht er einmahl ab, weil der immer sich verkleinernde Rest von den successiven Divisionen zuletzt Eins wird, wodurch

den

bey der folgenden Division kein Rest bleibt. Nun ist in dem Artikel, Kettenbruch, 48. gefunden, daß

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{etc.}}}}}}$$

ist. Dieser Bruch kann nicht abbrechen. Daher ist π kein rationaler Bruch.

59. Aus dieser Theorie läßt sich auch erweisen, daß die Tangente eines Kreisbogens nothwendig irrational ist, wenn der Bogen ein rationales Verhältniß zum Halbmesser hat; und daß der Bogen zu einer rationalen Tangente (in Beziehung auf den Halbmesser) irrational ist.

60. Es ist nämlich, wenn $t = \text{tang}\,\varphi$ ist,

$$\frac{\varphi}{t} = \cfrac{1}{1+\cfrac{tt}{3+\cfrac{4tt}{5+\cfrac{9tt}{7+\cfrac{16tt}{9+\cfrac{25tt}{11+\text{etc.}}}}}}}$$

welche Reihe nicht abbricht, daher für rationale t der Bogen φ irrational ist. — Den Bruch findet man nach der Methode, Kettenbruch, 60, aus der Formel, $\frac{\varphi}{t} = 1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{7}t^6 + \text{etc.}$ (Cyklometrie, 10.), indem hier t^2 ist, was dort z. Man hat nur noch nöthig, die unreinen Brüche auf reine zu bringen, nach Kettenbruch, 26. Da der Kettenbruch aus einer Reihe, welche nach einem bestimmten Gesetze fortgeht, auf eine gleichförmige Art gebildet wird, so muß für denselben ein Gesetz vorhanden seyn, dasjenige, welches sich auf eine ganz unzweydeutige Art ergiebt.

Die Rechnung zeigt auch, daß der Rest von den Divisionen nicht Null werden kann.

61. Auch ist, um die Tangente durch den Bogen auszudrücken.

$$\frac{\text{tang}\,\varphi}{\varphi} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\varphi^2}{3 - \cfrac{\varphi^2}{5 - \cfrac{\varphi^2}{7 - \cfrac{\varphi^2}{9 - \cfrac{\varphi^2}{11 - \text{etc.}}}}}}}$$

Die sehr einfache Form dieses Bruchs zeigt, daß er ins Unendliche fortgeht.

62. Der Bruch wird aus den Reihen für den Sinus und Cosinus (Cyklometrie, 5, 6.) hergeleitet, da

$$\frac{\text{tang}\,\varphi}{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\varphi . \cos\varphi}$$ ist.

Es sey

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - C\varphi^6 + D\varphi^8 - \text{etc.}$$

so ist

$$\cos\varphi = 1 - 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 - 7C\varphi^6 + 9D\varphi^5 - \text{etc.}$$

Nun verfahre man mit dem Bruche

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi . \cos\varphi} = \frac{1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - \text{etc.}}{1 - 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 - \text{etc.}}$$

eben so wie bey der Verwandlung eines numerischen Bruches in einen Kettenbruch, nach dem Artikel, Kettenbruch, 3. Das b daselbst ist hier der Zähler, a der Nenner, und m der Quotient des Nenners durch den Zähler. Weil hier der Zähler größer ist als der

Nenner, (die Tangente eines Bogens ist größer als der Bogen), so werden die Reste zum Theil negativ.

63. Die Dividenden sind nach der Reihe folgende, welche, den ersten ausgenommen, auch Divisoren, und, außer den beiden ersten, auch Reste sind.

I. $1 - 3\,A\varphi^2 + 5\,B\varphi^4 - 7\,C\varphi^6 + 9\,D\varphi^8 - 11\,E\varphi^{10} + \text{etc.}$

II. $1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - C\varphi^6 + D\varphi^8 - E\varphi^{10} + \text{etc.}$

III. $-\frac{1}{3}\varphi^2 + \frac{1}{5}A\varphi^4 - \frac{1}{7}B\varphi^6 + \frac{1}{9}C\varphi^8 - \frac{1}{11}D\varphi^{10} + \text{etc.}$

IV. $-\frac{1}{3\cdot5}\varphi^2 + \frac{1}{5\cdot7}A\varphi^4 - \frac{1}{79}B\varphi^6 + \frac{1}{9\cdot11}C\varphi^8 - \frac{1}{11\cdot13}D\varphi^{10} + \text{etc.}$

V. $+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\varphi^4 - \frac{1}{5\cdot7\cdot9}A\varphi^6 + \frac{1}{7\cdot9\cdot11}B\varphi^8 - \frac{1}{9\cdot11\cdot13}C\varphi^3 + \text{etc.}$

VI. $+\frac{1}{3\cdot\cdot9}\varphi^4 - \frac{1}{5\cdot\cdot11}A\varphi^5 + \frac{1}{7\cdot\cdot13}B\varphi^8 - \frac{1}{9\cdot\cdot15}C\varphi^{10} + \text{etc.}$

VII. $-\frac{1}{3\cdot\cdot11}\varphi^6 + \frac{1}{5\cdot\cdot13}A\varphi^8 - \frac{1}{7\cdot\cdot15}B\varphi^{10} + \text{etc.}$

In jedem Reste setzt man für A, B, C, D, etc. ihre Werthe, $\frac{1}{2.3}$; $\frac{A}{4.5}$; $\frac{B}{6.7}$; $\frac{C}{8.9}$, u. s. w. Die Quotienten, welche a. a. O. durch m, n, p, q, etc. bezeichnet sind, sind hier abwechselnd positiv und negativ, nämlich

$$+1; -\frac{3}{\varphi^2}; +5; -\frac{7}{\varphi^2}; +9; -\frac{11}{\varphi^2},$$

u. s. w.

64. Es ist nun, wenn n, q, s, etc. blos die Quantität bezeichnen, und die Negation durch das Vorzeichen bemerkt wird, der Kettenbruch daselbst

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{-n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{-q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{-s + \text{etc.}}}}}}}$$

Die Negation nämlich betrifft jedesmahl blos den Quotienten, dagegen das Vorzeichen — vor einem ergänzenden Bruche den ganzen Bruch mit allen partiellen Brüchen in demselben angeht (a. a. O. 17.). Will man das Vorzeichen — dem ergänzenden Bruche, das ist, dem Zähler geben, so müssen beide Theile des Nenners ihr Vorzeichen ändern, und so nach wird

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{m - \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{p - \cfrac{1}{q - \cfrac{1}{r - \cfrac{1}{s - \text{etc.}}}}}}}$$

Setzt man nun für m, n, p, q, etc. die gefundenen absoluten Werthe der Quotienten, so hat man noch den Divisor φ^2 aus den Quotienten wegzuschaf-

sen (a. a. O. 26.). So erhält man den angegebenen Kettenbruch für $\frac{\tan\varphi}{\varphi}$.

65. Daß die Form dieses Bruchs in allen Gliedern dieselbe bleibe, welches sich in den ersten berechneten zeigt, erhellt wie in (60.). Einen förmlichen Beweis, daß die Reste bey den successiven Divisionen das Gesetz durchgehends beobachten, welches in den Reihen III. u. f. offenbar ist, giebt Lambert in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1761. in der Abhandlung: Sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Man sehe auch in desselben Beyträgen zur Mathematik, Th. II. den Aufsatz für die Erforscher der Quadratur des Circuls.

Auch vergleiche man die Methode von la Grange in der Abhandlung, über den Gebrauch der continuirlichen Brüche, Nouveaux mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1776, p. 253. 255. — Legendre leitet in seinen Elemens de Géometrie den Kettenbruch für $\frac{\tan\varphi}{\varphi}$ aus einer linearen Differenzengleichung des zweyten Grades ab, und gründet alsdann den Beweis, daß die Tangente zu einem rationalen Bogen irrational ist, auf den Satz, daß wenn die Glieder eines Kettenbruchs einmahl kleiner als 1 werden und es bleiben, der Werth des Kettenbruchs irrational sey.

66. Wenn man den Zähler

$$1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 = C\varphi^6 + \text{etc.}$$

zum ersten Dividendus macht, also den Nenner zum ersten Divisor, so wird die Form der Dividenden sehr zusammengesetzt, und der Kettenbruch erhält eine Gestalt, worin das Gesetz der einzelnen Brüche nicht offenbar ist.

Es ist sonach

$$\frac{\text{tang}\,\varphi}{\varphi} = 1 + \cfrac{1}{3:\varphi^2 - \cfrac{1}{5:6 - \cfrac{1}{36.7:\varphi^2 - \cfrac{1}{1:10 - \text{etc.}}}}}$$

Der erste hier weggelassene Bruch ist $\frac{1}{15.15.11:\varphi^2}$.

67. Es sey nun AB (Fig. 10.) der Quadrant eines Kreises, dessen Halbmesser AC $=$ a ist. In demselben seyn zwey rechtwinklichte Coordinaten, AP $= x$, PM $= y$, so ist die Gleichung für dieselben, $2ax - xx = yy$. Die Area APM sey Z, so ist $\partial Z = y\partial x$ (8), das ist $\partial Z = \partial x \sqrt{(2ax - xx)}$. Aus Integralformel, 58. ist

$$Z = \frac{aa}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(2ax - xx)}} - \frac{a-x}{2}\sqrt{(2ax - xx)},$$

und eben daher, 55.

$$Z = \frac{aa}{2}\,\text{Ang. sin. vers}\,\frac{x}{a} - \frac{a-x}{2}\sqrt{(2ax - xx)}.$$

Hier ist Ang. sin. vers $\frac{x}{a}$ der Kreisbogen mit dem Halbmesser $= 1$ für den Winkel ACM, da x der lineärische Sinus versus für den Halbmesser a, und $\frac{x}{a}$ der numerische Sinus versus für den Halbmesser $= 1$ ist. Ferner ist a. Ang. sin. vers. $\frac{x}{a}$ der Bogen AM, und der erste Theil von Z der Sector ACM. Der zweyte subtractive Theil ist das Dreyeck PCM, da $\sqrt{(2ax - xx)} = y = $ PM ist. Es ist nach der Integration keine Constans beygefügt, weil $Z = 0$ ist, wenn $x = 0$ gesetzt wird.

68. Es ist zu bemerken, daß zu einer Abscisse x unendlich viele Z gehören, nämlich nicht blos der in der Figur erscheinende Abschnitt APM, sondern auch alle Vielfache der ganzen Kreisfläche + APM. Daher giebt es keine algebraische Gleichung zwischen x und Z, oder, die unbestimmte Quadratur des Kreises ist unmöglich.

69. Gregor von St. Vincent schmeichelte sich, die Quadratur des Kreises durch Cubirung eines parabolischen Körpers zu finden (49. ff.). Man sieht nun, daß eines nicht leichter ist als das andere, eigentlich dasselbe bis auf einen constanten Factor. Er bemerkte zwar richtig, daß es darauf ankäme, den Quadranten AMB (Fig. 10.) so einzutheilen, daß AM und MB oder die zugehörigen Sectoren, ein rationales Verhältniß haben, und die Segmente APM, CPMB ebenfalls. Das trifft aber nicht zusammen. Man nehme an, daß ACM : MCB = m : n, und APM : CPMB = p : q seyn, so ist ACM : ACB = m : m + n, und ACB : APM = p + q : p. Folglich ist ACM : APM = m (p + q) : p (m + n), und ACM : CPM = mp + mq : mq — np. Aber zwischen dem Sector ACM und dem Dreyeck CPM findet keine algebraische Vergleichung Statt, weil zu demselben Dreyeck unendlich viele Sectoren gehören.

Quadraturen an den Kegelschnitten.

70. Es ist AMN (Fig. 11.) eine Parabel, deren Axe AX ist. Der Parameter sey = a, die Coordinaten AP = x, PM = y, so ist ax = yy. (Parabel). Die Differentialgleichung ist $a\partial x = 2y\partial y$.

Daher $y\partial x = \frac{2y^2\,\partial y}{a}$. Es sey die Fläche APM = Z,

so ist $\partial Z = \frac{2y^2 \partial y}{a}$, und $Z = \frac{2y^3}{3a} = \frac{2}{3} xy$. Das geradlinichte Dreyeck APM ist $= \frac{1}{2} xy$. Es verhält sich also das parabolische Trilineum zu dem Dreyeck wie 4 : 3. Das Rechteck von der Ordinate und der Abscisse verhält sich zu der Area der Parabel wie 3:2. Von dem Verfahren, welches Archimedes zur Quadrirung der Parabel angewandt hat, s. den Artikel, Exhaustion.

71. Wenn AX irgend ein Durchmesser, und die Ordinate PM die Hälfte der ganzen Chorde, der Ordinatenwinkel $= \alpha$, so ist die Area der Parabel

$$APM = \frac{2}{3} xy \,.\, \sin \alpha,$$

(10.), und das Parallelogramm von der Ordinate und Abscisse mit diesen Winkel verhält sich zu der Area der Parabel wie 3 . 2.

72. Es sey F der Brennpunct der Parabel, die Länge oder der Radius FM $= u$, der Winkel AFM $= \varphi$, so ist die Area

$$AFM = \frac{1}{6} u \sin \varphi \; (a - u \cos \varphi).$$

Denn es ist diese Area $= \frac{2}{3} xy - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4} a\right)y$.

Ferner ist $y = u \sin \varphi$, und, für den Fall der Figur

$$x = \frac{1}{4} a + u \cos MFP = \frac{1}{4} a - u \cos \varphi.$$

wo $\cos \varphi$ negativ ist. Setzt man diese Werthe für x und y, so wird der angegebene Werth erhalten.

73. Durch φ allein ausgedrückt ist die Area

$$AFM = \frac{1}{24} aa. \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}. \frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Denn es ist (Parabel, 6.) $u = \frac{a}{2(1+\cos\varphi)}$.

Setzt man diesen Werth in den vorhergefundenen Ausdruck für die Area, so ergiebt sich gleich der angegebene Werth derselben.

74. Da dieser Ausdruck noch zu sehr zusammengesetzt ist, so muß man suchen, ihn abzukürzen. Es ist

$$\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \tang \frac{1}{2}\varphi, \text{ und } \frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi} =$$

$\frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2\right)$. (Goniometrie, 38.). Nun ist

$$\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = 2 - \frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi}, \text{ also ist}$$

$$\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1}{2}\left(3 + \tang\frac{1}{2}\varphi^2\right). \text{ Folglich}$$

ist Area $AFM = \frac{1}{16} aa \left(\tang\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3}\tang\frac{1}{2}\varphi^3\right)$.

75. In verschiedenen Parabeln verhalten sich, bey gleichen Winkeln des Radius FM mit der Axe die Flächenräume AFM wie die Quadrate der Parameter. Dieser Satz wird in der Astronomie für die parabolische Laufbahn eines Kometen benutzt.

76. Zur Übung in der Integralrechnung ist es dienlich, die Area AFM auch aus der Differentialformel (11.), $\frac{1}{2} uu\partial\varphi$, herzuleiten. Die Area AFM sey

= U, so ist, wenn für u dessen Werth gesetzt wird, $\partial U = \frac{aa\partial\varphi}{8\,(1-\cos\varphi)^2}$. Die Integration einer Formel dieser Art hat einige Schwierigkeit (Integralformel, 125.). Auch sieht man aus dem Werthe der Area in (74.), daß es nicht leicht seyn möchte, auf dieselbe unmittelbar durch Integration zu kommen. Allein in dem gegenwärtigen Falle, da hier die a und b a. a. O. jedes = 1 sind, kann man sich durch eine Substitution helfen. Es ist $1+\cos\varphi = \frac{2}{1+\tang\frac{1}{2}\varphi^2}$, (Goniom., 42.), und $\frac{1}{2}\partial\varphi = \frac{\partial\tang\frac{1}{2}\varphi}{1+\tang\frac{1}{2}\varphi^2}$, (Differentialformeln, 38.). Man setze $\tang\frac{1}{2}\varphi = t$, so ist $\frac{\partial\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = \frac{1}{2}(1+tt)\partial t$, also $\partial U = \frac{1}{16}aa(1+tt)\partial t$, und $U = \frac{1}{16}aa \times \left(t+\frac{1}{3}t^3\right)$, wie vorher.

Die Erleichterung, welche die hier gebrauchte Substitution verschafft, beruht darauf, daß der Differentialfactor zu $\partial\tang\varphi$ eine rationale Function von $\tang\varphi$ selbst ist, dagegen bey $\partial\sin\varphi$ oder $\partial\cos\varphi$ eine irrationale Function von $\sin\varphi$ oder von $\cos\varphi$.

77. Oder man setze statt $1+\cos\varphi$ dessen Werth, $2\cos\frac{1}{2}\varphi^2$, so ist $\partial U = \frac{aa}{8}\cdot\frac{\partial\varphi}{4\cos\frac{1}{2}\varphi^4}$. Aus Integralformel, (121.) ist

$$\int \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^3} + \frac{2}{3}\int\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$ Also ist

$$\frac{1}{2}\int\frac{\partial\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

Man multiplicire Zähler und Nenner mit $2\cos\frac{1}{2}\varphi$, um φ statt $\frac{1}{2}\varphi$ einzuführen, so ist $\frac{1}{2}\int\frac{\partial\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} =$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\cdot\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$ und

$$U = \frac{aa}{24}\cdot\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\cdot\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$ wie in (73.).

78. Man kann auch in der Differentialformel, $\partial U = \frac{1}{2}uu\partial\varphi$ das Differential $\partial\varphi$ durch ∂u und eine Function von u ausdrücken. Es ist $\cos\varphi = \frac{a}{2u} - 1$, also $\sin\varphi\partial\varphi = \frac{a\partial u}{2uu}$. Da $\sin\varphi = \frac{a}{2u}\sqrt{\frac{4u-a}{a}}$ ist, so ist $\partial\varphi = \frac{\partial u}{u}\sqrt{\frac{a}{4u-a}}$ und daher $\partial U = \frac{1}{2}u\partial u\sqrt{\frac{a}{4u-a}}$. Man setze

zufolge Integralformel (48.), $4u - a = \frac{zz}{a}$, das ist,

$4u = \frac{aa + zz}{a}$. Daraus ist $2\partial u = \frac{z\partial z}{a}$,

und $\frac{1}{2} u\partial u = \frac{(aa + zz)\, z\partial z}{16\, aa}$; also ist

$\partial U = \frac{(aa + zz)\, \partial z}{16\, a}$, folglich $U = \frac{aaz + \frac{1}{3}z^3}{16\, a}$.

Die Constante ist $= 0$, weil $U = 0$ für $u = \frac{1}{4} a$, das ist für $z = 0$.

Es ist $z = a \tang \frac{1}{2} \varphi$. Denn es ist

$zz = 4au - aa = \frac{2\, aa}{1 + \cos \varphi} - aa = aa \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$

$= aa \tang \frac{1}{2} \varphi^2$, (Goniometrie, 41.).

79. Für $\varphi = 90^\circ$ ist $t = 1$, und die Area der Parabel $= \frac{1}{12} aa$. Man setze diese Area $= A$, so ist $U = \frac{1}{4} A\,(3t + t^3)$. Dieses ist eine bequeme Formel zur Berechnung der Zeiten in einer parabolischen Laufbahn.

80. Es sey AMB (Fig. 12.) eine halbe Ellipse, deren große Axe AB $= 2a$, die conjugirte $= 2CD = 2b$ ist. Die Coordinaten seyn $AP = x$, $PM = y$, so ist die Gleichung für dieselbe, $b^2 (2ax - xx) = a^2 y^2$. Also ist $y\partial x =$

$\frac{b\partial x}{a} \sqrt{(2ax - xx)}$. Es ist das Differential für die Kreisfläche, deren Halbmesser $= a$ ist, mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt. Nämlich die Ordinaten an der Ellipse und an dem Kreise mit dem Halbmesser a verhalten sich bey denselben Abscissen wie b : a (Ellipse, 5.). Die Constante ist hier $= 0$.

Daher ist die Area APM $= \frac{1}{2} ab \,\text{Ang. sin verſ} \frac{x}{a} - \frac{b(a-x)}{2a} \sqrt{(2ax - xx)}$. Die Area ACD, nämlich der vierte Theil der Ellipse, ist $= \frac{1}{4} ab\pi$, weil Ang. sin verſ $\frac{1}{1} = \frac{1}{2}\pi$ ist. Die Fläche der ganzen Ellipse ist $= ab\pi$. Die Kreisfläche, deren Halbmesser $= a$ ist, ist $= aa\pi$.

81. Oder: Area APM $= \frac{1}{2} ab \,\text{Ang. sin} \frac{y}{b} - \frac{1}{2}(a-x)y$. Es ist nämlich Ang. sin vers $\frac{x}{a} = \text{Ang. cos} \frac{a-x}{a} = \text{Ang. sin} \frac{\sqrt{(2ax - xx)}}{a} = \text{Ang. sin} \frac{y}{b}$.

82. Daher ist der elliptische Sector ACM $= \frac{1}{2} ab \,\text{Ang. sin} \frac{y}{b}$.

83. Die beiden Brennpuncte seyn F, f, u
$\left.\begin{matrix}CF\\Cf\end{matrix}\right\} = c$, so ist die Area AFM $= \frac{1}{2}$ab Ang. sin

$+ \frac{1}{2} cy$.

84. Es sey der Radius FM $= u$; der Wi
kel AFM $= \varphi$, so ist die Gleichung für diese Größ
$bb = (a - c \cdot \cos\varphi)\, u$ (Ellipse, 12.). D
$y = u \sin\varphi$ ist, so ist die Area AFM $=$
$\frac{1}{2}$ ab Ang. sin $\frac{b \sin\varphi}{a - c\cos\varphi} + \frac{bbc \sin\varphi}{2(a - c\cos\varphi}$

85. Man setze Ang. sin $\frac{b \sin\varphi}{a - c\cos\varphi} = \psi$,

so ist Area AFM $= \frac{1}{2}$ ab $\psi + \frac{1}{2}$ bc $\sin\psi$.

86. Die Area AFM sey $= Z$, so ist (nach 11.

$\partial Z = \frac{1}{2} uu\partial\varphi$, das ist $\partial Z = \frac{b^4 \partial\varphi}{2(a - c\cos\varphi)^2}$

Das Integral dieser Formel ist in dem Artikel, Inte
gralformel, 129., durch eine Reihe gefunden, die nac
den Cosinus der Vielfachen von φ fortgeht. Die un
mittelbare Integration zu dem vollständigen Integra
ist schwierig, da die Form der beiden Stücke desselbe
sich nur errathen läßt. Es ist nützlich, jene Integral
formel zu differentiiren, um zu sehen, wie sich bey die
ser Operation mehreres gegen einander hebt, und da
Differential eine Gestalt erhält, in welcher die Form
des Integrals nicht zu erkennen ist.

87. Es sey die Fläche der Ellipse zu der Are
AFM wie 2π (oder vier rechte) zu einem Winkel ω

so ist ω was in der Astronomie die **mittlere** Anomalie heißt, da φ die **wahre** bedeutet. Auch sey $\frac{c}{a} = e$, als die Excentricität in Beziehung auf die halbe große Axe $= 1$. So ist Area AFM $= \frac{1}{2} ab\omega$, und $\omega = \text{Ang sin}\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin\varphi}{1-e\cos\varphi}\right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{e\sin\varphi}{1-e\cos\varphi}$. Man sieht, daß aus der wahren Anomalie φ die mittlere ω directe gefunden werden kann, jene aber aus dieser nur durch Annäherung.

88. Der Winkel ψ heißt die Anomalie des Excentri oder die excentrische. Bey der Anwendung dieses Winkels ist $\omega = \psi + e \sin\psi$. Dieser Winkel ψ wird aus ω viel leichter gefunden als der Winkel φ. Es muß alsdann aber noch φ aus ψ hergeleitet werden.

89. Da $\sin\psi = \frac{b\sin\varphi}{a-c\cos\varphi}$ ist, und $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ hieraus nicht gefunden werden können, weil die Wegschaffung der Irrationalität auf eine quadratische Gleichung für $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ führt, so suche man, ob nicht eine andere Gleichung sich aus jener herleiten lasse, in welcher $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$, eins ohne das andere vorkommen. Dieses wird erhalten, wenn $\cos\psi$ durch eine Function von φ gesucht wird. Es ist $\sin\psi^2 (a - c\cos\varphi)^2 = b^2 \sin\varphi^2$, und daraus $\cos\psi^2 (a - c\cos\varphi)^2 = a^2 - 2ac\cos\varphi + c^2\cos\varphi^2 - b^2\sin\varphi^2$, das ist, weil $a^2 = b^2 + c^2$ ist, $\cos\psi^2 (a - c\cos\varphi)^2 = a^2\cos\varphi^2 - 2ac\cos\varphi + c^2 . = (a\cos\varphi - c)^2$, oder $\cos\psi (a - c\cos\varphi) = a\cos\varphi - c$. Folglich $\cos\varphi = \frac{c + a\cos\psi}{a + c\cos\psi}$.

Hieraus ist $a - c\cos\varphi = \frac{aa - cc}{a + c\cos\psi} = \frac{bb}{a + c\cos\psi}$, und ferner $\sin\varphi = \frac{b\sin\psi}{a + c\cos\psi}$

90. Eine noch bequemere Formel, den Winke φ aus dem ψ herzuleiten, ist in dem Artikel, la Gran ge's Lehrsatz, 23., enthalten, wo auch eine Formel für u (dort r) durch ψ sich findet. Man vergleiche auch den Artikel, Keplers Aufgabe.

91. Es sey AM (Fig. 13.) ein Zweig einer Hy perbel, deren CX, Scheitel A, halbe Hauptaxe CA=a die halbe conjugirte Axe = b, Abscisse AP=x; Or dinate PM = y. Die Gleichung ist $b^2 (2ax + xx) = a^2 y^2$. Die Area APM sey = Z, so ist $\partial Z = y\partial x = \frac{b}{a}\partial x \sqrt{(2ax + xx.)}$

Die Integration giebt (Integralformel, 58. 56.

$$Z = \frac{b}{2a}(a + x)\sqrt{(2ax + xx)} - \frac{1}{2}ab\int\frac{\partial x}{\sqrt{(2ax + xx}}$$

das ist $Z = \frac{b}{a}(a + x)\sqrt{(2ax + xx)} - \frac{1}{2}ab\log.\text{nat}\frac{a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}}{a}$.

Die Constante a in dem Bruche ist so bestimmt, da der Bruch = 1 für x = 0 wird, daher der Loga rithmus des Bruchs = 0 wird, so wie der erste The von Z, damit die Area bey A anfange.

92. Oder, da $b\sqrt{(2ax + xx)} = ay$ ist,

$$Z = \frac{1}{2}(a + x)y - \frac{1}{2}ab\log.\frac{b(a + x) + ay}{ab}$$

93. Der hyperbolische Sector ACM zwischen den geraden CA, CM und dem Bogen AM ist

$$= \frac{1}{2} ab \log. \frac{b(a+x)+ay}{ab} = \frac{1}{2} ab \log \frac{ab}{b(a+x)-ay}.$$

Denn es ist der Sector = ΔCPM — Area APM, und $\Delta CPM = \frac{1}{2}(a+x)y$. Daraus folgt der erste angegebene Werth des Sectors.

In diesem multiplicire man Zähler und Nenner des Bruches mit $b(a+x)-ay$, so wird der Zähler $= b^2(a+x)^2 - a^2y^2$. Nun ist $b^2(CP^2 - CA^2) = a^2 . PM^2$ (Hyperbel, 3.) das ist $b^2(a+x)^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Daraus entsteht der zweyte angegebene Werth. — Für die gleichseitige Hyperbel, wo $b=a$ ist, ist der Sector ACM $= \frac{1}{2} aa \log \frac{a+x+y}{a}$

$$= \frac{1}{2} aa \log \frac{a}{a+x-y},$$ und, wenn die Abscisse vom Mittelpuncte an gerechnet $CP = x'$ ist, $= \frac{1}{2} aa \log \frac{x'+y}{a} = \frac{1}{2} aa \log \frac{a}{x'-y}$, wo x' der hyperbolische Cosinus, y der hyperbolische Sinus ist. Die Vergleichung der circulären und hyperbolischen Sectoren findet sich (Goniometrie, 149., und folgg.).

94. Es sey der Winkel MCP $= \varphi$, und CM $= u$, so ist Sector ACM $= \frac{1}{2} ab \log \frac{a \sin\varphi + b\cos\varphi}{b} . \frac{u}{a}$ oder auch

$$\text{Sec. ACM} = \frac{1}{2} ab \log \frac{b}{a\sin\varphi - b\cos\varphi} . \frac{a}{u}.$$

Denn es ist $a + x = u\cos\varphi$; $y = u\sin\varphi$.

H

95. An der gleichseitigen Hyperbel ist Secto

$$ACM = \frac{1}{2} aa \log \left(\cos (45^\circ - \varphi) \cdot \frac{u \sqrt{2}}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} aa \log \left(\frac{1}{\sin (45^\circ - \varphi)} \cdot \frac{a}{u \sqrt{2}} \right),$$ aus

(Goniometrie 53.). Hieraus wird durch Additio

$$\text{Sector } 2\, ACM = \frac{1}{2} aa \log \frac{\cos (45^\circ - \varphi)}{\sin (45^\circ - \varphi)} =$$

$$\frac{1}{2} aa \log \cot (45^\circ - \varphi) = \frac{1}{2} aa \log \text{tg} \ (45^\circ + \varphi$$

folglich Sec. ACM auch $= \frac{1}{4} aa \log \text{tang} \ (45^\circ + \varphi$

96. Es sey F der dem Scheitel A nächste Brenn punct, und $CF = c$, so ist die hyperbolische Area,

$$AFM = \frac{1}{2} cy - \frac{1}{2} ab \log \frac{b(a + x) + ay}{ab}.$$

Denn es ist das Dreyeck $CFM = \frac{1}{2} CF \times P$

$= \frac{1}{2} cy$, und $AFM = \Delta CFM$ — Sect. ACM.

Man bemerke, daß $c = \sqrt{(aa + bb)}$ ist, (Hy perbel, 11. 12.).

97. Es seyn CS, Cs, die Asymptoten der Hy perbel MAm; durch den Scheitel A und einen Pun M der Hyperbel seyn mit der Asymptote Cs die Para lelen AD, ML an die AS gezogen: es ist der Se tor ACM = Quadrilineum $ADLM$.

Denn es ist $CD : CL = ML : AD$ (Hyperb 8.). Wegen dieser Proportion und wegen der gleich Winkel bey D und L ist das Dreyeck $ACM = MC$ (Dreyeck, 30.). Von dem Quadrilineum $ACML$ ne

me man weg das Dreyeck MCL, und von eben demselben das Dreyeck ACD, so bleibt gleiches zurück, daher Sector ACM = ADLM.

98. Man nehme CL, LM zu Coordinaten der Hyperbel, setze CL = t; LM = v, und $\sqrt{(aa + bb)} = c$; es ist Area $ADLM = \frac{1}{2} ab \log \frac{c}{2v}$, oder $ADLM = \frac{1}{2} ab \log \frac{2t}{c}$.

Durch den Scheitel A ziehe man auf AC die senkrechte AB an AS, und verlängere die auf die Axe senkrechte Ordinate PM an dieselbe in Q, so ist CA : AB = CP : PQ. Nun ist AB = b, (Hyperbel, 6.), also ist $PQ = \frac{b(a + x)}{a}$, und $QM = \frac{b(a + x)}{a} - y$, $= \frac{b(a + x) - ay}{a}$. — In dem Dreyecke ACD ist der Winkel CAD = ACs = ACD, also ist CD = AD. Verlängert man AB bis an die Asymptote Cs in b, so ist AB = Ab, und daher BD = CD. Da $CB = \sqrt{(aa + bb)} = c$ ist, so ist $CD = \frac{1}{2} c$, oder $AD = \frac{1}{2} c$. — In den ähnlichen Dreyecken LMQ, DAB ist AD : AB = ML : MQ. Daher ist $\frac{b(a + x) - ay}{a} = \frac{2bv}{c}$, und die Area $ADLM = \frac{1}{2} ab \log \frac{c}{2v}$.

Da $CL \times ML = CD \times AD = CD^2 = \frac{1}{4} CB^2$

ist, so ist $tv = \frac{1}{4} c^2$, und $\frac{c}{2v} = \frac{2t}{c}$, also Area

$ADLM = \frac{1}{2} ab \log \frac{2t}{c}$.

99. Die zweyte dieser Formeln ergiebt sich unmittelbar aus (93.) folgendergestalt. Die gerade PQ schneide den andern Zweig der Hyperbel in m, die Asymptote in q, so ist $Mq = 2PM + MQ = \frac{b(a+x)+ay}{a}$. Da $CL : Mq = QL : QM = BD : BA$ ist, so ist $\frac{b(a+x)+ay}{a} = \frac{2bt}{c}$, und die

Area $ADLM = \frac{1}{2} ab \log \frac{2t}{c}$.

100. Die Gleichung zwischen t und v giebt die Area ADLM unmittelbar. Sie ist $\frac{1}{4} c^2 = tv$. Der Ordinatenwinkel MLS oder ADS sey $= 2\alpha$; die Area $ADLM = Z$, so ist $\partial Z = v\partial t . \sin 2\alpha$, (10.) oder $\partial Z = \frac{1}{4} c^2 . \sin 2\alpha . \frac{\partial t}{t}$. Es ist $\int \frac{\partial t}{t} = \log . nat . \frac{t}{const}$, (Integralformel, 3.), also $Z = \frac{1}{4} c^2 . \sin 2\alpha . \log \frac{t}{const}$. Das Integral soll $= 0$ seyn, wenn $t = CD = \frac{1}{2} c$ ist. Daher ist $Z =$

$\frac{1}{4} c^2 . \sin 2\alpha . \log \frac{2t}{c}$.

Da $ADL = 2\alpha$ ist, so ist $ACL = \alpha$, und

$\frac{1}{4} c^2.\sin 2\alpha = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha.\cos\alpha$. Nun ist $a = c.\cos\alpha$; $b = c.\sin\alpha$, folglich ist Area ADLM $= \frac{1}{2}\, ab \,.\, \log.\frac{2t}{c}$.

101. Wenn die Abscissen CL oder t auf der Asymptote CS in geometrischer Fortschreitung genommen werden, so sind die zugehörigen Flächenräume, wie ADLM in arithmetischer Fortschreitung.

Denn es seyn zwey Abscissen t und τ, so sind die zugehörigen Flächenräume von der Ordinate AD an $= \frac{1}{2}\, ab \,.\, \log \frac{2t}{c}$ und $\frac{1}{2}\, ab \,.\, \log \frac{2\tau}{c}$, deren Unterschied ist $= \frac{1}{2}\, ab \left(\log \frac{2\tau}{c} - \log \frac{2t}{c}\right) = \frac{1}{2}\, ab \log \frac{\tau}{t}$. Ist nun das Verhältniß $t : \tau$ ein gegebenes, so ist $\log \frac{\tau}{t}$ eine gegebene Größe, (Logarithmus, 6.), und die Unterschiede der Flächenräume sind gleich groß.

102. Gregorius von St. Vincent hat diesen Satz schon erwiesen, in dem Opere geometrico, de hyperbola, prop. 109., freylich aus ganz andern Gründen. Er zeigt auch, prop. 106, daß zwey hyperbolische Segmente, die einen gemeinschaftlichen Endpunct haben, gleich groß sind, wenn die Chorde, welche die Summe ihrer Bogen bespannt, die Ordinate zu dem Durchmesser ist, welcher durch den gemeinschaftlichen Endpunct geht, oder diese Ordinate halbirt. Sein Verfahren ist in der That kunstreich.

Einige andere Quadraturen.

103. Die Cissoide ist eine krumme Linie des dritten Grades, deren Gleichung ist $x^3 = (a - x)\, y^2$.

s. Cissoide. Es ist also $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{x^2}{\sqrt{(ax - xx)}}$ und $y\partial x = \partial Z = \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(ax - xx)}}$. Aus Integralformel, 71., ist $Z = -\frac{1}{2}\sqrt{(ax-xx)} + \frac{3a}{4}\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(ax-xx)}}$ ferner $\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(ax-xx)}} = -\sqrt{(ax - xx)} + \frac{1}{2} a \int \frac{\partial x}{\sqrt{(ax-xx)}}$, und $\int\frac{\partial x}{\sqrt{(ax-xx)}} =$ Ang. sin verſ. $\frac{2x}{a}$. Also ist

$$Z = \frac{3}{8} aa \text{ Ang. sin vers.} \frac{2x}{a} - \frac{1}{4}(3a + 2x)\sqrt{(ax-xx)}.$$

Die Constante ist $= 0$. Für $x = \frac{1}{2} a$ ist $Z = \frac{3}{16}\pi aa - \frac{1}{2} aa$, das ist 3 Quadranten des erzeugenden Kreises, minus dem halben Quadrat des Durchmessers. Für $x = a$ ist die ins Unendliche ausgestreckte Area zu dem einem Zweige $= \frac{3}{8}\pi aa =$ dem Dreyfachen des Halbkreises, also die Area zwischen den beiden Zweigen und der Asymptote dem Dreyfachen der Kreisfläche, s. (3.)

104. Die Gleichung für die Conchoide ist $y^2 = \frac{(b + x)^2 (aa - xx)}{xx}$, s. Conchoide, wo nur die Bezeichnungen x und y mit einander vertauscht sind. In Fig. 14. ist AY die gegebene gerade, oder die Asymptote, mit welcher die Ordinaten PM parallel sind. In B ist der Scheitel der obern Conchoide, in D der

untern, C ist der Pol, CRM eine gerade von C nach einem Puncte der Conchoide, auf welcher RM und RN der AB oder AD gleich sind. Es ist AB $= a$; CA $= b$; AP $= x$; PM $= y$. Die Area BPM sey $= Z$. Hier ist $\partial Z = - y\partial x$, weil die Veränderungen von x und Z sich entgegengesetzt sind. Nun ist $y\partial x = \frac{(b + x)\sqrt{(aa - xx)}}{x}\partial x$. Man multiplicire Zähler und Nenner mit $\sqrt{(aa-xx)}$, so wird

$$\partial Z = \frac{bx\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}} + \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{aab\partial x}{x\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{aa\partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

Nun ist aus Integralformel, 61, 54, 49, $Z = \text{Const.} - b\sqrt{(aa - xx)} - \frac{1}{2}x\sqrt{(aa - xx)} - \frac{1}{2}aa \,\text{Ang.}\sin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}ab \times \log\frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{a - \sqrt{(aa - xx)}}$. Für $x = a$ ist $Z = 0$, also ist $\text{Const.} = \frac{1}{2}aa\,\text{Ang}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}aa\pi$, und so ist

$$Z = \frac{1}{4}aa\pi - \frac{1}{2}(2b + x)\sqrt{(aa - xx)} - \frac{1}{2}aa\,\text{Ang.}\sin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}ab\log\frac{a + \sqrt{(aa-xx)}}{a - \sqrt{(aa-xx)}},$$

oder $Z = \frac{1}{2}aa\,\text{Ang.}\cos\frac{x}{a} - \frac{1}{2}(2b + x)\sqrt{(aa - xx)} + ab\log.\frac{a + \sqrt{(aa-xx)}}{x}$.

105. Der Sector BCM der Conchoide ist $= \frac{1}{2}bb\tang\varphi + ab\log.\tang\left(45° + \frac{1}{2}\varphi\right)$

$+ \frac{1}{2} aa\varphi$, den Winkel BCM $= \varphi$ gesetzt.

Denn es sey CM $= u$, so ist $u = \frac{b}{\cos\varphi} + a$, und $uu = \frac{bb}{\cos\varphi^2} + \frac{2ab}{\cos\varphi} + aa$. Der Sector sey $= U$, so ist $\partial U = \frac{1}{2} uu\partial\varphi = \frac{bb\partial\varphi}{2\cos\varphi^2} + \frac{ab\partial\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{2} aa\partial\varphi$. Es ist $\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \partial \operatorname{tang} \varphi$; $\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = \partial \log \operatorname{nat}. \operatorname{tang} (45° + \frac{1}{2}\varphi)$, aus Differentialformel, 38, 42. Folglich ist

$$U = \frac{1}{2} bb \operatorname{tg}\varphi + ab \log.\operatorname{nat}.\operatorname{tg}\left(45° + \frac{1}{2}\varphi\right) + \frac{1}{2} aa\varphi.$$

Die Constante ist $= 0$.

106. Es sey MQ senkrecht auf AY, so ist der Abschnitt ABMQ $= \frac{1}{4} aa \sin 2\varphi +$

$$ab \log.\operatorname{tang}\left(45° + \frac{1}{2}\varphi\right) + \frac{1}{2} aa\varphi.$$

Es ist nämlich $\Delta ACR = \frac{1}{2} bb \operatorname{tang} \varphi$, und $\Delta RQM = \frac{1}{2} aa \sin\varphi . \cos\varphi = \frac{1}{4} aa \sin 2\varphi$.

107. Um dieses Integral durch x auszudrucken, bemerke man, daß $a\cos\varphi = x$; $a\sin\varphi = \sqrt{(aa-xx)}$;

und tang $\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right) = \frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} =$
$\frac{x}{a - \sqrt{(aa - xx)}} = \frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{x}$, (Goniometrie, 39.), ist. Auch ist $\varphi = \text{Ang}.\cos\frac{x}{a}$.

Dadurch wird die Area ABMQ =

$\frac{1}{2}x\sqrt{(aa - xx)} + ab\log\frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{x} +$
$\frac{1}{2}aa\ \text{Ang}.\cos\frac{x}{a}$.

Man kann dieses Integral auch unmittelbar erhalten, wenn man den Werth des Differentials ∂y durch x multiplicirt, und dann das Integral nimmt.

Die Quadratur der Conchoide mit circularer Basis ist Th. I. S. 543. gegeben.

108. Die Gleichung für die Lemniscata ist $(xx + yy)^2 = aa(xx - yy)$, oder $y^4 + (a^2 + 2x^2)y^2 = a^2x^2 - x^4$, daher $y^2 =$
$\sqrt{a^2\left(\frac{1}{4}a^2 + 2x^2\right)} - \frac{1}{2}(a^2 + 2x^2)$. Die Größe unter dem Wurzelzeichen rational zu machen, sehe man $2x^2$ als die Summe eines Quadrats und doppelten Products an, wozu $\frac{1}{4}a^2$ als die Ergänzung zu einem vollständigen Quadrate komme, das ist, es sey $2x^2 = zz + az$, so ist $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + 2x^2\right)} =$
$z + \frac{1}{2}a$, und $y^2 = a\left(\frac{1}{2}a + z\right) -$

$\frac{1}{2}(a^2 + az + zz) = \frac{1}{2} z (a - z)$, folglich $y = \sqrt{\left(\frac{1}{2} az - \frac{1}{2} zz\right)}$. Auch ist $4x\partial x = 2z\partial z + a\partial z$, und daraus $\partial x = \frac{(a + 2z)\,\partial z}{4\sqrt{(\frac{1}{2} az + \frac{1}{2} zz)}}$, also

$$y\partial x = \frac{1}{4}(a + 2z)\,\partial z \,.\, \sqrt{\frac{a - z}{a + z}} =$$

$$\frac{(a + 2z)(a - z)\,\partial z}{4\sqrt{(aa - zz)}} = \frac{(aa + az - 2zz)\,\partial z}{4\sqrt{(aa - zz)}}.$$

Daraus ist $\int y\partial x = \text{Const} + \frac{1}{4} aa \text{ Ang . sin } \frac{z}{a}$

$$- \frac{1}{4} a \sqrt{(aa - zz)} + \frac{1}{4} z \sqrt{(aa - zz)} -$$

$\frac{1}{4} aa \text{ Ang . sin } \frac{z}{a}$.

Die Area fange mit $x = 0$, oder mit $z = 0$, an, so ist $\text{Const} = \frac{1}{4} a^2$, und

$\int y\partial x = \frac{1}{4} aa - \frac{1}{4}(a - z)\sqrt{(aa - zz)}$, ein algebraisches Integral.

Da $zz + az = 2x^2$ ist, so ist $Z. = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\left(2x^2 + \frac{1}{4} a^2\right)}$, wo das obere Vorzeichen zu nehmen ist, damit $z = 0$ sey, wenn $x = 0$ ist, wie bey der Bestimmung der Constante angenommen ist. Das Integral durch x selbst ausgedrückt, wird sehr zusammengesetzt, durch x und y aber noch einfach genug.

Es ist nämlich $\int y\partial x = \frac{1}{4}aa - \frac{a^2 xy^3}{(xx+yy)^2}$

109. Eine Curve habe die Gleichung, $x^3 + y^3 = axy$. Sie ist diejenige, welche von den ältern Analysten den Namen Folium, foliata curva, erhalten hat, s. Folium. In dieser Gleichung sind x und y auf einerley Art vorhanden, daher sie in Absicht der Axen ihrer Coordinaten denselben Zug hat, und von einer geraden Linie, welche den Ordinatenwinkel, hier einen rechten, halbirt, in zwey gleiche und ähnliche Theile zerschnitten wird. Sie ist in Figur 15. abgebildet. Für x sind entweder drey mögliche Ordinaten (zwey derselben an der Ovale) oder nur eine, jenseits der beiden berührenden Ordinaten an der Ovale vorhanden. Unendlich große Coordinaten erhalten das Verhältniß der Gleichheit, daher die Asymptote TS die Axen der x und y unter einem halben rechten Winkel schneidet. Die gerade BAB, welche den Ordinatenwinkel XAY halbirt, theilt die Curve in zwey gleiche und ähnliche Hälften.

110. In dem Anfangspuncte A sind beide Coordinaten $= 0$, und ihr Gränzverhältniß ist theils in der Gleichung, $ax = yy$, theils in der, $ay = xx$, enthalten. Dieses erhellt sogleich, wenn man der Gleichung die Form $\frac{x^3}{y^3} + 1 = \frac{ax}{yy}$, oder die $\frac{y^3}{x^3} + 1 = \frac{ay}{xx}$ giebt. Die Gränzgleichung, $ax = yy$, gehört für eine Parabel, deren Axe in die Axe der x fällt, die Gränzgleichung, $ay = xx$, für eine Parabel, deren Axe in die der y fällt. An der Ovale sind nun zwey Fortschreitungen der Ordinaten, welche sich in der berührenden DE begegnen. In dem Berührungspuncte E hat die Gleichung, $y^3 - axy + x^3 = 0$, zwey gleiche Wurzeln y. Vergleicht man sie mit der cubischen Gleichung, die zwey gleiche Wurzeln p, p neben der dritten q hat, dieser

nämlich, $y^3 - (2p + q)\,y^2 + (pp + 2pq)\,y - ppq = 0$, (Gleichung, 182), so ist $2p + q = 0$; $pp + 2pq = -ax$; $ppq = -x^3$. Wegen $q = -2p$ ist $ax = 3pp$, und $x^3 = 2p^3$, woraus $x^2 = \frac{2p}{3} a$ ist, das ist, in dem Berührungspuncte ist $ax = 3yy$, und zugleich $x^3 = 2y^3$, daher auch $x^2 = \frac{2}{3} ay$ ist.

Von $x = 0$ bis zu $x = \frac{3yy}{a}$ giebt es neben den positiven Ordinaten noch negative Ordinaten an den Zweig AS; jenseits der berührenden Ordinate DE nur die an den Zweig AS allein. Zu negativen x hat die Gleichung für y nur eine mögliche Wurzel, (Gleichung, 69.).

111. Die Quadratur dieser Curve zu finden, setze man $ax^2 = u^2 y$, so ist, wenn der Werth von y daraus in die Gleichung der Curve gesetzt wird, $x^3 = \frac{(a^2 - u^2)\,u^4}{a^3}$, und $3x^2 \partial x = \frac{(4a^2 - 6u^2)\,u^3}{a^3} \partial u$,

$$\text{also } y\partial x = \frac{4a^2 u - 6u^3}{3a^2} \partial u, \quad \text{und } \int y\partial x =$$

$\frac{4a^2u^2 - 3u^4}{6a^2}$, das ist $\int y\partial x = \frac{2}{3} \cdot \frac{ax^2}{y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{y^2}$ + Const. Dieser Flächenraum ist entweder der APM, oder der APN, oder der APL, nachdem man zu der Absciſſe AP eine der drey zugehörigen Ordinaten RM, PN oder PL nimmt. Die Constante hängt von dem Verhältniſſe der verschwindenden x und y in A ab, wo die Area anfangen soll. An dem Bogen MAL ist die Gränzgleichung, $ax = yy$, daher verschwindet die Area wenn $x = 0$ ist. An den Zweige NAT aber ist die Gränzgleichung, $ay = xx$, und ist der Werth der

Area in A $= \frac{2}{3}$ aa $- \frac{1}{2}$ aa $+$ Const $= 0$, also Const $= - \frac{1}{6}$ aa. Für den Zweig EMAS gehört nun die unbestimmte Area, $\frac{2}{3} \cdot \frac{ax^2}{y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{y^2}$; und für den Zweig EAT die Area, $\frac{2}{3} \cdot - \frac{ax^2}{y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{y^2} - \frac{1}{6}$ aa.

112. Das Segment über der Chorde AM ist $= \frac{ax^2}{y}$, das Segment über der Chorde AN ist $= \frac{ay^2}{6x}$.

Denn es ist das Dreyeck AMP $= \frac{1}{2}$ xy. Dieses von der Area APM weggenommen bleibt übrig das Segment AMA $= \frac{x}{6y^2} (4axy - 3x^3 - 3y^3) = \frac{ax^2}{6y}$. Das Segment über AL ist auch $\frac{ax^2}{6y}$, wo aber y einen andern Werth hat, als die Ordinaten in M.

Das Segment über AN ist das Dreyeck APN vermindert um die Area APN. Es ist also $= \frac{1}{6y^2} \times (3xy^3 - 4ax^2y + 3x^4 + a^2 y^2) = \frac{a}{6y} (ay - x^2) = \frac{a}{6xy} (axy - x^3) = \frac{ay^2}{6x}$. Hieraus erhellt die

ches merkwürdig genug ist. Die Curve verdiente wohl eine nähere Betrachtung.

116. Joh. Bernoulli handelt von dieser Curve in den Lectt. Hospit. IV. Er hat die Constanten für die Areas APN, APM nicht beygefügt, verbessert aber diese Weglassung auf andere Art. Seine Rechnung ist hier theils kürzer und bequemer gefaßt, theils auch erweitert.

117. Die Gleichung für die Logistica oder Logarithmische Linie ist $y = e^x a$. In dem Artikel von derselben ist die Differentialgleichung für sie gegeben. Die gegenwärtige endliche Gleichung zeigt an, daß die numerischen Werthe der Ordinaten y in geometrischer Progression fort gehen, wenn die Abscissen in arithmetischer sind. Für die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ... etc., von x hat y die Werthe a, ea, $e^2 a$, $e^3 a$, $e^4 a$, etc. Es ist $y\partial x = ae^x \partial x$, und $e^x \partial x = \frac{\partial y}{a \log e}$ (Differentialgleichung, 52.), also die Area eines Abschnittes der logarithmischen Linie, $\int y\partial x = \frac{y}{\log e} +$ Const, wo die natürlichen Logarithmen zu verstehen sind, e aber nicht die Basis derselben zu seyn braucht, sondern irgend eine Zahl seyn mag. Die Constante hängt von dem Werthe derjenigen Ordinate ab, bey welcher der Abschnitt anfängt.

118. Die Flächenräume beziehen sich hier auf das Quadrat einer Linie, die als Einheit für a, x, y, angenommen wird, indem e eine bloße Zahl ist und bleibt. Die logarithmische Area enthält dieses Quadrat so oft als die Zahlgröße $\frac{y}{\log e} +$ Const. die Einheit enthält. Um diese Area durch die zugehörigen Li-

Linien schlechthin auszudrucken, setze man zu dem Quadrate der Einheit, welche am einfachsten a selbst ist, den gefundenen numerischen Werth der Area als Factor. Dann bezeichnet ay die Ordinate unmittelbar, und aay das Rechteck von dieser Ordinate und a, so wie Const . aa ein gegebenes Rechteck. Die logarithmische Area ist nun $= \frac{ay}{\log e} + Const.$ Fängt

sie für $x = 0$, oder $y = a$ an, so ist sie $= \frac{a(y-a)}{\log e}$.

Fängt sie für $y = b$ an, so ist sie $= \frac{a(y-b)}{\log e}$.

119. Da $\frac{y\partial x}{\partial y}$ die Subtangente der Curve ist,

so ist diese $= \frac{a}{\log e}$, und die Area ist gleich dem Rechteck von dem Unterschiede der Ordinaten und der Subtangente.

120. Die Brennlinie des Kreises für parallele Strahlen sey das letzte Beyspiel einer Quadratur. Es ist dazu Fig. 62. Tab. IV. zum ersten Theile nöthig. Die zurückwerfende Linie ist der Kreisquadrant DMB, auf welchen die Strahlen, wie PM, parallel mit AD auffallen; die Brennlinie ist FSB. Der Mittelpunct des Kreises ist A, der Halbmesser $AB = a$; die Coordinaten an den Kreis sind $AP = x$; $PM = y$; und die Gleichung ist, $aa = xx + yy$. Die Coordinaten an die Brennlinie sind $AT = t$,

$TS = u$. Es ist $t = \frac{x^3}{a^2}$; $u = \frac{(3aa - 2yy)y}{2aa}$,

(Catacaustica, 10.), oder $u = \frac{aa + 2xx}{2aa}\sqrt{(aa-xx)}$,

$HB = \frac{1}{4} DB$, das Segment BkK dem der Chord
2MP zugehörigen kleineren Abschnitte des Kreis
DAB ähnlich, folglich das Segment BkK $= \frac{1}{16}$ di

ses Abschnittes oder $\frac{1}{8}$ des Segments PMB. Dah
das Trilineum BEMB $=$ 2 Segm. BkK, und d
ganze Raum BFAB $=$ 2 Halbkreisen BKH $=$
Kreisfläche BKHB, wie in dem Art. Brennlinie,
angeführt ist.

121. Die Quadratur der Cykloide und der Ep
cykloide, wie auch einiger cykloidischen Abschnitte,
schon bey der Untersuchung dieser Linien mitgenomme
Die Brennlinie des Kreises für parallele Strahlen
eine Epicykloide, für welche der bewegte Kreis d
Halbmesser des ruhenden zum Durchmesser hat. Hi
sind die Ordinaten parallel. Bey der allgemeinen B
trachtung sind sie aus einem Puncte gezogen.

Die Quadratur der Sinuslinie und anderer ge
metrischen abbildenden Linien ist in dem Artikel, Lin
abbildende, gezeigt. — Die Quadratur der Spiral
wird in dem Artikel, Spirale, vorkommen.

Annäherungs-Methoden.

122. Wenn die Ordinate y sich nicht durch
ne Function von x ausdrücken läßt, oder x und
nicht durch y und ∂y; auch wenn $\int y \partial x$ nicht in
grabel, und wenn die Curve nur eine empirische ist,
welcher die Ordinaten zu den Abscissen durch Beoba
tung bestimmt worden sind, so muß man die Area
Trapezia mit einer krummen Seitenlinie zerlegen, u
diese Theile mit dem erforderlichen Grade der Genaui
keit zu berechnen suchen.

123. Es ist CMNS (Fig. 16.) eine solche Curve, ihre Abscissenlinie AX, die Anfangsordinate BC, ein paar andere PM, QN. Die Abscissenlinie werde in mehrere gleiche (oder auch in ungleiche) Stücke getheilt, dergleichen PQ eines ist. Durch jeden Theilungspunct ziehe man die (senkrechten) Ordinaten, wie BC, PM, QN. Die so entstehenden vierseitigen Räume, wie PMNQ, sind nun aus den gegebenen Ordinaten und ihren Abständen zu berechnen.

124. Man betrachte jeden Bogen der Curve, wie MN, als zu einer Parabel gehörig, deren Axe in der Abscissenlinie der Curve liegt. Durch die beiden Puncte M, N sind der Parameter derselben und der Scheitel bestimmt. Es darf hier aber, wegen der Veränderlichkeit der Parabel, weder ihr Parameter noch eine Abscisse in Rechnung kommen, Die Abscisse bezieht sich hier auf einen fixen Punct A, an den Parabeln würde sie für jeden Punct sich auf den veränderlichen Scheitelpunct beziehen.

125. Es sey AMN (Fig. 11.) eine Parabel, auf deren Axe AX zwey Abscissen AP, AQ genommen sind, wozu die Ordinaten PM, QN gehören. Man setze $AP = x$; $PQ = \Delta x$; $PM = y$; $QN = y + \Delta y$. Es ist Area $APM = \frac{2}{3} xy$; Area $AQN = \frac{2}{3} (x + \Delta x)(y + \Delta y)$, und das krummlinichte Viereck $PMNQ = \frac{2}{3} (y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \,.\, \Delta y)$. Hier muß x weggeschafft werden.

126. Es ist $x : x + \Delta x = y^2 : (y + \Delta y)^2$, und daraus $x : \Delta x = y^2 : (2y + \Delta y)\, \Delta y$, also $x\Delta y = \frac{y^2 \Delta x}{2y + \Delta y}$. Dieser Ausdruck werde in eine

Reihe verwandelt, so ist

$$x\Delta y = \left(\frac{1}{2} y - \frac{1}{4} \Delta y + \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta y^2}{y} - \text{etc.}\right) \Delta x.$$

Folglich ist das krummlinichte Viereck

$$PMNQ = y\Delta x + \frac{1}{2} \Delta y\Delta x + \frac{1}{12} \cdot \frac{\Delta y^2 \cdot \Delta x}{y} + \text{etc.}$$

Hier ist das erste Stück das Rechteck PMRQ, das zweyte das Dreyeck MNR, das dritte mit dem übrigen das Segment MN.

Nach dieser Formel berechne man jedes der gemischtlinichten Trapezien an der vorgegebenen Curve. Es ist dazu nicht nöthig, eine Gleichung für die derselben sich nähernde parabolische Linie zu suchen.

127. Exempel. Es sey CMS ein Kreisbogen, in welchem PM der Sinus von 45°, QN der Sinus von 55° für den Sinustotus oder Radius = 1 ist. Der Kreis wird hier mit einem beträchtlichen Abstande der Ordinaten genommen, um von der Genauigkeit der Methode sicherer urtheilen zu können.

PM	=	0,707107	l. Δy	=	9,049392
QN	=	0,819152			9,049392
Δy	=	0,112045	l. y	=	9,849485
Δy	=	0,056023	l. 12	=	1,079181
Δx	=	0,133530	l.Δy²:12y	=	7,170118
Δy²:12y	=	0,001479	l. Factors	=	9,883440
Factor zu Δx	=	0,764609	l. Δx	=	9,125579
					9,009019

Area PMNQ = 0,1021 . .

Das Segment der Kreisfläche zwischen den beiden Sinus ist = sector 10° + $\frac{1}{2}$ sin 45° . cos 45° −

$\frac{1}{2}$ sin . 55° cos 55° = sector 10° + $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{4}$ sin 70°.

$$\text{sector } 10° = 0{,}087266$$
$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$
$$-\frac{1}{4}\sin 70° = -0{,}234923$$
$$\text{Segment} = 0{,}102343$$

128. Die Berechnung der Ergänzung $\frac{\Delta y^2 . \Delta x}{12y}$ macht etwas Mühe; doch wird sie oft weggelassen werden können, da $\frac{\Delta y^2}{12y}$ meistens verhältnißmäßig sehr klein seyn wird. Man kann dieses immer sehr leicht beurtheilen. Bey dieser Rechnung ist man an keine Verhältnisse der Abstände zwischen den Ordinaten gebunden.

129. Da man einen nicht großen Bogen einer Curve als eine parabolische Linie betrachten kann, von der Form $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, + etc., und diese sich leicht quadriren läßt, so führt dieses auf eine allgemeine Methode der Quadrirung. Giebt man der Gleichung die Form, $y = A + ax + \frac{bx(x-1)}{1.2} + \frac{cx(x-1)(x-2)}{1.2.3}$ + etc., so sind a, b, c, etc., die Anfangsglieder der Differenzreihen. s. Einschalten, 6.

130. Newton hat diese Methode vorgeschlagen,

in der Methodo differentiali, Prop. VI. giebt aber nur eine einzelne Formel, ohne die Rechnungsart zu entwickeln. Es seyn vier Ordinaten in gleichen Abständen gegeben; die Summe der ersten und vierten sey A; der zweyten und dritten B, der Abstand der beiden äußern R, so ist die Area zwischen den beiden äußern

$$= \frac{1}{8} (A + 3B), R.$$

131. Cotes wurde durch die Zierlichkeit des von Newton aufgestellten Resultats veranlaßt, dasselbe weiter auszudehnen und Formeln für die Area aus drey, vier, und so fort bis eilf von einander gleich weit abstehenden Ordinaten zu berechnen. Diese giebt er am Ende der Abhandlung de methodo differentiali, aber auch ohne das Verfahren anzuzeigen, wodurch er sie gefunden hat. Er bezeichnet, wie Newton, die Summe der ersten und letzten Ordinate durch A, der zweyten und vorletzten durch B, der dritten von den beiden äußersten abgezählt durch C, und so fort; durch den letzten Buchstab jeder Formel aber die mittelste aller Ordinaten, wenn die Anzahl derselben ungerade ist, die Summe der beiden mittleren hingegen, wenn die Anzahl gerade ist. Der Abstand der beiden äußersten Ordinaten oder die Basis des zu quadrirenden Flächenraums nennt er mit Newton R. Für die vorgesetzte Zahl der Ordinaten ist nun die Area

3	$\frac{1}{6} (A + 4B) R$
4	$\frac{1}{8} (A + 3B) R$
5	$\frac{1}{90} (7A + 32B + 12C) R$
6	$\frac{1}{288} (19A + 75B + 50C) R$

7	$\frac{1}{840}(41A + 216B + 27C + 272D)R$
8	$\frac{1}{17280}(751A + 3577B + 1323C + 2989D)R$
9	$\frac{1}{28350}(989A + 5888B - 928C + 10496D - 4540E)R$
10	$\frac{1}{89600}(2857A + 15741B + 1080C + 19344D + 5778E)R$
11	$\frac{1}{598752}(16067A + 106300B - 48525C + 272400D - 260550E + 427368F)R$

Wie die Formeln gefunden werden können, ist in dem Artikel, Integralformel, 151. Th. III. S. 883. gezeigt worden, wo auch die Formeln bis zu dem Falle von sieben Ordinaten mitgetheilt sind, nur muß man um die hier gegebenen Formeln zu erhalten, die dortigen Bezeichnungen in die hier angenommenen übertragen. So ist z. B. in die Formel für die Area aus sieben Ordinaten stat A + G, B + F, C + E, beziehungsweise blos A, B, C, und statt des Factors $\frac{6}{840}$, weil der Abstand der beiden äußersten Ordinaten dort $= 6$, hier $= R$ ist, $\frac{1}{840} R$ zu setzen.

132. Stirling hat in seiner Schrift Methodus differentialis p. 146. von Cotesens Formeln bloß die, durch welche die Area aus einer ungeraden Anzahl von Ordinaten bestimmt wird, doch nur bis zu dem Falle von neun Ordinaten, und gleichfalls ohne

Beweis, wiedergegeben. Er setzt dazu noch eine Correctionstafel, in welcher P die Summe zweyer Ordinaten ist, welche in dem gemeinschaftlichen Abstande der übrigen Ordinaten, die eine vor der ersten, die andere nach der letzten, jenen beygefügt sind.

3	$\frac{1}{180}(P - 4A + 6B)R$
5	$\frac{1}{470}(P - 6A + 15B - 20C)R$
7	$\frac{1}{930}(P - 8A + 28B - 56C + 70D)R$
9	$\frac{1}{1600}(P - 10A + 45B - 120C + 210D - 252E)R$

Die Correction der Area findet sich in dem Falle dreyer Ordinaten so. Es ist bey hinlänglicher Entwickelung für $x = 2$ (Integralformel, 151)

$$\int y \partial y = \frac{1}{3}(6A + 6a + b) - \frac{1}{90} d + \text{etc.}$$

Die aus drey Ordinaten bestimmte Area $\frac{1}{3}(6A + 6a + b)$ ist folglich ohngefähr um $\frac{1}{90} d$ zu groß. Setzt man zu den Gliedern A, B, C, noch die beiden 'A, C', jenes vor A, dieses nach C, in dem Abstande = 1, so ist (Arithm. Reihen höherer Ordn. 2)

$$d = C' - 4C + 6B - 4A + {}'A$$

also

$$\frac{1}{90} d = \frac{1}{90}({}'A + C' - 4(A + C) + 6B).$$

Nach Stirlings Bezeichnungsart ist P statt 'A + C' und A statt A + C zu setzen. Überdies

ist der Abstand der Ordinaten A und C, welcher bey der Formel $= 2$ ist, nach Stirling R, also $\frac{1}{90} = \frac{1}{180}$ R. Dadurch wird $\frac{1}{90}$ d $= \frac{1}{180}$ (P — 4A + 6B) R. Die übrigen Correctionsformeln werden auf ähnliche Art gefunden. Die Brüche in der Tafel $\frac{1}{470}$, $\frac{1}{930}$ u. s. w. sind nur genäherte. Der Bruch $\frac{1}{470}$ z. E. steht statt $\frac{2}{945} = \frac{1}{472\frac{1}{2}}$. Die Correctionen selbst sind subtractiv, also additiv, wenn sie verneint werden. Man berechnet und gebraucht von ihnen nur die höchste Decimalziffer, und ist alsdann sicher, die Area bis zu der Decimalstelle, auf welche jene Ziffer der Correction trifft, richtig zu erhalten.

Berechnet man noch den Fehler der Formel für die Area aus vier Ordinaten, so findet sich, daß die Formel ohngefähr $\frac{3}{80}$ d zu viel giebt. Die Fehler der Formeln für die Area aus drey und aus vier Ordinaten fallen also in dieselbe Ordnung der Differenzen. Um das Verhältniß der Fehler zu finden, drücke man zuerst die Area als ein Rechteck, dessen eine Seite die Basis des Flächenraumes ist, aus; so ist bey drey Ordinaten die Area $\left(\frac{A + 4B}{6} - \frac{1}{180} d \ldots\right)$ R bey vier $\left(\frac{A + 3B}{8} - \frac{1}{80} d \ldots\right)$ R. Es ist aber d das Anfangsglied der vierten Differenz-Reihe, also in (Differenzen-Rechn. 48.) $\Delta^4 . fx$, wo fx die Ordinate der

zu quadrirenden Curve ist. Nun ist bey drey Ordinaten das dortige $u = \frac{1}{2} R$, bey vier Ordinaten $u = \frac{1}{3} R$, daher in jenem Falle das erste Glied von $\Delta^4.fx$ oder $d = 24\delta \left(\frac{1}{2} R\right)^4$, in diesem $24\delta \left(\frac{1}{3} R\right)^4$. Folglich verhält sich der Fehler der Area über derselben Basis bey drey Ordinaten zu dem bey vier Ordinaten wie $\frac{1}{180} \left(\frac{1}{2}\right)^4 : \frac{1}{80} \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 9 : 4$, also der Fehler bey vier Ordinaten etwa halb so groß als der bey drey Ordinaten. Eben so findet sich, daß der Fehler bey sechs Ordinaten von derselben Ordnung der Differenzen und kaum halb so groß ist, als der Fehler bey fünf Ordinaten. Der Grad von Genauigkeit, den man bey Anwendung einer geraden Zahl von Ordinaten erlangt, ist also nur unbedeutend oder fast gar nicht größer, als der, den man erhält, wenn man die nächst niedrige ungerade Anzahl von Ordinaten gebraucht. Das ist der Grund, warum Stirling nur die Formeln für eine ungerade Anzahl Ordinaten angeführt hat, ob er gleich solches selbst nicht sagt.

133. Stirling giebt noch eine Tafel für die Flächenräume durch die Differenzen gleichweit von einander abstehender Ordinaten bey einer ungeraden Anzahl derselben. Es sey A die mittelste Ordinate, B der zweyte Unterschied der drey mittleren, C der vierte Unterschied der fünf mittleren u. s. f.; so sind die Flächenräume nahe gleich dem Rechtecke aus der Grundlinie oder dem, zwischen den äußersten Ordinaten enthaltenen Theile der Abscissenlinie in die folgenden Größen.

$$\begin{array}{r|l}
3 & A + \frac{1}{6} B \\
5 & A + \frac{2}{3} B + \frac{7}{90} C \\
7 & A + \frac{3}{2} B + \frac{11}{20} C + \frac{41}{840} D \\
9 & A + \frac{8}{3} B + \frac{86}{45} C + \frac{92}{189} D + \frac{3}{86} E \\
11 & A + \frac{25}{6} B + \frac{175}{36} C + \frac{3445}{1512} D \\
 & \qquad + \frac{4045}{9072} E + \frac{94}{3503} F.
\end{array}$$

Die Formeln sind im Grunde einerley mit den vorigen, und werden leicht aus denselben abgeleitet. Ihr Vorzug vor diesen besteht darin, daß in ihnen die numerischen Confficienten kleiner sind, als in jenen. Aus der Convergenz der Reihe A, B, C, D, . . . beurtheilt man übrigens den Grad der Genauigkeit, welcher durch die angewandte Formel erreicht wird.

134. Maclaurin giebt in dem Treatise of Fluxions art. 830. und 832 zwey Ausdrücke für die Area $\int y \partial x = A$ einer Curve durch die Summe gleichweit von einander abstehender Ordinaten. Es sey ω der gemeinschaftliche Abstand der Ordinaten, Σ die Summe aller Ordinaten außer der letzten, α der Überschuß der letzten Ordinate über die erste, β, δ, ζ, ϑ . . die Unterschiede der Werthe, welche $\frac{\partial y}{dx}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, $\frac{d^7 y}{dx^7}$ . . . beziehungsweise für die letzte und erste Ordinate haben, so ist nach der ersten Formel

wo der erste Theil $\frac{y^{(0)} + y^{(2)} + 4y^{(1)}}{6}$ R Cotesens Formel ist.

Für n = 3 oder bey vier Ordinaten wird

$$Q = \frac{y^{(0)} + y^{(3)} + 3\,(y^{(1)} + y^{(2)})}{8} R$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{R^4}{9} \left(\frac{\partial^3 y^{(3)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$$

$$+ \text{etc.}$$

Hier ist der erste Theil $\frac{y^{(0)} + y^{(3)} + 3(y^{(1)} + y^{(2)})}{8}$ R Newtons Formel.

Berechnet man denselben Flächenraum aus drey und aus vier Ordinaten, so sind die äußersten Ordinaten dieselben, folglich $\frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial x^3}$ bey drey Ordinaten = $\frac{\partial^3 y^{(3)}}{\partial x^3}$ bey vier; und es verhalten sich die Fehler, um welche die Area zu groß gefunden wird, nahe wie 9 : 4, welches schon oben bemerkt ist.

136. Für n = 4 oder bey fünf Ordinaten wird aus (134)

$$Q = \frac{3\,(y^{(0)} + y^{(4)}) + 8\,(y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)})}{30} R$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{1 \ldots 4} \cdot \frac{R^4}{16} \left(\frac{\partial^3 y^{(4)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{C}}{1 \ldots 6} \cdot \frac{17 R^6}{256} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5} \right)$$

$$- \text{etc.}$$

Berechnet man dieselbe Area aus den Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(2)}$, $y^{(4)}$, so ist nach (135)

Q

$$Q = \frac{y^{(0)} + y^{(4)} + 4y^{(2)}}{6} R$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{1 \ldots 4} \cdot \frac{R^4}{4} \left(\frac{\partial^3 y^{(4)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{C}}{1 \ldots 6} \cdot \frac{5R^6}{16} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5} \right) - \text{etc.}$$

und wenn man $\mathfrak{B}R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(4)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$ eliminirt

$$Q = \frac{7(y^{(0)} + y^{(4)}) + 32(y^{(1)} + y^{(3)}) + 12y^{(2)}}{90} R$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{1 \ldots 6} \cdot \frac{R^6}{64} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5} \right)$$

$$+ \text{etc.}$$

Das erste in R hier multiplicirte Glied ist die Formel von Cotes. Man kann auf diese Art weiter gehen, und noch mehrere der Cotesischen Formeln ableiten, und zugleich bestimmen, um wie viel jede ohngefähr fehlt.

137. Die zweyte der von Maclaurin gegebenen Formeln findet sich so. Es seyn zuerst bloß drey Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$; so ist nach der ersten Formel in (134) die Area

$$Q = \frac{1}{2} y^{(1)} R + \frac{1}{4} (y^{(0)} + y^{(2)}) R$$

$$- \frac{\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \frac{R^2}{2^2} \left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x} \right)$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \frac{R^4}{2^4} \left(\frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3} \right)$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{1 \ldots 6} \cdot \frac{R^6}{2^6} \left(\frac{\partial^5 y^{(2)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5} \right) + \text{etc.}$$

Aus den beiden äußersten Ordinaten aber ist

$$Q = \frac{1}{2}(y^{(0)} + y^{(2)}) R$$

$$- \frac{\mathfrak{A}}{1.2}. R^2 \left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}. R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{1 \ldots 6} R^6 \left(\frac{\partial^5 y^{(2)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) + \text{etc.}$$

folglich durch Elimination von $y^{(0)} + y^{(2)}$

$$Q = y^{(1)} R + \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2.2} R^2 \left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right)$$

$$- \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4.2^3} R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$+ \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1 \ldots 6.2^5} R^6 \left(\frac{\partial^5 y^{(2)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) - \text{etc.}$$

Es sey jetzt die Basis R des zu quadrirenden Flächenraums in eine gerade Anzahl $= 2n$ gleicher Theile, deren jeder $= \omega$, getheilt, so daß $R = 2n\omega$. Die Ordinaten, welche dem Anfangspuncte, den Theilungspuncten und dem Endpuncte der Basis entsprechen, seyn nach der Reihe $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)} \ldots . y^{(2n)}$. Man berechne nun die Flächenräume, welche über jedem nten Theile der Basis $= 2\omega$ stehen, aus den mittlern Ordinaten $y^{(1)}, y^{(3)}, y^{(5)} \ldots y^{(2n-1)}$ einzeln, so giebt ihre Summe den ganzen über der Basis R stehenden Flächenraum. Nennt man ihn, wie vorher, Q, so wird nach Substitution von $\frac{R}{2n}$ statt ω

$$Q = \frac{y^{(1)} + y^{(3)} + y^{(5)} + \ldots + y^{(2n-1)}}{n} R$$

$$+\frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2.2.}\cdot\frac{R^2}{n^2}\left(\frac{\partial y^{(2n)}}{\partial x}-\frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right)$$

$$-\frac{(2^3-1)\mathfrak{B})}{1.2.3.4.\ 2^3}\cdot\frac{R^4}{n^4}\left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$+\frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1.2...6.\ 2^5}\cdot\frac{R^6}{n^6}\left(\frac{\partial^5 y^{(2n)}}{\partial x^5}-\frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)-\text{etc.}$$

Dieses ist Maclaurins zweyter Ausdruck.

Berechnet man die Area allein aus der mittelsten Ordinate $y^{(n)}$, so wird

$$Q=y^{(n)}R+\frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2.\ 2}\cdot R^2\left(\frac{\partial y^{(2n)}}{\partial x}-\frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right)$$

$$-\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4.\ 2^3}\cdot R^4\left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$+\frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1....6.2^5}\cdot R^6\left(\frac{\partial^5 y^{(2n)}}{\partial x^5}-\frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)-\text{etc.}$$

und durch Elimination von $\mathfrak{A}R^2\left(\frac{\partial y^{(2n)}}{\partial x}-\frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right)$

$$Q=\frac{n(y^{(1)}+y^{(3)}+y^{(5)}+\ldots+y^{(2n-1)})-y^{(n)}}{nn-1}R$$

$$+\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4.\ 2^3}\cdot\frac{R^4}{n^2}\left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$-\frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1....6.2^5}\cdot\frac{(n^2+1)R^6}{n^4}\left(\frac{\partial^5 y^{(2n)}}{\partial x^5}-\frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)$$

$$+\text{etc.}$$

138. Es sey $n=2$, also fünf Ordinaten, so giebt die zweyte Formel

$$Q=\frac{(y^{(1)}+y^{(3)})-y^{(2)}}{3}R$$

$$+ \frac{7\mathfrak{B}}{1.2.3.4.\,32} R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(4)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right) - \text{etc.}$$

Wenn $n = 3$, oder die Zahl der Ordinaten sieben ist, so wird

$$Q = \frac{3(y^{(1)} + y^{(3)} + y^{(5)}) - y^{(3)}}{8} R$$

$$+ \frac{7\mathfrak{B}}{1.2.3.4.\,72} R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(6)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right) - \text{etc.}$$

Für $n = 4$ oder bey neun Ordinaten wird

$$Q = \frac{4(y^{(1)} + y^{(3)} + y^{(5)} + y^{(7)}) - y^{(4)}}{15} R$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}}{1\ldots4} \cdot \frac{7R^4}{128} \left(\frac{\partial^3 y^{(8)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{1\ldots.6} \cdot \frac{17 \cdot 31\, R^6}{8192} \left(\frac{\partial^5 y^{(8)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

Dieselbe Area aus den Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(2)}$, $y^{(4)}$, $y^{(6)}$, $y^{(8)}$ berechnet ist

$$Q = \frac{2(y^{(2)} + y^{(6)}) - y^{(4)}}{3} R$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}}{1\ldots4} \cdot \frac{7R^4}{32} \left(\frac{\partial^3 y^{(8)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$- \frac{\mathfrak{C}}{1\ldots.6} \cdot \frac{5 \cdot 17\, R^6}{512} \left(\frac{\partial^5 y^{(8)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) + \text{etc.}$$

Hieraus wird, durch Elimination von

$$\mathfrak{B}R^4 \left(\frac{\partial^3 y^{(8)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right),\quad Q =$$

$$\frac{16(y^{(1)} + y^{(3)} + y^{(5)} + y^{(7)}) - 10(y^{(2)} + y^{(6)}) + y^{(4)}}{45} R$$

$$+ \frac{\mathfrak{C}}{1\ldots6} \cdot \frac{31\, R^6}{2048} \cdot \left(\frac{\partial^5 y^{(8)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) + \text{etc.}$$

Auf diese Art kann man weiter gehen, und bey einer größern Anzahl Ordinaten immer mehrere von den Größen

$$\mathfrak{A}R^2\left(\frac{\partial y^{(2n)}}{\partial x}-\frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right),\quad \mathfrak{B}R^4\left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

u. s. w. ausstoßen.

139. Ist die zu quadrirende Curve durchaus gegen die Abscissenlinie hohl, so ist der in R multiplicirte Theil der ersten Formel in (134), nämlich

$$\left(\frac{1}{2}(y^{(0)}+y^{(n)})+y^{(1)}+y^{(2)}+\ldots+y^{(n-1)}\right)\frac{R}{n},$$

die Summe der eingeschriebenen Trapezien, deren jedes zwey nächste Ordinaten zur Grundlinie, und den zwischen ihnen enthaltenen Theil der Abscissenlinie zur Höhe hat. Der erste Theil der ersten Formel in (137) aber, oder $(y^{(1)}+y^{(3)}+\ldots+y^{(2n-1)})\frac{R}{n}$, wo die $y^{(1)}, y^{(3)},\ldots$ nicht mit den vorigen einerley sind, druckt unter eben dieser Voraussetzung die Summe der umschriebenen Trapezien aus, deren jedes eine der Ordinaten $y^{(1)}$, $y^{(3)}$, $y^{(5)}$ . . . $y^{(2n-1)}$ zur mittleren Grundlinie und den Theil der Grundlinie, welcher zwischen der nächst vorhergehenden und nachfolgenden Ordinate enthalten ist, zur Höhe hat. Wenn die Curve gegen die Abscissenlinie durchweg erhaben ist, so verhält sich die Sache umgekehrt. Jene Ausdrücke geben also in diesen beiden Fällen ein Paar Gränzen, zwischen denen die wahre Area liegt. Aber auch in den andern Fällen, wo die obige Voraussetzung nicht statt hat, sondern die Curve zum Theil hohl, zum Theil erhaben gegen die Abscissenlinie ist, wird man durch jene Ausdrücke ein Paar Gränzen für die Area erhalten, wofern nur der Zug der Curve sonst nicht unterbrochen und $\frac{R}{n}$ klein genug genommen wird, daß jedes nach-

folgende Glied der Reihe

$$\frac{\mathfrak{A}R^2}{1.2n^2}\left(\frac{\partial y^{(n)}}{\partial x}-\frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}\right), \frac{\mathfrak{B}R^4}{1.2.3.4\, n^4}\left(\frac{\partial^3 y^{(n)}}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

u. s. w. in Beziehung auf das nächst vorhergehende vernachlässigt werden kann.

140. Berechnet man unter der Voraussetzung von (137), daß die Basis R in 2n gleiche Theile getheilt sey, die einzelnen Flächenräume, welche über jedem nten Theile der Basis stehen, aus den beiden den Endpuncten, und der Mitte desselben entsprechenden Ordinaten, und nimmt solche zusammen, so wird, wenn man die Summe der äußersten Ordinaten oder $y^{(0)} + y^{(2n)} = A$, die Summe aller den ungeraden Theilungspuncten der Basis zugehörigen Ordinaten oder $y^{(1)} + y^{(3)} + y^{(5)} + \ldots + y^{(n-1)} = B$, und die Summe aller den geraden Theilungspuncten entsprechenden oder $y^{(2)} + y^{(4)} + y^{(6)} + \ldots + y^{(2n-2)} = C$ setzt,

$$Q = \frac{A + 4B + 2C}{6} \cdot \frac{R}{n}$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \frac{R^4}{4n^4}\left(\frac{\partial^3 y^{(2n)}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y^{(0)}}{\partial x^3}\right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{C}}{1\ldots.6} \cdot \frac{5R^6}{16n^4}\left(\frac{\partial^5 y^{(2n)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right)$$

$$- \text{etc.}$$

Die Formel $Q = \frac{A + 4B + 2C}{6} \cdot \frac{R}{n} = \frac{A + 4B + 2C}{3} \cdot \frac{R}{2n}$, wo $\frac{R}{2n}$ einer der gleichen Theile der Basis oder der Abstand je zweyer nächsten Ordinaten ist, ist von Thom. Simpson in seinen Mathematical Dissertations angegeben und empfohlen worden. Lalande hat sich ihrer zur Bestimmung

der beiden ersten Coefficienten in der Entwickelung von $(h - \cos t)^m$ für gewisse Fälle bedient. Man sehe dessen Astronomie, Th. III. Nr. 3660 ff.

141. Die Formel für die Area aus drey Ordinaten, worauf die eben angeführte

$$Q = \frac{A + 4B + 2C}{6} : \frac{R}{n}$$

beruht, läßt sich auch bequem durch die Geometrie finden. Es seyn PL, QM, RN (Fig. 17) drey gleichweit von einander abstehende Ordinaten einer Curve VU. Betrachtet man den Bogen LMN als zu einer Apollonischen Parabel gehörig, so muß, weil diese durch drey Puncte nicht bestimmt wird, noch eine Bedingung hinzukommen. Man füge also noch hinzu, daß M der Scheitelpunct eines Durchmessers MQ durch M sey. Da nun MQ die Chorde LN in q halbirt, so halbirt sie auch jede andere der LN parallele Chorde (Parabel, 12) und die durch M der LN parallele berührt die Parabel daselbst, indem hier die beiden Durchschnittspuncte der Chorde mit der Curve in einen Punct fallen. (a. a. O. 13). Die verlängerten PLRN schneiden die berührende in p, r, so ist der parabolische Abschnitt LMNL $= \frac{2}{3}$ LprN, oder doppelt so groß als die Fläche pLMNrp (71.). Wir haben nun drey Flächenräume, das Trapezium PLNR ($= \mathfrak{A}$) die parabolische Area PLMNR ($= \mathfrak{B}$) und das Trapezium PprR ($= \mathfrak{C}$), unter welchen der Unterschied $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = 2(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})$ ist, daher $3\mathfrak{B} = 2\mathfrak{C} + \mathfrak{A}$. Es ist $\mathfrak{A} = (PL + RN)\, PQ$, s. Trapezium, $\mathfrak{C} = (Pp + Rr)\, PQ = 2QM \,.\, PQ$, weil QM das arithmetische Mittel zwischen Pp und Rr ist. Daher ist die parabolische Area

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{3}(PL + 4QM + RN)\, PQ$$

wie oben gefunden worden.

Montucla führt (T. III. p. 201) die geometrische Herleitung aus Simpsons vorhin genannter Schrift an, entwickelt aber nicht genugsam den Grund, worauf sie beruht. Er sagt nur die durch M mit LN parallele sey eine berührende, und daher LMNL $= \frac{2}{3}$ LprN.

142. Auch Newtons Formel für die Area aus vier Ordinaten gilt eigentlich von dem Flächenraume einer apollonischen Parabel. Es seyn PL, QM, NR, SO (Fig. 18.) vier von einander gleichweit abstehende Ordinaten zu vier Puncten L, M, N, O einer solchen. Damit durch die vier Puncte L, M, N, O nur eine Parabel gehe, müssen die Linien MN und LO parallel seyn. Es sey dies der Fall, so ist die Linie VT, welche durch die Mitten p, q von MN und LO gezogen ist, den Ordinaten PL, QM, RN, SO parallel und ein Durchmesser der Parabel, dessen Scheitel V ist. Man setze PL$=y'$, QM$=y'$, RN$=y''$, SO$=y'''$, und VT, welche PS, in T halbirt, $=$ Y; ferner PQ $=$ QR $=$ RS $= \omega$; so ist

$$Vp = VT - pT = Y - \frac{y' + y''}{2},$$

$$\text{weil } pT = \frac{QM + RN}{2},$$

und eben so

$$Vq = Y - \frac{y + y'''}{2}. \text{ Nun ist}$$

$$Vp : Vq = Mp^2 : Lq^2 = mq^2 : Lq^2$$
$$= QT^2 : PT^2 = 1 : 9$$

d. i.

$$Y - \frac{y' + y''}{2} : Y - \frac{y + y'''}{2} = 1 : 9$$

Hieraus wird $Y = \frac{9(y' + y'') - (y + y''')}{16}$

Demnach die Area PLVOS

$$= \left(\frac{PL + OS + 4VT}{3}\right) PT$$

$$= \frac{y + y''' + 4Y}{3} \cdot \frac{3}{2}\,\omega = \frac{y + y''' + 4Y}{2}\,\omega$$

$$= \frac{3(y + y''') + 9(y' + y'')}{8}\,\omega$$

$$= \frac{y + y''' + 3(y' + y'')}{8} \cdot R$$

wo $R = 3\omega = PS$ ist.

Daß die Formeln für die Area aus drey und vier Ordinaten, welche Cotes und Newton gegeben haben, eigentlich bei einer apollonischen Parabel Statt haben, erhellt auch daraus, daß, wenn diese Formeln in aller Schärfe gelten sollen, in (135) überhaupt $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$ seyn muß. Dies giebt aber $y = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, welches die Gleichung für eine Parabel ist, in welcher die x auf einer, auf die Axe der Parabel senkrechter genommen werden, die y aber dieser Axe parallel sind.

143. Die Aufgabe der mechanischen Quadraturen, wie man die bisher betrachteten nennt, läßt sich überhaupt so abfassen. Wenn y die Ordinate x die Abscisse der zu quadrirenden Curve bezeichnet, und $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \ldots$ u. s. w. ist, so ist $\int y \partial x$, von $x = 0$ bis $x = f$ genommen,

$$= \alpha f + \frac{1}{2}\beta f^2 + \frac{1}{3}\gamma f^3 + \frac{1}{4}\delta f^4 + \text{u. s. w.}$$

$$= f\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{3}\gamma f^2 + \frac{1}{4}\delta f^3 + \ldots\right),$$

wo $\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{3}\gamma f^2 + \ldots$ die der Abscisse f entsprechende Ordinate einer Curve ist, für welche

$$y = \alpha + \frac{1}{2}\beta x + \frac{1}{3}\gamma x^2 + \frac{1}{4}\delta x^4 + \text{etc.}$$

Es kommt nun darauf an, diese Ordinate aus einigen an der zu quadrirenden Curve innerhalb der Gränzen $x = 0$ und $x = f$ in schicklichen Abständen genommenen Ordinaten zusammenzusetzen, um zu der Berechnung der Area der Coefficienten α, β, γ u. s. w. nicht zu bedürfen, als welche, wenn die Ordinaten durch die Abscissen nicht in der angenommenen Form gegeben sind, zu finden beschwerlich seyn kann. Sind nun $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, ... $y^{(r)}$, die Ordinaten an der zu quadrirenden Curve, welche den Abscissen $x = 0$, $\frac{1}{m} f$, $\frac{1}{n} f$, $\frac{1}{p} f$ . . . . . f, wo m, n, p u. s. w. > 1 sind, beziehungsweise entsprechen, so lassen sich, weil die Ausdrücke für die Ordinaten an der Curve und ihrer Quadratrix bloß in den Zahlen, womit die einzeln Glieder multiplicirt werden, verschieden sind, immer Zahlcoefficienten L, M, N, P, . . . R finden, welche $Ly^{(0)} + My^{(1)} + Ny^{(2)} + \ldots + Ry^{(r)}$ mit dem Ausdrucke $\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{3}\gamma f^2 + \frac{1}{4}\delta f^3 + \text{etc.}$, in mehr oder weniger von dem Anfange der Reihe an genommenen Gliedern identisch machen, wodurch alsdann, wo nicht ein genauer, doch, wofern nur y sich mit keiner zu großen Abweichung auf die Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}$ bringen läßt, ein genäherter Werth der Area oder von $\int y\partial x$ erhalten wird.

Nimmt man m, n, p ... u. s. w., willkührlich an, wie wenn man die Abstände der Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(1)}$ u. s. w., alle unter sich gleich setzt, so lassen sich, wie die Theorie der Gleichungen lehrt, im Allgemeinen die beiden Ausdrücke $Ly^{(0)} + My^{(1)} + \ldots + Ry^{(r)}$ und $\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{2}\gamma f^2 +$ etc. nur in so viel Gliedern identificiren, als man Ordinaten $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, ... $y^{(r)}$ genommen hat. Läßt man m, n, p, u. s. w. aber unbestimmt, so kann man außer jenen Gliedern noch so viele identisch machen, als unbestimmte m, n, p..., d. i., als Ordinaten zwischen $y^{(0)}$ und $y^{(r)}$ eingeschaltet sind. Man erhält also bey derselben Anzahl von Ordinaten, als in dem ersten Falle genommen sind, eine größere Genauigkeit, welche noch vermehrt wird, wenn man auch noch die Ordinaten in den Endpuncten der Basis $y^{(0)}$ und $y^{(r)}$ ausschließt, da diese ebenfalls schon bestimmten Absciſſen zugehören.

144. Gesetzt also, man wählt zur Bestimmung der Area drey den Abscissen $x = \frac{1}{m}f, \frac{1}{n}f, \frac{1}{p}f$ entsprechende Ordinaten, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, so daß die Ordinate an der Quadratrix durch $My^{(1)} + Ny^{(2)} + Py^{(3)}$ ausgedrückt wird, so ist

$$y^{(1)} = \alpha + \frac{1}{m}\beta f + \frac{1}{m^2}\gamma f^2 + \text{etc.}$$

$$y^{(2)} = \alpha + \frac{1}{n}\beta f + \frac{1}{n^2}\gamma f^2 + \text{etc.}$$

$$y^{(3)} = \alpha + \frac{1}{p}\beta f + \frac{1}{p^2}\gamma f^2 + \text{etc.}$$

und man erhält, wenn man den Ausdruck $My^{(1)} + Ny^{(2)} + Py^{(3)}$ entwickelt, und in den ersten sechs Gliedern mit $\alpha + \frac{1}{2}\beta f + \frac{1}{3}\gamma f^2 +$ etc. vergleicht,

durch Gleichsetzung der Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von f, zur Bestimmung von M, N, P, m, n, p, folgende sechs Gleichungen

$$M + N + P = 1$$

$$\frac{M}{m} + \frac{N}{n} + \frac{P}{p} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{M}{m^2} + \frac{N}{n^2} + \frac{P}{p^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{M}{m^3} + \frac{N}{n^3} + \frac{P}{p^3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{M}{m^4} + \frac{N}{n^4} + \frac{P}{p^4} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{M}{m^5} + \frac{N}{n^5} + \frac{P}{p^5} = \frac{1}{6}$$

Eliminirt man hier aus je zwey nächsten Gleichungen P, in den daraus hervorgehenden N, und endlich in den hieraus sich ergebenden M, so wird, wenn man

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = s, \quad \frac{1}{mn} + \frac{1}{mp} + \frac{1}{np} = t,$$

und $\frac{1}{mnp} = u$ setzt,

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t - u = 0$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{3}t - \frac{1}{2}u = 0$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{5}s + \frac{1}{4}t - \frac{1}{3}u = 0$$

Aus welchen drey Gleichungen $s = \frac{3}{2}$, $t = \frac{3}{5}$, $u = \frac{1}{20}$ gefunden wird.

Nennt man jede der Größen $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ ohne Unterschied $\frac{1}{z}$, so wird (Gleichung, 54.)

$$\frac{1}{z^3} - \frac{3}{2z^2} + \frac{3}{5z} - \frac{1}{20} = 0$$

oder $z^3 - 12z^2 + 30z - 20 = 0$.

Diese Gleichung hat, wie man bald durch Zerlegung des letzten Gliedes in Factoren und Substitution tion derselben in der Gleichung statt z findet, eine rationale Wurzel, welche ist, $z = 2$. Die beiden andern sind in dieser quadratischen Gleichung

$$z^2 - 10z + 10 = 0$$

enthalten. Sie giebt noch

$$z = 5 \pm \sqrt{15}.$$

Demnach ist $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5 \pm \sqrt{15}}$ oder $\frac{5 \mp \sqrt{15}}{10}$.

Läßt man die Werthe $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ der Größe nach auf einander folgen, so daß $\frac{1}{m}$ der kleinste, und $\frac{1}{p}$ der größte derselben ist, so ist $\frac{1}{m} = \frac{5 - \sqrt{15}}{10}$, $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{p} = \frac{5 + \sqrt{15}}{10}$.

Man bemerke, daß $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} = 1$ und $\frac{1}{mp} = \frac{1}{10}$ ist, wie auch die Gleichung $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{10} = 0$, ohne Auflösung zeigt.

Der Werth von M findet sich aus der Gleichung $M\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)$ $+\frac{1}{np}$ welche die erste der vier durch die Elimination von P und N erhaltenen ist. Es wird daraus $M=\frac{5}{18}$.

Eben so wird aus der Gleichung

$$M\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)+N\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$$

welche durch Elimination von P aus den beiden ersten der obigen sechs Gleichungen entsteht, und worin $\frac{1}{n}-\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$ ist, $N=\frac{4}{9}$. Dadurch wird endlich aus der Gleichung $M+N+P=1$, $P=\frac{5}{18}=M$.

Der Ausdruck für die Area wird nun $\frac{5(y^{(1)}+y^{(3)})+8y^{(2)}}{18}f$, wo die Ordinaten $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ den Abscissen $x=\frac{5-\sqrt{15}}{10}f$, $x=\frac{1}{2}f$, und $x=\frac{5+\sqrt{15}}{10}f$ entsprechen.

Um die Correction dieses Ausdrucks zu finden, entwickele man den Coefficienten zu f^6 in $My^{(1)}+Ny^{(2)}+Py^{(3)}$, welcher $\left(\frac{M}{m^6}+\frac{N}{n^6}+\frac{P}{p^6}\right)\eta$ oder $\left(M\left(\frac{1}{m^6}+\frac{1}{p^6}\right)+\frac{N}{n^6}\right)\eta$ ist. Dies geschieht

am kürzesten so.

Es ist $M\left(\frac{1}{m^4}+\frac{1}{p^4}\right)=\frac{1}{5}-\frac{N}{n^4}$, und

$M\left(\frac{1}{m^5}+\frac{1}{p^5}\right)=\frac{1}{6}-\frac{N}{n^5}$, folglich

$$M\left(\frac{1}{m^5}+\frac{1}{p^5}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{6}-\frac{N}{n^5}$$

das ist

$$M\left(\frac{1}{m^6}+\frac{1}{p^6}\right)+\frac{1}{mp}M\left(\frac{1}{m^4}+\frac{1}{p^4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{N}{n^5}$$

also

$$M\left(\frac{1}{m^6}+\frac{1}{p^6}\right)=\frac{1}{6}-\frac{N}{n^5}-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}-\frac{N}{n^4}\right)=$$
$$\frac{11}{75}-\frac{N}{n^5}+\frac{N}{10n^4}$$

und

$$M\left(\frac{1}{m^6}+\frac{1}{p^6}\right)+\frac{N}{n^6}=\frac{11}{75}-\frac{N}{n^4}\left(\frac{10n-10-n^2}{10n^2}\right)$$
$$=\frac{11}{75}-\frac{1}{240}=\frac{57}{400}.$$

Der gesuchte Coefficient ist also $\frac{57}{400}\eta$, er sollte aber seyn $\frac{1}{7}\eta$, ist folglich um $\frac{1}{2800}\eta$ zu klein, und der Fehler der Area nächstens $\frac{1}{2800}\eta f^7$, um welches sie nach der Formel zu klein gefunden wird. Die Fehler der Cotesischen Formeln für die Area aus fünf und aus sechs Ordinaten sind nahe $\frac{1}{2688}\eta f^7$ und

$\frac{11}{52500} \eta f^7$, um welche die Area zu groß gefunden wird. Der Fehler unserer Formel fällt zwischen beide.

Nimmt man $\int y \partial x$, anstatt es von $x = 0$ bis $x = f$ zu nehmen, von $x = a$ bis $x = b$, wo $b = a + f$, so gehören $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ zu $x = a + \frac{1}{m} f$, $a + \frac{1}{n} f$, $a + \frac{1}{p} f$, alles andere bleibt wie vorhin, und es ist der Werth des Integrals

$$\frac{5\,(y^{(1)} + y^{(3)}) + 8\,y^{(2)}}{18} f$$

$$+ \frac{f^6}{2800} \cdot \frac{1}{1.2\ldots6} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) + \text{etc.}$$

wo $y^{(4)}$ und $y^{(0)}$ die Ordinaten für $x = 0$ und $x = f$ oder für $x = a$ und $x = b$ sind.

145. Da der Fehler der vorigen Formel additiv ist, so füge ich hier noch eine bey, in welcher derselbe subtractiv ist. Man schalte zwischen den beiden Ordinaten $y^{(0)}$ $y^{(4)}$ in den Endpuncten der Basis f zwey andere $'y$ und y', welche den Abscissen $x = a + \frac{1}{10} f\,(5 - \sqrt{5})$ und $x = a + \frac{1}{10} f\,(5 + \sqrt{5})$ entsprechen, ein, so ist die Area über der Basis

$$f = \frac{y^{(0)} + y^{(4)} + 5\,('y + y')}{12} f$$

$$- \frac{f^6}{2100} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots 6} \left(\frac{\partial^5 y^{(4)}}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 y^{(0)}}{\partial x^5}\right) + \text{etc.}$$

146ᵃ. Die Idee, die Ordinaten in ungleichen Abständen und zwar so zu nehmen, daß dadurch bey einer gegebenen Anzahl von Ordinaten der möglich größte Grad

Grad der Genauigkeit erreicht wird, rührt von Gauß her, wiewohl doch auch schon Newton in der Method. Flux. et Serier. infin. da, wo er von den mechanischen Quadraturen handelt, eine ähnliche äußert. Gauß hat die Formeln für die Area bis zu dem Falle von sieben zwischen den Endpuncten der Basis genommenen Ordinaten entwickelt, und alle zu der Berechnung der Area nöthigen numerischen Bestimmungen in großer Schärfe mitgetheilt in der Methodus noua integralium valores per approximationem inueniendi. Göttingae, 1815.

146[b]. Man kann sich der mechanischen Quadraturen auch zu Integrationen bedienen, wenn kein anderes bequemes Mittel sich findet. Denn die Differentialformel $X\partial x$ stellt das Differential einer Fläche vor, woran x die Abscisse und X, eine Function von x, die Ordinate ist.

Exempel.

Den Werth der Integrals $\int \partial\varphi \sqrt{\sin\varphi}$ von $\varphi = 0^\circ$ bis $\varphi = 90^\circ$ oder $\frac{\pi}{2}$ an zu geben. Man theile den Abstand von 90° in 8 gleiche Intervalle, so erhält man in allen neun Ordinaten, welche sind

$y^{(0)} = 0$	$y^{(1)} = \sqrt{\sin 11^\circ 15'} = 0{,}44169$
$y^{(2)} = \sqrt{\sin 22^\circ 30'} = 0{,}61861$	$y^{(3)} = \sqrt{\sin 33^\circ 45'} = 0{,}74537$
$y^{(4)} = \sqrt{\sin 45^\circ} = 0{,}84090$	$y^{(5)} = \sqrt{\sin 56^\circ 15'} = 0{,}91185$
$y^{(6)} = \sqrt{\sin 67^\circ 30'} = 0{,}96119$	$y^{(7)} = \sqrt{\sin 78^\circ 45'} = 0{,}99035$
$y^{(8)} = \sqrt{\sin 90^\circ} = 1{,}00000$	

Berechnet man aus den fünf Ordinaten in den geraden Stellen $y^{(0)}, y^{(2)}, y^{(4)}, y^{(6)}, y^{(8)}$ nach der Cotesischen Formel die Area, so wird solche $= 1{,}1806$; nach der letzten Formel in (138) aber findet sich dieselbe $= 1{,}2032$. Da die Fehler der beiden gebrauchten Formeln entgegengesetzt, von einerley Ordnung und nahe gleich groß sind, so kann man das arithmetische

Mittel zwischen den beiden gefundenen Werthen für die wahre Area nehmen, welche solchergestalt wird = 1,1969. In den Actis Petropol. für 1780. Th II. S. 58. ist der Werth des Integrals = 1,1980 gefunden, aus Gränzen, welche weiter aus einander liegen, als die hiesigen, und viel mehr Rechnung erfordern.

147. Wenn in der Formel $\int X \partial x$ die Ordinate X innerhalb der Gränzen, zwischen welchen das Integral zu nehmen ist, unendlich groß wird, so kann man nicht das ganze Integral nach der vorigen Methode finden, sondern muß solches theilen.

Z. B. Wenn $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ von $x = 0$, bis $x = 1$ verlangt würde, wo $X = \frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}$ für $x = 1$ unendlich wird, so suche man zuerst den Werth des Integrals von $x = 0$ bis $x = 1 - \omega$, wo ω eine sehr kleine Größe ist, nach der vorigen Methode. Nun setze man $x = 1 - z$, so ist dem gefundenen Werthe noch der Werth von $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(4z - 6z^2 + 4z^3 - z^4)}}$ innerhalb der Gränzen $z = 0$ und $z = \omega$ genommen, zuzusetzen. Da z eine sehr kleine Größe ist, so kann man z^3 und z^4 gegen z^2 und z vernachlässigen, wodurch die vorige Formel

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(4z - 6z^2)}} = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right) \int \frac{\partial z}{\sqrt{(\frac{2}{3}z - z^2)}}$$

wird. Das Integral ist nach (Integralformel, 55) $\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ Arc. sin. vers. $3z$; welches für $z = 0$ verschwindet. Daher ist die Ergänzung des Integrals $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}}$ von $x = 0$ bis $x = 1 - \omega$, wodurch

es bis $x = 1$ erstreckt wird,

$= \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ Arc. sin vers. 3ω. Man kann auch durch Umwandlung der gegebenen Differentialformel in eine andere, indem man eine schickliche Substitution anwendet, helfen. Wenn z. B. $\int \frac{\partial x \sqrt{(1 - e^2x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ wo $e^2 < 1$ ist, von $x = 0$ bis $x = 1$ gefunden werden sollte, wo für den letzten Werth

$X = \sqrt{\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}}$ unendlich wird, so setze man

$x = \frac{2z}{1 + zz}$, so wird $\partial x = \frac{2\partial z(1 - zz)}{(1 + zz)^2}$ und

$$\frac{\partial x \sqrt{(1 - e^2x^2)}}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{2\partial z \sqrt{((1 + zz)^2 - 4e^2z^2)}}{(1 + zz)^2}$$

wo alsdann das Integral von $z = 0$ bis $z = 1$ zu nehmen ist.

148. Lambert hat in seinen Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik Th. II. S. 250 — 313 eine Abhandlung über Quadratur und Rectification der krummen Linien geliefert, worin gleichfalls annähernde Formeln für die Area einer Curve aus gleichweit von einander abstehenden Ordinaten vorkommen. Da Lambert aber nicht alle über den Endpuncten und Theilungspuncten der Basis stehende Ordinaten in Betracht gezogen hat, sondern nur einige derselben, so stehen bey gleicher Anzahl der Theile in der Basis seine Formeln den Cotesischen an Genauigkeit nach.

149. In Legendre's Exercices de Calcul intégral Par. 1811. handelt der dritte Theil von den Quadraturen. Legendre leitet zuerst die oben in (137) gegebene zweyte Formel von Maclaurin auf eine nette Art ab, und fügt dann mancherley Bemerkungen über

ihre Anwendbarkeit in den Fällen, wo einer der Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ an den Gränzen des Integrals $\int y \partial x$ oder innerhalb derselben unendlich wird, bey. Er wendet alsdann eine ähnliche Methode an, um die Coordinaten einer Curve zu finden, für welche der Bogen s durch eine Function von $\frac{\partial y}{\partial x}$ d. i. der Tangente des Winkels, welchen die berührende in dem Endpuncte des Bogens mit der Abscissenlinie macht, gegeben ist, und macht eine Anwendung davon auf das balistische Problem zur Berechnung der Schußweite. Noch zeigt Legendre eine sehr feine von Laplace herrührende Methode den Werth von $\int y \partial x$ zu finden, wenn y an den beiden Gränzen des Integrals verschwindet, innerhalb derselben beständig entweder positiv oder negativ, und nur eines einzigen größten Werths fähig ist, und handelt endlich von verschiedenen merkwürdigen bestimmten Integralen, welche zur Theorie der transscendenten Größen gehören.

150. Da es Schwierigkeiten haben kann, in der Maclaurinischen Formel in (134) die Werthe der Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. s. w. für den Anfang und das Ende des Integrals $\int y \partial x$ zu bestimmen, so ist eine Formel vorzuziehen, in welcher statt der Differentiale die Differenzen der in Rechnung gezogenen Ordinaten vorkommen. Diese theile ich hier noch aus Laplaces Mécanique céléste Livre IX. art. 5. mit. Es ist nämlich

$$\frac{1}{\omega}\int y \partial x = \frac{1}{2}y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} + \ldots + y^{(n-1)} + \frac{1}{2}y^{(n)}$$

$$- \frac{1}{12} (\Delta. \; y^{(n-1)} - \Delta. \; y^{(0)})$$

$$- \frac{1}{24} (\Delta^2. \; y^{(n-2)} + \Delta^2. \; y^{(0)})$$

$$- \frac{19}{720} (\Delta^3. \; y^{(n-3)} - \Delta^3. \; y^{(0)})$$

$$- \frac{3}{160} (\Delta^4. \; y^{(n-4)} + \Delta^4. \; y^{(0)})$$

$$- \frac{863}{60480} (\Delta^5. \; y^{(n-5)} - \Delta^5. \; y^{(0)})$$

$$- \text{etc.}$$

wo ω der Abstand je zweyer nächsten Ordinaten ist. Die Formel rührt eigentlich von Lagrange her, welcher sie zuerst in der Abhandlung: Sur une nouvelle espéce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, in den Mém. de Berlin für das Jahr 1772 bekannt gemacht hat. Laplace hat ihr eine für die Berechnung bequemere Form gegeben.

Partiell quadrirbare Curven.

151. Eine Aufgabe über die Quadratur krummer Linien, welche mit den Untersuchungen in der unbestimmten Analytik verwandt ist, entsteht, wenn die Formen quadrirbarer krummer Linien gesucht werden. Da die Fläche einer Curve ist $Z = \int y \partial x$, also $\partial Z = y \partial x$ und $y = \frac{\partial Z}{\partial x}$, so nehme man für Z irgend eine algebraische Function von x, differentiire dieselbe, und mache den Differentialquotienten $\frac{\partial Z}{\partial x}$ zur Ordinate, so ist die Curve quadrirbar.

152. Die Frage kann auch dahin erweitert werden, daß die Curven zu finden seyn, an welchen einzelne Portionen ihrer Fläche algebraisch angegeben werden können, obgleich die unbestimmte Quadratur transscendent ist. Johann Bernoulli und Hermann haben eine Auflösung dieser Aufgabe gefunden, die in des ersteren Werken, T. II. Nr. III befindlich ist. Man nehme eine krumme Linie, die nicht quadrirbar ist. Ihre Gleichung sey $y = \varphi x$, wo φ das Functionszeichen ist. Die Curve gehe durch den Anfang der Coordinaten. Durch denselben Anfangspunct werde eine gerade oder krumme Linie gezogen, deren Gleichung sey $t = \psi x$. Diese beiden Curven wollen wir durch die Bezeichnungen, A, B, unterscheiden. Auf der Axe der y für die Curve A trage man die Ordinate t als Abscisse, und ziehe aus ihrem Endpuncte an die Curve A mit der Axe der x eine parallele u, so ist $\varphi u = t$. Die beiden Flächenräume an der Curve A sind $\int y\partial x$ und $\int u\partial t$. Da $t = \psi x$ ist, so ist $\partial t = \psi' x . \partial x$, wo $\psi' x$ den Differentialfactor bezeichnet. Beide Flächenräume zusammen sind $= \int y\partial x + \int u\psi' x . \partial x$. Man construire eine dritte Curve C, deren Ordinate zu der Abscisse x sey $z = y + u\psi' x$, so ist ihr Flächenraum $Z = \int z\partial x = \int y\partial x + \int u\psi' x . \partial x$, so groß als die beiden Flächenräume an der Curve A. Für die Abscissen x, die zu den Durchschnittspuncten der Curven A und B gehören, ist die Summe der beiden Flächenräume $= xy$, eine algebraische Größe, wenn y eine algebraische Function von x ist. Die Curve C, deren Ordinaten sind $z = y + u\psi' x$, oder $z = \varphi x + u\psi' x$, ist also für diejenigen Abscissen, die zu den Durchschnittspuncten der Curven A und B gehören, quadrirbar. An diesen Puncten ist $\varphi x = \psi x$. Denn da $\varphi u = t$, und $t = \psi x$ ist, so ist $\varphi u = \psi x$. Für die Durchschnittspuncte ist $u = x$, also daselbst $\varphi x = \psi x$. Diese Gleichung bestimmt die Werthe der Abscissen x zu den Durchschnittspuncten.

Z. B. Man nehme statt der Curve B eine gerade Linie, welche mit der Axe der x einen halben rechten Winkel mache, so ist $t = x$; $\partial t = \partial x$ oder $\psi' x = 1$, und $z = \varphi x + u$, auch $\varphi u = x$. An den Durchschnittspuncten der Curve A mit der geraden ist $\varphi x = x$.

Die Curve B sey eine Parabel, so ist $t = \sqrt{ax}$, und $\partial t = \frac{a}{2\sqrt{ax}} \partial x$, also $\psi' x = \frac{a}{2\sqrt{ax}}$, und die Gleichung für die partiell quadrirbare Curve ist $z = \varphi x + \frac{au}{2\sqrt{ax}}$. Für die Größe u ist die Gleichung $\varphi u = \sqrt{ax}$. An den Durchschnittspuncten der Parabel mit der Curve A ist $\varphi x = \sqrt{ax}$.

Dieser Vortrag ist zur Erläuterung des Aufsatzes von Bernoulli dienlich, welcher derselben noch bedarf, besonders weil die Figuren nicht gehörig gezeichnet sind. Die Bezeichnungsart ist hier aus der neuen Analysis genommen.

153. **Lacroix** giebt in seinem Werke über die Differential- und Integralrechnung, Th. II. §. 535. eine bloß analytische Auflösung der Aufgabe von den partiell quadrirbaren Curven. Der Flächenraum einer solchen sey $Z = \int P\partial x + \int Q\partial x$, wo das $\int P\partial x$ algebraisch sey, das andere, $\int Q\partial x$ aber transscendent. Dieses letztere sey $= \int u\partial x - \int v\partial z$, wo u und v ähnliche Functionen, jene von x, diese von z sind, das heißt, aus x und z nebst den Constanten auf gleiche Art zusammen gesetzt werden. Die veränderliche z sey eine solche Function von x, daß sie $= x$ werde, wenn x die Werthe a, b, c, u. s. f., hat. Dadurch wird für diese Werthe $v = u$, und $\int u\partial x - \int v\partial z = 0$, also $\int Q\partial x = 0$, und $\int y\partial x = \int P\partial x$, eine algebraische Größe. Um der Function v diese Beschaffen-

heit zu geben, setze man $z = x + (x-a)(x-b)(x-c)$ etc, oder allgemeiner $z = x + T(x-a)(x-b)(x-c)$ etc. wo T eine Function von x ist, die keine einfache Factoren enthält, als welche alle in dem beygefügten Producte enthalten seyn sollen; auch muß T nicht etwa unendlich groß werden, wenn das Product verschwindet. Zugleich muß T so bestimmt werden, daß $\int v\partial z$ mit $\int u\partial x$ zugleich anfange, damit keine transscendente Constante sich in dem Integral finde.

154. Exempel. Es sey $u = \sqrt{(2rx - xx)}$; $v = \sqrt{(2rz - zz)}$; $z = x + T(x - a)$, so ist

$$\int y\partial x = \int P\partial x + \int \partial x \sqrt{(2rx - xx)} - \int \partial z \sqrt{(2rz - zz)}.$$

Die beiden transscendenten Integrale hangen vom Kreise ab, und sind $= 0$, wenn $x = 0$, und $z = 0$ sind. Darum muß $z = 0$ seyn, wenn $x = 0$ ist, also muß T den Factor x enthalten. Man setze

$$T = \frac{x}{a}, \text{ so wird } z = \frac{xx}{a}; \ \partial z = \frac{2x\partial x}{a};$$

$$2rz - zz = \frac{(2ar - xx)x^2}{aa}, \text{ und daher}$$

$$y = P + \sqrt{(2rx - xx)} - \frac{2xx}{aa}\sqrt{(2ar - xx)}.$$

An jeder Curve, welche diese Gleichung, bey irgend einer Function P von x hat, ist die Area von $x = 0$ bis $x = a$ algebraisch quadrirbar. Die beiden transscendenten Integrale sind

$$\frac{1}{2} r^2 \text{Ang.sin} \frac{\sqrt{(2rx - xx)}}{r} - \frac{1}{2}(r - x)\sqrt{(2rx - xx)},$$

und

$$\frac{1}{2} r^2 \text{Ang.sin} \frac{\sqrt{(2rz - zz)}}{r} - \frac{1}{2}(r - z)\sqrt{(2rz - zz)}.$$

aus Integralformel (58. 56.). In dem letztern setze man für z seinen Werth $\frac{xx}{a}$, so wird es

$$\frac{1}{2} r^2 \text{ Ang.sin } \frac{x}{ar} \sqrt{(2ar - xx)}$$

$$- \frac{(ar - xx)x}{2aa} \sqrt{(2ar - xx)},$$

welches für $x = a$ dem ersteren gleich wird.

Das $\int \frac{2xx}{aa} \partial x \sqrt{(2ar - xx)}$ ist (aus Integralformel, 69. 58. 49.) =

$$- \frac{x}{2aa}(ar - x^2)\sqrt{(2ar - xx)} + r^2 \text{ Ang sin } \frac{x}{\sqrt{2ar}}$$

Der Winkel in dieser Form ist die Hälfte des Winkels in jener oder des Ang. sin $\frac{x}{ar} \sqrt{(2ar - xx)}$.

Denn man setze Ang . sin $\frac{x}{\sqrt{2ar}} = \varphi$, so ist

$$\cos \varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{xx}{2ar}\right)} = \sqrt{\frac{2ar - xx}{2ar}},$$

und

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi . \cos \varphi = \frac{x}{ar} \sqrt{(2ar - xx)}.$$

Beide Integralformeln stimmen also überein.

155. Von Eulers Untersuchungen betreffend die Curve, welche innerhalb eines Quadranten der Grundfläche einer Halbkugel zu beschreiben ist, damit das Stück der Kugelfläche, dessen orthographische Projection die Curve ist, quadrirbar sey, ist in dem Artikel, Florentinische Aufgabe, 20., Nachricht gegeben. Auf einem geraden Kegel ist es leicht, quadrirbare

Stücke der Oberfläche an zu geben. Man darf nur innerhalb der Grundfläche und in der Ebene derselben irgend eine krumme Linie, die sich quadriren läßt, verzeichnen, so schneiden die geraden Cylinder, deren Grundflächen jene Curven sind, (das Wort Cylinder hier in weiterer Bedeutung, wie krumme Flächen, 20, genommen) auf der krummen Seitenfläche des Kegels quadrirbare Stücke ab Der Grund ist, weil irgend ein Stück der krummen Seitenfläche eines geraden Kegels sich zu seiner Projection auf die Grundfläche verhält, wie die Seitenlinie des Kegels zum Halbmesser der Grundfläche desselben wie sich leicht durch die Elementargeometrie zeigen läßt. Diese Eigenschaft kommt außer der Fläche des geraden Kegels noch allen den krummen Flächen zu, für welche bey rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Ausdruck $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ einer constanten Größe gleich ist. Es ist nämlich

$$\partial x \partial y \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}$$ das Element irgend einer krummen Fläche, und $\partial x \partial y$ die Area der Projection desselben auf die Ebene der x, y. Daher jenes zu diesem in einem beständigen Verhältnisse, wenn $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \text{Const.}$ ist.

Quadratwurzel, f. Quadrat.

Quadrilaterum, eine vierseitige geradlinige Figur.

Quadrillion, eine Zahl, bestehend aus einer Million Trillionen, oder 10^{24}.

Quadrinomium, eine viertheilige Größe, wie $a + b + c + d$, oder $a + bx + cx^2 + dx^3$.

Quadriren, s. Quadratur.

Quadrisectio, Theilung einer Größe, eines Winkels in vier Theile.

Quantitas, s. Größe.

Queraxe, latus transversum, ist die Hauptaxe in der Ellipse und Hyperbel.

Quersinus, s. Sinus versus.

Quindecagonum, eine geradlinige Figur von funfzehn Seiten, insbesondere eine ordentliche.

Quinquangulum, eine geradlinige Figur mit fünf Winkeln, das ist, eine fünfseitige.

Quinquillion, eine Zahl, bestehend aus einer Million von Quadrillionen, d. i. 10^{30}.

Quotient, ist diejenige Zahl, welche anzeigt, wie vielmahl eine Zahl in einer anderen enthalten ist. Ein Quotient verhält sich zu der Einheit, wie der Dividendus zu dem Divisor; s. Division und Bruch. — In allgemeinen Ausdrücken eines Quotienten oder Bruches wird manchmahl bey gewissen Werthen der darin enthaltenen veränderlichen Größen Dividendus und Divisor, oder Zähler und Nenner zugleich Null. Wie der Werth des Quotienten in diesem Falle gefunden werde, zeigt der Artikel, Function, 50.

R.

Rad, aristotelisches, ist die Benennung einer Aufgabe oder Schwierigkeit, die wälzende Bewegung eines Kreises auf einer geraden Linie betreffend, so genannt, weil Aristoteles zuerst sie vorgetragen hat. Es ist die, welche in dem Artikel, Cykloide, Th. I.

S. 600., angeführt ist. Daselbst ist bemerkt, daß das Wälzen eines Kreises (oder auch jeder andern krummen Linie,) auf einer geraden Linie noch nicht die Gleichheit zwischen dem Stücke jener und dem Kreis-Bogen, dessen Endpuncte bey dem Wälzen in die Endpuncte dieses Stücks fallen, zur Folge hat. Hier folgt die Erörterung des Falles, da zwey concentrische Kreise gleiche Winkelbewegung haben, indem ihr Mittelpunct auf einer geraden Linie sich bewegt.

Es ist (Fig. 19.) C der gemeinschaftliche Mittelpunct zweyer Kreise, an welchen in A und B die berührenden AD und BE sich parallel sind, indem A und B mit C in gerader Linie liegen. Der Mittelpunct C bewege sich nach CF parallel mit AD, und mit demselben also die Ebene beider Kreise, indem zugleich diese Ebene sich um C dreht, von M nach A, so wie von N nach B. Ein Punct M des von CA beschriebenen Kreises hat nun zwey Bewegungen, eine parallel mit CF nach Mm, die andere parallel mit CA nach Mp. Durch beide gelange er nach P auf AD, wo der Kreis, nachdem er sich um den Winkel ACM gedreht hat, die AD berührt. Der Mittelpunct des Kreises ist nun in G, in der auf AD durch P senkrechten PG, so daß CG = AP ist. Die Länge AP hat zu dem Bogen AM kein bestimmtes Verhältniß, da es von der Geschwindigkeit des Punctes C auf CF und der Geschwindigkeit auf dem Kreise abhängt, deren Verhältniß willkührlich ist. Auf dem mit CB beschriebenen Kreise liege der Punct N mit C und M in gerader Linie. Wenn M nach P gekommen ist, also CM auf GP liegt, so fällt N auch auf diese GP in Q auf BE, wo GQ = CN oder CB ist. Man ziehe durch N mit CG die parallele Nn, und mit CB die parallele Nq, so hat N zwey Bewegungen Nn und Nq. Die Bewegung Nq verhält sich zu der Mp wie CB : CA; aber die Bewegung Nn ist gegen die Nq größer als die Mm gegen Mp ist. Ist nun AP = Bogen AM,

so ist BQ grösser als Bogen BN. Nähme man CB grösser als CA, so würde BQ kleiner als BN seyn.

Was Aristoteles selbst zur Erklärung der Schwierigkeit beybringt, läuft auf leere Spitzfündigkeiten hinaus und ist keine wahre Auflösung derselben.

Galilei verglich die wälzende Bewegung zweyer concentrischen Kreise mit der ähnlichen zweyer concentrischen ähnlichen, ordentlichen Vielecke. Wenn das größere Vieleck auf einer geraden Linie herumgewälzt wird, so daß die Seiten desselben, bey der Drehung um einen Winkelpunct nach dem andern, eine stetige gerade Linie ausmachen, so legen sich die Seiten des kleineren Vielecks auf eine eben so lange Linie, lassen aber Zwischenräume zwischen einander. Diese Erklärung möchte die Schwierigkeit eher vergrößern als heben. Denn der kleinere Kreis läßt auf der Linie, auf welcher er sich wälzt, keine Zwischenräume. Kästner scheint sie zu billigen. Analysis endl. Größen, §. 601.

Tacquet hat eine große Abhandlung de circulorum volutionibus geschrieben. In der Vorrede erzählt er, daß die Untersuchung ihm sehr viele Mühe gemacht habe. Die Erklärungen des Aristoteles und Galilei verwirft er ganz. Er selbst will beweisen, daß, wenn die Geschwindigkeit des Mittelpunctes so groß ist, als die Geschwindigkeit der Drehung, der Weg, den der Kreis auf der berührenden geraden bey einer Umdrehung zurücklegt, dem Umfange desselben gleich sey. Die Folgerung ist aber gar nicht einleuchtend. Eine drehende und schleifende Bewegung mit einander verbunden will er nicht zugeben.

Mairan hat der Akademie der Wissenschaften zu Paris im Jahre 1715 eine Erklärung der Frage über die Wälzung concentrischer Kreise zur Prüfung übergeben, welche von derselben völlig gebilligt ward. Ein Auszug ist in der Histoire pour 1715 befindlich. Er bemerkt, daß die Bewegung eines Punctes

auf dem Umfange aus zweyen, einer kreisförmigen und einer geraden, zusammengesetzt ist. Das Verhältniß beider Bewegungen kann dasjenige der Gleichheit oder irgend einer Ungleichheit seyn. In dem letztern Falle wird der Kreis, den er sich als ein Vieleck von unendlich vielen kleinen Seiten vorstellt, über der Grundlinie fortgeschleift, vorwärts oder rückwärts. Die von mir gegebene Erklärung wird deutlicher seyn. Die Kreisbewegung ist in der That noch eine zusammengesetzte.

Die **Wegemesser** beruhen auf der Voraussetzung, daß die Länge, auf welcher ein Rad bey jedem Umlaufe hinrollt, dem Umfange desselben gleich sey. Die Reibung an den Achsen könnte den Weg etwas länger machen, wenn das Rad dadurch etwas geschleift würde.

Radialis curva ist die Benennung, welche einige Schriftsteller solchen krummen Linien geben, deren Construction unmittelbar auf der Relation zwischen den aus einem bestimmten Puncte an sie gezogenen geraden und den zugehörigen Winkeln, von einer gegebenen Linie an gerechnet, beruhet, wie die verschiedenen Spiralen, die Quadratrix des Dinostratus, die Epicykloiden. Die aus dem angenommenen Puncte an die Curve gezogenen geraden sind wie die Radii eines Kreises, der selbst eine curva radialis heißen mag. Übrigens kann man jede Curve als eine radialis betrachten, weil man die Gleichung, welche zwischen geraden Coordinaten für sie gegeben wird, auf eine zwischen Winkeln und geraden aus einem gegebenen Puncte bringen kann. Die Benennung ist übrigens wenig üblich.

Radicalzeichen oder **Wurzelzeichen** siehe Potenz.

Radiometer, ein in ältern Zeiten gebräuchliches Werkzeug der Seefahrer, Höhen der Gestirne zu

messen, der so genannte Jakobsstab. S. die zweyte Abtheilung dieses Werks.

Radius ist in der gemeinen Geometrie der Halbmesser eines Kreises oder einer Kugel, den man mit einem der Strahlen verglichen hat, welche ein leuchtender Körper aussendet. In der höhern Geometrie ist Radius jede der Linien, die von einem gegebenen Puncte an eine Curve gezogen werden. In der Astronomie wird eine solche Linie durch die Benennung, radius vector, ausgezeichnet. — Radius curvedinis ist der Halbmesser der Krümmung, s. Krümmungskreis.

Radix, s. Wurzel.

Radlinie, s. Cykloide.

Ratio, s. Verhältniß.

Rational ist eine Zahl, welche sich durch die Einheit und Theile derselben vollständig ausdrucken oder darstellen läßt. Das Verhältniß zweyer Größen ist rational, wenn sie sich verhalten, wie zwey rationale Zahlen, das ist, wenn sie commensurabel sind. Das Gegentheil von rational ist irrational, s. Irrational. Euklides betrachtet die Linien, deren Quadrate commensurabel sind, ob sie gleich selbst es nicht sind, noch als rational.

Raum ist die unbegränzte, blos im Verstande gedachte, nach allen Richtungen hin sich erstreckende Ausdehnung, worin der Geometer nach Belieben, uneingeschränkt seine Linien ziehen, und seine Flächen ausbreiten kann. Zieht man in diesem Raume durch einen angenommenen Punct drey auf einander senkrechte gerade Linien, so wird der ganze unendliche Raum in acht Theile getheilt, in deren einem jeder Punct durch die zugehörigen drey Coordinaten seine Stelle angewiesen bekömmt. Der Raum in der physischen Welt ist eben dieses, nur daß der Punct, durch welchen wir die

Axen der Coordinaten für die darin befindlichen Körper ziehen, nicht ein unveränderlicher ist. Leibnitz nannte diesen physischen Raum sehr passend die Ordnung der neben einander befindlichen Dinge.

Raute (Rhombus, fr. Losange) ist ein Parallelogramm von vier gleichen Seiten mit ungleichen Winkeln.

Real ist eine Größe, deren Zusammensetzung aus anderen Größen keinen Widerspruch gegen die Bedingungen der Möglichkeit enthält. Es ist das Synonym von Möglich. Die Realität einer Größe in der reinen Mathematik betrifft blos die Gedenkbarkeit. Doch kann eine reale Größe auch wirklich in Zahlen oder geometrisch wirklich dargestellt werden, wenigstens nahe genug, wenn sie mit einer Irrationalität behaftet seyn sollte.

Recheninstrumente und Rechenmaschinen, s. Instrumentale Arithmetik.

Rechenknecht ist die Aufstellung der Vielfachen einer Zahl bis zu dem Neunfachen, um sich derselben bey dem Multipliciren und Dividiren zu bedienen, besonders wenn eine Zahl oft als Multiplicandus und Divisor gebraucht wird. Nepers Rechenstäbe liefern die Vielfachen einer Zahl bis zu dem Neunfachen ganz leicht.

Rechenkunst im engern Verstande ist die Anleitung zu der Kunst, sicher und bequem mit Zahlen zu rechnen, oder aus gegebenen Zahlen die gesuchten, ihrer Verbindung mit jenen gemäß, herzuleiten. Diese ist diejenige, welche besonders in den kaufmännischen Rechenbüchern gelehrt wird. Man mag sie durch die Benennungen, *praktische*, *technische* oder *bürgerliche* Rechenkunst von der rein theoretischen Arithmetik unterscheiden, s. Arithmetik. Die Grundlage zu derselben sind die Regeln für die vier gemeinen Species

in

in ganzen und gebrochenen Zahlen; die Lehre von den Proportionen, den einfachen und den zusammengesetzten, die Kettenregel, und auch die Lehre von der arithmetischen und geometrischen Progression. Dieses alles wird in der ersten Abtheilung dieses Werks vorgetragen. Die Beschaffenheit der Gegenstände, worauf die Rechnung anzuwenden ist, muß die besondere Anleitung zur praktischen Arithmetik erklären, damit die Rechnung darauf gehörig, und mit Vortheil angewandt werden könne, z. B. die Waaren- Wechsel- und Münzrechnung, das Buchhalten die Leibrentenrechnung, u. a. m. Davon wird das nöthige in einer folgenden Abtheilung unsers Werks beygebracht werden.

Rechnung auf Linien und mit der Feder, s. Instrumentale Arithmetik.

Seit einiger Zeit sind die Übungen im Kopfrechnen sehr empfohlen. Sie dienen allerdings zur Erweckung der Aufmerksamkeit und zur Erfindung von allerhand Vortheilen aus der Beschaffenheit der vorgegebenen Zahlen. Anweisung dazu geben folgende Schriften.

Biermanns Anleitung zum Rechnen im Kopfe. Zweyte Auflage. Hannover, 1795.

Köhlers Anweisung zum Kopfrechnen. Vierte Auflage. Leipzig, 1816.

Heuß Anweisung, das Rechnen im Kopfe zu lehren. Stuttgart. 1804.

Rechnungsprobe ist eine Rechnung, wodurch man sich zu versichern sucht, daß das Resultat einer vollführten Rechnung in Zahlen richtig sey.

Die beste Probe ist, wenn zwey Rechner sie unternehmen, und ihre Resultate übereinstimmig finden. Wenn ein Rechner dieses nicht haben kann, mag er selbst die ganze Rechnung nach einer Zwischenzeit wieder vornehmen, und zwar auf eine abgeänderte Art.

z. B. bey dem Addiren besonders vieler Posten wird er einmahl sie von oben herunter, das anderemahl von unten nach oben summiren. Oder er mag sie in zwey oder mehrere Abtheilungen sondern, von jeder die Summe ziehen, und die Summen von diesen Summen nehmen.

Die Multiplication mag er durch die Division, die Division durch die Multiplication prüfen. Hier können auch die Logarithmen nützliche Dienste leisten. Das Facit von einer Regel de Tri nehme man als ein gegebenes Glied der Proportion, und eines der gegebenen Glieder zum gesuchten.

Insbesondere aber wird man unter einer Rechnungsprobe ein Verfahren verstehen, welches kürzer ist als die gemachte Rechnung, die man prüfen will. Von dieser Art ist die Neuner- und Eilferprobe, welche sich auf die Beschaffenheit unsers Zahlensystems gründen.

Die Neunerprobe beruht darauf, daß die Summe der Ziffern in einer Zahl durch 9 dividirt denselben Rest läßt, welchen die Zahl selbst durch 9 dividirt übrig läßt s. Neun. Diesen Rest nennt man die Probezahl.

Eine Summe zu prüfen, zähle man die Ziffern aller Theile zusammen, wobey man jede volle Neun wegwirft, und merke sich den Rest Die Ziffern in der Summe addire man ebenfalls, werfe die Neuner weg, so muß der Rest mit jenem vorher gefundenen übereinstimmen, wenn die Rechnung richtig geführt ist. Das folgende Exempel wird den Grund zeigen.

	Reste.
835674	6
746135	8
28463	5
7294	4
4358	2
1621924	7

Die Summen der Ziffern in den einzelnen Theilen lassen zum Reste die beygezeichneten Zahlen. Dieses sind zugleich die Reste von der Division jedes Theils durch 9. Die Summe dieser Reste ist 25 oder $2 . 9 + 7$. Die gefundene Summe der Theile muß also bey der Division durch 9 den Rest 7 lassen; eben diesen Rest muß aber auch die Summe der Ziffern in der gefundenen Summe geben, wie es auch geschieht.

Anstatt den Rest bey jedem Theile einzeln hinzusetzen, kann man kürzer die Ziffern in den Theilen nach der Reihe summiren, und jede volle 9 wegwerfen.

Die Probe der Multiplication geschieht durch die Neun folgendermaßen. Man suche die Reste von der Division der Summe der Ziffern in beiden Factoren durch 9, kurz die Probezahlen aus beiden, multiplicire sie in einander, werfe die etwa darin enthaltenen 9 weg: der Rest muß der Probezahl aus dem Producte gleich seyn.

Zum Beyspiel.

		Reste	Product
	835674	6	42
	27385	7	
Product	22884932490	6	6

Der Beweis ist in dem Artikel, Neun, 5. gegeben.

Die Probe der Division durch Neun geschieht auf eine ähnliche Art. Die Probezahlen des Divisors und Quotienten werden in einander multiplicirt, dazu wird die Probezahl aus dem Reste addirt, von der Summe werden die vollen Neuner weggeworfen, der Rest muß der Probezahl aus dem Dividendus gleich seyn.

Zum Beyspiel.

Dividendus	22884923947
Divisor	27385
Quotient	835673
Rest	18842

Die Probezahl aus dem Divisor ist 7, aus dem Quotienten 5, aus dem Reste 5. Die letztere addire man zu dem Producte jener, so ist die Summe = 40. Die Probezahl daraus, 4, ist mit der aus dem Dividendus dieselbe.

Es folgt freylich noch nicht, wenn die Probe zutrifft, daß die Rechnung richtig sey. Denn das Facit könnte zwey falsche Ziffern enthalten, deren Summe richtig wäre, so daß, was die eine zu groß, die andere zu klein ist. Oder es könnten bey der Rechnung und in der Probe zwey entgegengesetzte gleiche Fehler begangen seyn. Diese Fälle sind aber nicht wahrscheinlich, am wenigsten bey einem irgends geübten Rechner.

Die Zahl Eilf giebt eine ähnliche Probe an die Hand, nur daß diese nicht so leicht als die Neunerprobe ist. Der Rest von der Division durch 11, oder die Probezahl ist der Überschuß der Summe der Ziffern, in den ungeraden Stellen von der rechten Hand her über die Summe der Ziffern in den geraden Stellen. Ist die letztere größer als jene, so werden 11 oder ein Vielfaches von 11 zu jener addirt. S. den Artik. Neun, 7. ff.

In dem Additions-Exempel oben sind die Reste von der Division durch 11 oder die Probezahlen, 4, 5, 6, 1, 2, deren Summe 18 = 11 + 7, und daraus die Probezahl 7. In der Summe der Zahlen ist die Probezahl 16 — 9 = 7. Man wird die Ziffern in den ungeraden Stellen besonders, und die in den geraden ebenfalls besonders zu summiren, die vollen 11 wegzuwerfen, und die letztere Summe von jener abzuziehen haben.

In dem Multiplications-Exempel sind die Probezahlen aus den Factoren 4 und 6, ihr Product 24 giebt die Probezahl 2. Die Probezahl aus dem Producte ist ebenfalls 2.

In dem Divisions Exempel ist die Probezahl aus dem Divisor 6, aus dem Quotienten 3, aus dem Reste 10. Dieses giebt zur Probezahl 6 . 3 + 10 = 28 oder 6. Dieses ist auch die Probezahl aus dem Dividendus.

Die Neunerprobe der Addition und Subtraction lehrt Wallis in der Mathesi universali, cap. 16. mit der Bemerkung, daß er nicht wisse, ob jemand den Beweis davon gegeben habe. Diesen fügt er hinzu. Dieselbe Probe für die Multiplication und Division lehrt er daselbst, cap. 21. Kästner sagt in der Geschichte der Mathematik, I. S. 619, daß ihm von einer Probe der Multiplication durch 9 nichts gegenwärtig sey, und daß er sich vergebens darnach umgesehen habe.

Clausberg in seiner Rechenkunst, Th. II. S. 677. bezeigt kein Vertrauen zu der Neunerprobe, sondern lehrt statt derselben die Elferprobe. Allein diese ist erstlich weniger bequem und kann triegen, wo jene den Irrthum angiebt.

Wenn nur eine Ziffer unrichtig ist, oder zwey Ziffern in Absicht auf ihren absoluten Werth ungleich fehlen, so zeigen beide Proben es an. Sind zwey Fehler gleich und entgegengesetzt, so verschweigt ihn die Neunerprobe und in gleichnamigen Stellen auch die Eilferprobe. Sind zwey Fehler gleich und gleichnamig, so zeigt ihn die Neunerprobe an, die Eilferprobe verschweigt ihn aber, wenn er in ungleichnamigen Stellen begangen ist. Z. B. das richtige Facit sey

F 437865927,
das unrichtige A 435865947,
oder B 435865907,

so giebt die Neunerprobe für A wie für F die Probe-

bezahl 5, die Eilferprobe aber 4 und 0. Hingegen giebt die Eilferprobe für B wie für F die Probezahl 4. Da die Neunerprobe aber für B giebt 2.

Die Fehlsamkeit beider Proben ist gleich, wie man an diesem Exempel sehen mag. Es sind darin 9 Ziffern, aus welchen sich $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}$ oder 36 verschiedene Stellen für zwey fehlerhafte Ziffern nehmen lassen. Soviel Binionen sind nämlich in einer Anzahl von 9 verschiedenen Dingen enthalten (Combination, 12.). Unter diesen 36 Stellen sind 5.4 oder 20, worin die Stellenzahlen der beiden Ziffern ungleichnamig sind. Nämlich es giebt 5 ungerade Stellen für die eine der Ziffer und bey jeder 4 gerade für die andere Ziffer. Ferner giebt es $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ oder 10 Fälle, wo die Ziffern beide in den ungeraden, und $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ Fälle, wo sie beide in den geraden sind. Sind die Fehler gleich und entgegengesetzt, so giebt es 20 Fälle unter 36, wo die Eilferprobe den Fehler angiebt, da die Neunerprobe sie verschweigt. Sind die Fehler gleichnamig so zeigt die Neunerprobe sie an, die Eilferprobe verschweigt sie aber in 20 Fällen unter 36.

Es können auch drey Ziffern fehlerhaft seyn, so daß alle drey zwey fehlerhaften gleichgültig sind, wie im folgenden Exempel.

Richtiges	F.	437861923
unrichtiges	A.	435862123

wo beide Proben triegen.

Bey der Addition benannter Zahlen hat man wegen der Verwandlung der kleineren Einheiten in größere noch eine Abänderung der Probe zu machen. Z. B. die Summe der Groschen betrage 185, wovon

168 in 7 Rthlr. verwandelt, und 17 zum Facit genommen sind. Da von 24 die Probezahl ist 6 nach der Neunerprobe, so ist für die abgesonderten 7 Rthlr. die Probezahl 6 . 7 oder 6, und diese zu der Probezahl von 17, nämlich 8 genommen, muß eine Probezahl 14 oder 5 geben, welche mit der Probezahl der Summe übereinkommt, wie es bey 185 auch zutrifft. Auf ähnliche Art verfährt man bey der Probirung der Pfennige, wo für jeden abgesonderten Groschen oder 12 Pfennige zu der Probezahl der übrig gebliebenen Pfennige 3 zu addiren sind. Die Rechenmeister geben deshalb einem Thaler 6 Probegroschen, und dem Groschen 3 Probepfennige.

Nach der Eilferprobe hat der Thaler 2 Probegroschen, der Groschen 1 Probepfennig.

Auf ähnliche Art verfährt man bey andern benannten Größen. So hat ein Pfund 5 Probeloth nach der Neunerprobe und 10 Probeloth nach der Eilferprobe.

In den Beyträgen zur Mathematik und Physik von F. G. Busse, Dessau 1785, ist eine Abhandlung über die Rechnungsproben enthalten. Was daselbst zur Beurtheilung der beiden hier erklärten Rechnungsproben beygebracht wird, möchte eine Verbesserung bedürfen. Die Wahrscheinlichkeit, daß bey dem Zutreffen der Probe das Facit richtig sey, hängt von der Fertigkeit des Rechners ab. Man kann nur die Zuverlässigkeit beider Proben mit einander vergleichen.

Rechnungszeichen, s. Zeichen.

Reciprok (reciprocum) ist eine Zahl von der andern, wenn das Product beider die Einheit giebt. So ist 3 das Reciproke von $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{n}$ von n. Wer iel zu rechnen hat, mag sich eine Tafel der Brüche

$\frac{1}{n}$ machen. In Huttens Wörterbuche ist eine solche für die Quotienten der Zahlen von 1 bis 1000 auf 7 Decimalstellen enthalten.

Ein Verhältniß ist das Reciproke eines andern, wenn die Stellung der Glieder die entgegengesetzte ist, wie 5 : 3 und 3 : 5.

Ein Parallelogramm ist das Reciproke eines andern, ihm gleichwinkligen, wenn die Seiten des einen die mittleren Glieder der Proportion sind, in welcher die äußern Glieder die Seiten des andern sind.

Eine Gleichung heißt eine reciproke, wenn neben jeder Wurzel derselben, p, auch $\frac{1}{p}$ als Wurzel vorhanden ist, s. Gleichung, 17.

Rectangel, ist ein Rechteck.

Rectification ist die Verwandlung eines Bogens einer krummen Linie in eine eben so lange gerade Linie.

1. Eine krumme Linie muß man sich nicht aus höchst kleinen, selbst nicht unendlich kleinen, geraden Linien zusammengesetzt vorstellen. Man mag sie sich als Gränze der eingeschriebenen Polygone gedenken, muß aber alsdann wohl bemerken, daß eine Gränze immer von dem, was sich der Gränze nähert, unterschieden bleibt. Es ist vielleicht besser, sogar die Vorstellung einer Gränze hier nicht zu gebrauchen, um jede Übereinkunft des geraden mit dem krummen zu entfernen. Wolf sagt in den Elementis Analyseos, P. II. §. 144, daß eine krumme Linie aus unzählig vielen, unendlich kleinen geraden lineolis bestehe, und wenn eine derselben durch die Differentialrechnung gefunden sey, so gebe die Summe die Länge der Curve. Der Zusatz insbesondere erweckt ganz verkehrte Begriffe, da man

ein Differential nicht berechnen kann, und die Integralrechnung auch kein Summiren unendlich kleiner Theile ist. In der französischen großen Encyklopädie ist ein Artikel über die Quadratur des Kreises, dessen Verfasser, Pankouke, der Herausgeber der ersten Ausgabe, sich vorstellt, daß alle Curven aus geraden Linien, oder Kreisbogen oder beiderley zusammengesetzt seyn; daß diejenigen, welche keine Kreisbogen enthalten, als unendliche Reihen kleiner geraden Linien anzusehen seyn, deren Gleichung ihre Krümmung bestimmt; der Umfang dieser Curven, und ihre Flächenräume seyn commensurabel oder nicht, nach Beschaffenheit der Curve. Es ist nicht nöthig hierüber Bemerkungen zu machen. Der Verfasser verbreitet sich weitläufig über die Rectification der krummen Linien, will die Unmöglichkeit, den Kreis in eine gerade Linie zu verwandeln, zeigen, thut dies aber so, daß daraus folgen würde, keine Curve lasse sich rectificiren.

Descartes (Geometria, p. 39.), und andere seiner Zeit zweifelten, daß irgend eine krumme Linie mit einer geraden verglichen werden könne. Daher war die Entdeckung der ersten rectificabeln Curve sehr überraschend. Man hätte an der Erfindsamkeit des menschlichen Geistes nicht verzweifeln sollen, zumahl da schon frühe krummlinichte Figuren mit geradlinichten waren verglichen worden. Es sind aber wirklich nur wenige algebraische Linien rectificabel.

2. Es ist AMN (Fig. 20.) irgend eine Curve, zu deren Puncte M die Coordinaten AP, PM, und zu einem andern Puncte N die Coordinaten AQ, QN gehören. Sie sind rechtwinklichte. Die Abscissenlinie AX sey an der concaven Seite des Bogens genommen. Durch M ziehe man mit AQ die parallele Mn bis an NQ. Es sey $AP = x$, $PQ = \Delta x$; $PM = y$, $Nn = \Delta y$; der Bogen $AM = s$, Bogen $MN = \Delta s$. Durch die Puncte M, N ziehe man eine schneidende gerade SMN, und durch M die berührende TMm.

Jene schneide die Abscissenlinie in S, die berührende dieselbe in T. Die verlängerte Ordinate QN und die berührende schneiden sich in m. An der berührenden ist $Mn : mn = \partial x : \partial y$, (berührende Linie, 12, und Linie, gerade, 15.), oder $PT : PM = \partial x : \partial y$. An der schneidenden ist $PS : PM = \Delta x : \Delta y$. Aus der ersteren Proportion ist $PT^2 : PM^2 = \partial x^2 : \partial y^2$, daher $TM^2 : PM^2 = \partial x^2 + \partial y^2 : \partial y^2$, und

$TM = \frac{y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial y}$. Auf gleiche Weise ist

$SM = \frac{y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y}$. Da SM der TM näher als um jede angebliche Größe gebracht werden kann, so ist

$\frac{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial y}$ die Gränze von $\frac{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y}$

das ist von $\frac{\Delta s}{\Delta y}$. Da diese Gränze durch $\frac{\partial s}{\partial y}$ bezeichnet wird, so ist $\partial s : \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 1 : 1$.

3. Man mag auch den Beweis folgendergestalt abfassen. Der Bogen MN ist größer als die Chorde desselben Auch ist der Bogen MN kleiner als Mm + Nm (Linie, gerade, 6.). Durch die Drehung der schneidenden Linie um M kann der Punct N an M so nahe gebracht werden, daß der Bogen MN kleiner als Mm ist. Denn es ist $Mn:nm = PT:PM$, und $Nn : Mn = PM:PS$; also ist $Nn:nm = PT:PS$, und daraus $Nm:nm = TS:PS$. Folglich kann das Stück Nm im Verhältniß gegen nm und also auch gegen Mm so klein genommen werden, als nur immer erforderlich seyn mag, und dadurch kann in der Formel, Bogen $MN < Mm + Nm$, der Bogen MN immer kleiner als Mm gemacht werden, so wie die gerade MN in jedem Falle kleiner als Mm ist, wovon dieser Satz auch eine Folge ist.

Nun folgt aus den beiden Proportionen,

$$PT : TM = Mn : Mm$$
$$PS : SM = Mn : MN,$$

daß $\frac{\Delta s}{\Delta x} < \frac{TM}{PT}$, und $\frac{\Delta s}{\Delta x} > \frac{SM}{PS}$ ist.

Der Differentialquotient $\frac{\partial s}{\partial x}$ ist nicht größer und nicht kleiner als $\frac{TM}{PT}$. Erstlich ist er nicht größer. Denn wenn dieses wäre, so könnte er sich nicht dem $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ ohne Ende nähern, da $\frac{TM}{PT} > \frac{\Delta s}{\Delta x}$ ist. Es ist aber auch $\frac{\partial s}{\partial x}$ nicht kleiner als $\frac{TM}{PT}$. Denn wenn dieses wäre, so könnten sich die Quotienten $\frac{TM}{PT}$ und $\frac{SM}{PS}$ einander nicht ohne Ende nähern. Es ist nämlich $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ und daher auch $\frac{\partial s}{\partial x} > \frac{SM}{PS}$, also fiele $\frac{\partial s}{\partial x}$ zwischen die Quotienten $\frac{TM}{PT}$ und $\frac{SM}{PS}$, welche daher immer verschieden blieben, so nahe auch die Puncte M, N einander rückten. Es ist also $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{TM}{PT}$, oder $PT : TM = \partial x : \partial s$. Nun ist auch $PT : PM = \partial x : \partial y$, und daraus $PT : TM = \partial x : \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$; folglich ist $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$.

4. Bey dem Gränzverhältnisse von $\Delta x : \Delta s$ oder von $\Delta y : \Delta s$ kann die Krümme des Bogens

nicht in Betrachtung kommen, weil diese eine Folge von mehr als zwey Puncten voraussetzt. Die Abstände der Endpuncte in der stetigen Reihe von Bogen werden mit den Differentialen der Coordinaten eben so verglichen, wie bey endlichen Unterschieden.

5[a]. So wie $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} =$
$\Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$ oder $= \Delta y \sqrt{\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1\right)}$
ist, so ist auch $\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x_2}\right)}$
$= \partial y \sqrt{\left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2} + 1\right)}$. Diese Ausdrücke werden negativ, wenn die Veränderungen des Bogens und der Abscisse oder Ordinate entgegengesetzt sind.

Es sey $\partial y = p \partial x$, so ist $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + pp)}$, eine Form, die oft gebraucht wird, besonders für die Krümmungs-Halbmesser.

5[b]. Werden die Ordinaten aus einem Puncte C gezogen, und die Natur der krummen Linie durch eine Gleichung zwischen der veränderlichen CM und dem Winkel ACM, welchen CM mit einer der Lage nach gegebenen geraden AC macht, bestimmt, so fälle man von M auf CA die senkrechte MP, und setze CP $= t$, PM $= u$, und den Bogen AM wie vorhin $= s$. Es ist nun vermöge des vorigen

$\partial s = -\partial t \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u^2}{\partial t^2}\right)}$ und wenn CM y, ACM φ heißt, $u = y \sin\varphi$, $t = y \cos\varphi$, also $\partial u = \partial y \sin\varphi + y \cos\varphi \partial\varphi$, $\partial t = dy \cos\varphi - y \sin\varphi \partial\varphi$. Dadurch wird $\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + y^2 \partial\varphi^2)}$
$= \partial y \sqrt{\left(1 + y^2 \frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2}\right)}$.

Dies läßt sich auch auf folgende Art finden. Es ist (Fig. 21.) AMN eine krumme Linie, an deren Punct M von dem fixen Puncte C in der Ebene derselben die gerade CM gezogen ist, welche mit der der Lage nach gegebenen AC den veränderlichen Winkel ACM einschließt. An M sey die Berührende TM gezogen, und auf sie der Perpendikel CP von C gefällt. Man ziehe noch an einen andern Punct der Curve N die CN, welche der Berührenden in t begegnet, und die Chorde MN, auf deren Verlängerung man von C den Perpendikel CQ fälle. Endlich beschreibe man noch aus C mit dem Halbmesser CN innerhalb der Schenkel des Winkels MCN den Kreisbogen Nn, und ziehe Nr senkrecht auf Cn. Das Verhältniß des Bogens MN zu Mn wird nun aus folgenden Verhältnissen zusammengesetzt, dem des Bogens MN zu der Chorde MN, dem der Chorde MN zu Mr, und dem von Mr zu Mn. Das Gränzverhältniß des Bogens MN zu Mn ist also das zusammengesetzte aus den Gränzen der drey zuletzt genannten Verhältnisse. Die Gränze des Verhältnisses des Bogens MN zu der Chorde MN, so wie diejenige des Verhältnisses von Mr zu Mn ist aber 1 : 1, und das Verhältniß von MN : Mr wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke MNr und CMQ gleich dem von CM : MQ, von welchem letzteren Verhältnisse die Gränze ist CM : MP d. i. 1 : cos CMP.

Wenn nun CM $= y$, ACM $= \varphi$, CN $= y + \Delta y$, MCN $= \Delta\varphi$, der Bogen AM $= s$, und Bogen MN $= \Delta s$, so ist Bogen $\frac{MN}{Mn} = \frac{\Delta s}{\Delta y}$, wovon $\frac{\partial s}{\partial y}$ die Gränze ist. Mithin ist $\partial s : \partial y = 1 : \cos CMP$. Da $\tang CMP = \frac{y\partial\varphi}{\partial y}$ (berüh-

rende Linie, 27.) so ist

$$\cos CMP = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{y^2 \partial\varphi^2}{\partial y^2}\right)}}$$

$= \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial y^2 + y^2 \partial\varphi^2)}}$, wodurch $\partial s = \frac{\partial y}{\cos CMP}$ $= \sqrt{(\partial y^2 + y^2 \partial\varphi^2)}$ wird. Der Beweis bleibt, wenn auch AMN dem Puncte C die convexe Seite zukehrt.

6. Für den Kreis ist die Gleichung $xx + yy = aa$; daraus $x\partial x = - y\partial y$, und $p = - \frac{x}{y}$, also

$$\partial s = - \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = - \frac{a\partial x}{y} =$$

$+ \frac{a\partial y}{x}$, oder $\partial s = - \frac{a\partial x}{\sqrt{(aa - yy)}} = + \frac{a\partial y}{\sqrt{(aa - yy)}}$. Das Vorzeichen $-$ ist genommen, weil der Bogen von dem Puncte an gerechnet, wo $x = a$ ist, und die Abscisse x sich ungleichnamig verändern. Es ist $s = a \text{ Ang.cos} \frac{x}{a} = a \text{ Ang sin} \frac{y}{a}$. Die Entwicklung dieser Formeln ist in dem Artikel, Cyklometrie, vorgetragen.

Rectification der Kegelschnitte.

7. Es sey AMB (Fig. 22.) der Quadrant einer Ellipse, deren halbe große Axe $AC = a$, halbe kleine $BC = b$ ist. Auch sey AND der Quadrant eines Kreises mit dem Halbmesser a; die gemeinschaftliche Abscisse $CP = x$; die Ordinate an der Ellipse $MP = y$, der Bogen $BM = s$. Die Gleichung für die Ellipse ist $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$,

woraus durch die Differentialrechnung ist

$$\partial y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2} \partial x^2.$$ Daher ist

$$\partial s^2 = \frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \partial x^2.$$

Werden hier a und b mit einander vertauscht, und wird y statt x gesetzt, so wird ∂s durch ∂y mit y ausgedruckt.

8. Man setze $\frac{aa - bb}{aa} = e^2$, und $\frac{x}{a} = z$, welches der Sinus des Winkels DCN ist, so ist $\partial x = a\partial z$, und $\partial s = a\partial z \frac{\sqrt{(1 - e^2 z^2)}}{\sqrt{(1 - z^2)}}$.

9. Diese Formel zu integriren, verwandle man die Wurzelgröße im Zähler nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe,

$$\sqrt{(1 - e^2 z^2)} = 1 - \mathfrak{A} e^2 z^2 - \mathfrak{B} e^4 z^4 - \mathfrak{C} e^6 z^6 - \mathfrak{D} e^8 z^8 - \mathfrak{E} e^{10} z^{10} - \text{etc.}$$

wo $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}$; $\mathfrak{B} = \frac{1.1}{2.4}$; $\mathfrak{C} = \frac{1.1.3}{2.4.6}$;

$$\mathfrak{D} = \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}; \quad \mathfrak{E} = \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}; \text{ etc.}$$

Jedes dieser Glieder werde mit $\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}$ multiplicirt, so werden die Integrale folgeweise aus den vorhergehenden gefunden, nach der allgemeinen Formel, Integralformel, 61.

$$\int \frac{z^{m+2} \partial z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{m+1}{m+2} \int \frac{z^m \partial z}{\sqrt{(1-z^2)}} - \frac{1}{m+2} z^{m+1} \sqrt{(1 - z^2)}$$

Verlangt man nur den ganzen Quadranten, so fällt der algebraische Theil weg, weil nun $z = 1$ ist, und es ist

$$\int \frac{z^{m+2} \partial z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{m+1}{m+2} \int \frac{z^m \partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}.$$

Die Constante ist $= 0$, weil das Integral $= 0$ seyn soll, für $x = 0$.

Es wird nun nach den Formeln, a. a. O. 62, wo x hier z ist, $\text{Ang sin } z = \frac{1}{2}\pi$, also der elliptische Quadrant

$$AMB = \frac{1}{2}\pi a \left[1 - \frac{1}{2}\mathfrak{A}e^2 - \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{B}e^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{C}e^6 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathfrak{D}e^8 - \frac{1..9}{2...8}\mathfrak{E}e^{10} - \text{etc.}\right]$$

Setzt man für die Binomialcoefficienten ihre Werthe, so ist

$$AMB = \frac{1}{2}\pi a \left[1 - \frac{1.1}{2.2}e^2 - \frac{1.1.3.1}{2.2.4.4}e^4 - \frac{1.1.3.3.5.1}{2.2.4.4.6.6}e^6 - \frac{1.1.3.3.5.5.7.1}{2.2.4.4.6.6.8.8}e^8 - \text{etc.}\right]$$

10. Euler hat die Aufgabe noch etwas anders behandelt, in den Comm. novis Ac. Petr. T. XVIII. Da $\frac{xx}{aa} + \frac{yy}{bb} = 1$ ist, so setzt er $\frac{xx}{aa} = \frac{1+z}{2}$ folglich $\frac{yy}{bb} = \frac{1-z}{2}$, woraus sich ergiebt

$$\partial x = \frac{a\partial z}{2\sqrt{2(1+z)}}; \quad \partial y = \frac{-b\partial z}{2\sqrt{2(1-z)}}; \text{ und}$$

das

$$\partial s^2 = \frac{(aa + bb - (aa - bb) z)}{8 (1 - z^2)} \partial z^2.$$

Zur Abkürzung setze man $aa + bb = cc$; und $\frac{aa - bb}{aa + bb} = n$ so ist

$$s = \frac{c}{2 \sqrt{2}} \int \partial z \frac{\sqrt{(1 - nz)}}{\sqrt{(1 - z^2)}}.$$

Die Integration ist dieselbe wie vorher. Die Constante muß so bestimmt werden, daß der elliptische Bogen $= 0$ sey, wenn $z = -1$ genommen wird. Die Integrale von den ungeraden Potenzen verschwinden für $z = +1$ und $z = -1$. Es ist der Quadrant

$$AMB = \frac{c\pi}{2\sqrt{2}} \Big[1 - \frac{1.1}{4.4} n^2 - \frac{1.1}{4.4} . \frac{3.5}{8.8} n^4$$
$$- \frac{1.1}{4.4} . \frac{3.5}{8.8} . \frac{7.9}{12.12} n^6$$
$$- \frac{1.1}{4.4} . \frac{3.5}{8.8} . \frac{7.9}{12.12} . \frac{11.13}{16.16} n^8 - \text{etc.} \Big]$$

Die Constante ist gerade die Hälfte des elliptischen Quadranten für $x = a \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $y = b \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Die Progressionalgröße n^2 ist kleiner als e^2; der Coefficient von n^2 ist beträchtlich kleiner als der von e^2 in der vorigen Reihe; allein die Factoren, welche successiv hinzukommen, sind in der Eulerischen Reihe größer.

11. Die unbestimmte Rectification der Ellipse ergiebt sich aus den Integralen, in Integralformel. 62, wo die ganze Rechnung schon gemacht ist. Man hat nur nöthig zu den Integralen die Factoren der Potenzen von z nebst dem Factor a zuzusetzen. Das dortige x ist hier z, und a daselbst hier $\sqrt{(1 - zz)}$.

Es ist, wenn man die Formel in (8.) entwickelt, und Ang.sin $z = \varphi$ setzt,

$$\frac{s}{a} = \varphi - \mathfrak{A}e^2 \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi.\cos\varphi\right)$$

$$- \mathfrak{B}e^4 \left(\frac{1.3}{2.4}\varphi - \frac{1.3}{2.4}\sin\varphi.\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin\varphi^3.\cos\varphi\right)$$

$$- \mathfrak{C}e^6 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin\varphi.\cos\varphi - \frac{1.5}{4.6}\sin\varphi^3.\cos\varphi - \frac{1}{6}\sin\varphi^5.\cos\varphi\right)$$

$$- \text{etc.}$$

12. Ein elliptischer Bogen läßt sich auch durch den Winkel φ, dessen Sinus z ist, und die Sinus der geraden Vielfachen von φ ausdrücken.

In der Gleichung, $\partial s = a\partial z \sqrt{\frac{1 - e^2 z^2}{1 - z^2}}$, setze man $z = \sin\varphi$, so ist $\partial z = \cos\varphi.\partial\varphi =$ $\partial\varphi.\sqrt{(1 - z^2)}$, folglich

$$\partial s = a\partial\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin\varphi^2)},$$

das ist

$$\partial s = a\partial\varphi\,(1 - \mathfrak{A}e^2 \sin\varphi^2 - \mathfrak{B}e^4 \sin\varphi^4 - \mathfrak{C}e^6 \sin\varphi^6 - \mathfrak{D}e^8 \sin\varphi^8 - \mathfrak{E}e^{10} \sin\varphi^{10} - \text{etc.})$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc., die in (9.) angegebenen Werthe haben.

Aus den Formeln für die Potenzen der Sinus in Goniometrie, 137, setze man für dieselben ihre Werthe durch Cosinus der geraden Vielfachen von φ, um die Integration zu bewerkstelligen, da $\int \cos m\varphi.\partial\varphi = \frac{1}{m}\sin m\varphi$ ist, Integralformel, 109.

13. Um die Formation der Reihe für den elliptischen Bogen deutlicher einzusehen, muß man in den Formeln für die Potenzen der Sinus die Coefficienten der Cosinus als Binomialcoefficienten bezeichnen. In der 2mten Potenz seyn diese durch ${}^{2m}\mathfrak{A}$, ${}^{2m}\mathfrak{B}$, ${}^{2m}\mathfrak{C}$, u. s. f. angedeutet (Binomial-Coefficient, 1.), so ist, z. B.

$$2^7 . \sin\varphi^8 = \frac{1}{2} . {}^8\mathfrak{D} - {}^8\mathfrak{C}\cos 2\varphi + {}^8\mathfrak{B}\cos 4\varphi$$
$$- {}^8\mathfrak{A}\cos 6\varphi + \cos 8\varphi$$

$$2^9 . \sin\varphi^{10} = \frac{1}{2} . {}^{10}\mathfrak{E} - {}^{10}\mathfrak{D}\cos 2\varphi + {}^{10}\mathfrak{C}\cos 4\varphi$$
$$- {}^{10}\mathfrak{B}\cos 6\varphi + {}^{10}\mathfrak{A}\cos 8\varphi - \cos 10\varphi.$$

Die Coefficienten in der Potenz $(1 - z)^{\frac{1}{2}}$ müssen nun der Gleichförmigkeit wegen, durch ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}$, ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}$, ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}$, ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}$, u. s. f. bezeichnet werden. Es sind hier die absoluten Größen in (9.) zu verstehen.

14. Es sey nun

$$\frac{s}{a} = A\varphi + \frac{1}{2}B\sin 2\varphi - \frac{1}{4}C\sin 4\varphi$$
$$+ \frac{1}{6}D\sin 6\varphi - \frac{1}{8}E\sin 8\varphi + \frac{1}{10}F\sin 10\varphi$$
$$- \text{etc.}$$

so ist

$$\frac{\partial s}{a} = (A + B\cos 2\varphi - C\cos 4\varphi + D\cos 6\varphi$$
$$- E\cos 8\varphi + F\cos 10\varphi - \text{etc.})\,\partial\varphi.$$

Man entwickele die Formel für $\frac{\partial s}{a}$ in (12.) nach den Cosinus der Vielfachen von φ, so giebt die Ver-

gleichung mit jener Reihe für $\frac{\partial s}{a}$ die Werthe der Coefficienten A, B, C, D, etc. wie folget.

$$A = 1 - \frac{1}{2^2} \cdot {}^{2}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}e^2 - \frac{1}{2^4} \cdot {}^{4}\mathfrak{B} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}e^4$$

$$- \frac{1}{2^6} \cdot {}^{6}\mathfrak{C} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}e^6 - \frac{1}{2^8} \cdot {}^{8}\mathfrak{D} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8$$

$$- \frac{1}{2^{10}} \cdot {}^{10}\mathfrak{E} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}e^2 + \frac{1}{2^3} \cdot {}^{4}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}e^4 + \frac{1}{2^5} \cdot {}^{6}\mathfrak{B} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}e^6$$

$$+ \frac{1}{2^7} \cdot {}^{8}\mathfrak{C} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8 + \frac{1}{2^9} \cdot {}^{10}\mathfrak{D} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{2^3} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}e^4 + \frac{1}{2^5} \cdot {}^{6}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}e^6$$

$$+ \frac{1}{2^9} \cdot {}^{8}\mathfrak{B} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8 + \frac{1}{2^9} \cdot {}^{10}\mathfrak{C} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$D = \frac{1}{2^5} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}e^6 + \frac{1}{2^7} \cdot {}^{8}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8$$

$$+ \frac{1}{2^9} \cdot {}^{10}\mathfrak{B} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$E = \frac{1}{2^7} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}e^8 + \frac{1}{2^9} \cdot {}^{10}\mathfrak{A} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10} + \text{etc.}$$

$$F = \frac{1}{2^9} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}e^{10} + \text{etc.}$$

15. Hieraus wird durch gehörige Einschaltungen und Aufhebungen von Factoren

$$\frac{s}{a} = \varphi \Big[1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 16} e^4 - \frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{4 \cdot 16 \cdot 36} e^6$$

$$- \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 64} e^8 - \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 100} e^{10} - \text{etc.} \Big]$$

$$+ \frac{1}{1} \sin 2\varphi \Big[\frac{1}{8} e^2 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 12} e^4 + \frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{8 \cdot 12 \cdot 16} \cdot \frac{1}{2} e^6$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} e^8$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} e^{10} + \text{etc.} \Big]$$

$$- \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 4} \sin 4\varphi \Big[\frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 16} e^4 + \frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{12 \cdot 16 \cdot 20} e^6$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24} \cdot \frac{1}{2} e^8$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} e^{10} + \text{etc.} \Big]$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 9} \sin 6\varphi \Big[\frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{16 \cdot 20 \cdot 24} e^6$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28} e^8 + \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 32} \cdot \frac{1}{2} e^{10} + \text{etc.} \Big]$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 16} \sin 8\varphi \Big[\frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 32} e^8$$

$$+ \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 32 \cdot 36} e^{10} + \text{etc.} \Big]$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25} \sin 10\varphi \left[\frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 9}{24 \cdot 28 \cdot 32 \cdot 36 \cdot 40} e^{10} + \text{etc.} \right]$$

16. Die Länge eines elliptischen Bogens läßt sich auch vermittelst des Krümmungshalbmessers finden. In M (Fig. 23.) sey die Normale MQ gezogen, welche die große Axe unter dem Winkel AQM $= \omega$ schneidet. Der Halbmesser der Krümmung in M sey $= r$, und für $\omega = 45°$ sey $r = f$, so ist $r = \frac{f}{(1 + n \cos 2\omega)^{2:3}}$, (Krümmungskreis, 17.). Ferner ist, wenn nun AM $= s$ gesetzt wird, $\partial s = r\partial\omega$, (eb. das. 1.). Es muß hier AM durch s bezeichnet werden, damit die Differentiale ∂s, $\partial\omega$ gleichnamig seyn, indem AM und ω zugleich zunehmen. Es ist also

$$\partial s = \frac{f\partial\omega}{(1 + n \cos 2\omega)^{2:3}},$$

wo n denselben Werth wie in (10.) hat.

17. Die Rechnung ist schon in dem Artikel, Integralformel, 127. gemacht. Man muß statt des dortigen ν hier $-\frac{3}{2}$, und 2ω statt φ setzen. Dadurch ist $\mathfrak{A} = -\frac{3}{2}$; $\mathfrak{B} = +\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}$; $\mathfrak{C} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}$, $\mathfrak{D} = +\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$, u. s. f. Es wird nun durch die Integration erhalten, da $\frac{\partial s}{f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\partial\omega}{(1 + n \cos 2\omega)^{2:3}}$ ist,

$$\frac{AM}{f} = \omega \left(1 + \frac{3.5}{4.4} n^2 . + \frac{3.5.7.9}{4.4.8.8} n^4 \right.$$

$$\left. + \frac{3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12} n^6 + \text{etc.} \right)$$

$$- \sin 2\omega \left(\frac{3}{4} n + \frac{3.5.7}{4.8.12} . \frac{3}{1} n^3 \right.$$

$$\left. + \frac{3..11}{4..20} . \frac{5.4}{1.2} n^5 + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sin 4\omega \left(\frac{3.5}{4.8} n^2 + \frac{3..5.7.9}{4.8.12.16} . \frac{4}{1} n^4 \right.$$

$$\left. + \frac{3...13}{4...24} . \frac{6.5}{1.2} n^6 + \text{etc.} \right)$$

$$- \frac{1}{3} \sin 6\omega \left(\frac{3.5.7}{4.8.12} n^3 + \frac{3...11}{4...20} . \frac{5}{1} n^5 + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{1}{4} \sin 8\omega \left(\frac{3.5.7.9}{4.8.12.16} n^4 + \frac{3...13}{4...24} . \frac{6}{1} n^6 + \text{etc.} \right)$$

$$- \frac{1}{5} \sin 10\omega \left(\frac{3.5.7.9.11}{4.8.12.16.20} n^5 + \text{etc.} \right)$$

$+$ etc.

Die numerischen Coefficienten von n sind wenig convergirend.

Der Factor zu ω ist der Quotient von

$$1 - \frac{1.1}{4.4} n^2 - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8} n^4$$

$$- \frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12} n^6$$

$$- \text{etc.}$$

durch $1 - nn$ dividirt. Jene Reihe ist die in (10).

Die folgenden Reihen lassen sich auf dieselbe Art convergenter machen, wenn man sie mit $1 - nn$ multiplicirt, und dagegen ihnen den Divisor $1 - nn$ giebt.

Es ist nämlich $f = \frac{a^2 b^2 \sqrt{8}}{(a^2 + b^2)^{3:2}}$. Die in ω multiplicirte Reihe nenne man R, die Reihe in 10. bezeichne man durch S. Der elliptische Quadrant ist $= \frac{1}{2}\pi f.R = \frac{1}{2}\pi . \frac{a^2 b^2 \sqrt{8}}{(aa + bb)^{3:2}}.R$, und aus (10.) ist derselbe $= \frac{1}{2}\pi . \frac{c}{\sqrt{2}}.S = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{aa + bb}{2}} . S$.

Daher ist $R = \frac{(aa + bb)^2}{4a^2 b^2} S. = \frac{S}{1 - nn}$. Denn $1 - n^2 = \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}$.

18. Die Formel, die Länge eines elliptischen Bogens durch den Winkel ω der Normale mit der großen Axe zu finden, hat ihre Anwendung in der Geographie, weil hier ein Ort oder Parallelkreis durch die Breite desselben gegeben wird, welche auf einem elliptischen Meridian durch jenen Winkel ω gemessen wird.

19. Wenn die Lage des Punctes M durch den Winkel BRM der Normale mit der kleineren Axe angegeben wird, so werden die subtractiven Glieder in (17.) additiv. Es ist nämlich, wenn nun $BRM = \omega'$ gesetzt wird, $r = \frac{f}{(1 - n \cos 2\omega')^{3:2}}$. Denn es ist $\cos 2\omega = 1 - 2 \sin \omega^2 = 1 - 2(\cos \omega')^2$, und $1 + n \cos 2\omega = 1 + n - 2n(\cos \omega')^2 = 1 - n \cos 2\omega'$. Die Entwickelung des Differentials ∂s ist also ganz dieselbe wie vorher, nur daß n negativ wird, daher die Factoren zu den Sinus der einfach

geraden Vielfachen von ω ihr Vorzeichen ändern, indem ω' oder $90^\circ - \omega$ für ω gesetzt wird.

20. Der Bogen AM (Fig. 23.) kann auch durch die Potenzen von $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ oder e^2, und durch die Potenzen der Sinus von ω, oder statt dieser, durch Sinus der Vielfachen von ω, ausgedrückt werden. Es ist (Krümmungskreis, 16.)

$$x^2 = \frac{a^4 \cos \omega^2}{a^2 \cos \omega^2 + b^2 \sin \omega^2},$$

also, da $b^2 (a^2 - x^2) = a^2 y^2$ ist,

$$y^2 = \frac{b^4 \sin \omega^2}{a^2 \cos \omega^2 + b^2 \sin \omega^2}.$$

Oder

$$x = \frac{a \cos \omega}{(1 - e^2 \sin \omega^2)^{1:2}}; \quad y = \frac{b^2 \sin \omega}{a(1 - e^2 \sin \omega^2)^{1:2}}.$$

Die Differentiation giebt

$$\partial x = -\frac{b^2}{a} \cdot \frac{\sin \omega . \partial \omega}{(1 - e^2 \sin \omega^2)^{3:2}},$$

$$\partial y = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{\cos \omega . \partial \omega}{(1 - e^2 \sin \omega^2)^{3:2}}.$$

Das Differential ∂x ist negativ, weil x abnimmt, wenn ω zunimmt.

Hieraus ist

$$\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{a(1 - e^2) \partial \omega}{(1 - e^2 \sin \omega^2)^{3:2}},$$

oder, da $\partial \omega = \frac{\partial \sin \omega}{\cos \omega}$,

$$\partial s = \frac{a(1 - e^2)\, \partial \sin \omega}{\cos \omega (1 - e^2 \sin \omega^2)^{3:2}}.$$

Die Integration dieser beiden Differentialformeln zu bewerkstelligen, muß man sie in eine Reihe verwandeln. Es ist

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin \omega^2)^{3:2}} = 1 + \mathfrak{A} e^2 \sin \omega^2 + \mathfrak{B} e^4 \sin \omega^4 + \mathfrak{C} e^6 \sin \omega^6 + \text{etc.}$$

wo

$$\mathfrak{A} = \frac{3}{2}; \quad \mathfrak{B} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}; \quad \mathfrak{C} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6};$$

u. s. w. ist.

21. Aus den Formeln für die Potenzen der Sinus (Goniometrie, 137.), und der Formel, $\int \cos \lambda\omega . \partial\omega = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda\omega$, wird erhalten:

$$s = a(1 - e^2) \times$$

$$\Big[\Big(1 + \frac{1}{2} \mathfrak{A} e^2 + \frac{3}{8} \mathfrak{B} e^4 + \frac{10}{32} \mathfrak{C} e^6 + \frac{35}{128} \mathfrak{D} e^8 + \text{etc.} \Big) \omega$$

$$- \Big(\frac{1}{4} \mathfrak{A} e^2 + \frac{4}{16} \mathfrak{B} e^4 + \frac{15}{64} \mathfrak{C} e^6 + \frac{56}{256} \mathfrak{D} e^8 + \text{etc.} \Big) \sin 2\omega$$

$$+ \Big(\frac{1}{32} \mathfrak{B} e^4 + \frac{6}{128} \mathfrak{C} e^6 + \frac{28}{512} \mathfrak{D} e^8 + \text{etc.} \Big) \sin 4\omega$$

$$- \Big(\frac{1}{192} \mathfrak{C} e^6 + \frac{8}{768} \mathfrak{D} e^8 + \text{etc.} \Big) \sin 6\omega$$

$$+ \Big(\frac{1}{1024} \mathfrak{D}^8 + \text{etc.} \Big) \sin 8\omega$$

$$- \text{etc.} \Big]$$

Die Coefficienten zu den Potenzen von e^2 in dem Factor von ω sind

$$\frac{1.3}{2.2};\ \frac{1.3^2.5}{2^2.4^2};\ \frac{1.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2};\ \frac{1.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2};$$

$$\frac{1.3^2.5^2.7^2.9^2.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}, \text{ u. s. f.}$$

Die Coefficienten in dem Factor von $\sin 2\omega$ sind

$$\frac{3}{8};\frac{3^2.5}{8.12};\ \frac{3^2.5^2.7}{8.12.16}.\frac{1}{2};\ \frac{3^2.5^2.7^2.9}{8.12.16.20}.\frac{1}{2.3};$$

$$\frac{3^2.5^2.7^2.9^2.11}{8.12.16.20.24}.\frac{1}{2.3.4}, \text{ u. s. f.}$$

Die Coefficienten in dem Factor zu $\sin 4\omega$ sind

$$\frac{3^2.5}{12.16}.\frac{1}{4};\ \frac{3^2.5^2.7}{12.16.20}.\frac{1}{4};\ \frac{3^2.5^2.7^2.9}{12.16.20.24}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2};$$

$$\frac{3^2.5^2.7^2.9^2.11}{12.16.20.24.28}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2.3};\ \text{ u. s. f.}$$

22. Die zweyte Formel für ∂s zu integriren setze man $\sin\omega = u$, so ist

$$\partial s = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-u^2)}}(1 + \mathfrak{A}e^2u^2 + \mathfrak{B}e^4u^4 + \mathfrak{C}e^6u^6 + \mathfrak{D}e^8u^8 + \text{etc.})\partial u.$$

Die Integrale ergeben sich aus Integralformel, 62.

Man setze $\alpha = \frac{3}{2^2}$; $\beta = \frac{3.5}{4^2}\alpha$; $\gamma = \frac{5.7}{6^2}\beta$; $\delta = \frac{7.9}{8^2}\gamma$; u. s. f. so ist

$$s = a(1-e^2) \times \Big[(1 + \alpha e^2 + \beta e^4 + \gamma e^6 + \delta e^8 + \text{etc.})\ \omega$$
$$- (\alpha e^2 + \beta e^4 + \gamma e^6 + \delta e^8 + \text{etc.}) \sin\omega . \cos\omega$$

$$- \frac{2}{3} (\beta e^4 + \gamma e^6 + \delta e^8 + \text{etc.}) \sin \omega^3 . \cos \omega$$

$$- \frac{2 . 4}{3 . 5} (\gamma e^6 + \delta e^8 + \text{etc.}) \sin \omega^5 . \cos \omega$$

$$- \frac{2 . 4 . 6}{3 . 5 . 7} (\delta e^8 + \text{etc.}) \sin \omega^7 . \cos \omega$$

$$- \text{etc.} \Big]$$

Diese letztere Formel hat Pasquich gegeben, in von Zach monatlicher Correspondenz. I. Bd. S. 439. Die Gründe der Berechnung sind in dem IX. Bande. S. 302 geliefert.

23. Wolfs Rechnung, die Ellipse zu rectificiren, (Elem. Anal. Infin. §. 172., ist noch sehr unbequem. Er löset in dem Differential des Bogens $\partial s = \frac{\sqrt{(a^4 - a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 - x^2)}} \partial x$, wo c die halbe kleine Axe ist, Zähler und Nenner in eine Reihe auf, dividirt die erstern durch die letztern, und integrirt darauf. So findet er eine sehr unvollständige Reihe von sechs Gliedern, ohne ein bemerkliches Gesetz der Fortschreitung. Lambert hat in dem 3. Theile seiner Beyträge zur Mathematik den elliptischen Bogen auf gleiche Art gesucht, verwandelt aber erstlich die Division in eine Multiplication, durch $(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe aufgelöset, und findet ein Gesetz des Fortganges für die Coefficienten der Progressionalgröße. Nur convergiren diese zu langsam. Deswegen sucht er verschiedene andere Methoden, um die elliptischen Bogen bequemer anzugeben, von welchen hier einige benutzt sind. In der Formel, S. 51. für $\frac{v}{\cos \lambda}$ sind einige Unrichtigkeiten, als Z. 4, wo der Factor 20 wegzustreichen ist. Dasselbe muß Z. 5 mit dem Factor 9

in dem Coefficienten zu $t\lambda^{10}$, und in dem folgenden mit dem Factor 13; auch Z. 6 mit den Factoren 11 und 13. geschehen. — Hindenburg hat in der Sammlung analytisch-combinatorischer Abhandlungen, II. S. 132. von der Rectification der Ellipse ein Beyspiel hergenommen, seine Methode daran zu zeigen.

24. Für die Hyperbel ist die Gleichung, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Daraus ist $b^2x\partial x = a^2y\partial y$;

$$\partial y^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\partial x^2, \text{ und}$$

$$\partial s^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2 - a^4}{a^2(x^2-a^2)}\partial x^2.$$

$$\text{Es sey } \frac{a^2}{a^2+b^2} = n^2, \text{ so ist}$$

$$\partial s = \frac{\partial x\sqrt{(x^2-n^2a^2)}}{n\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

Diese Formel zu integriren, entwickele man die Wurzelgröße $\sqrt{(x^2-n^2a^2)} = x - \mathfrak{A}.\frac{n^2a^2}{x}$ $- \mathfrak{B}.\frac{n^4a^4}{x^3} - \mathfrak{C}.\frac{n^6a^6}{x^5} - \mathfrak{D}.\frac{n^8a^8}{x^7} - \text{etc.}$

wo $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}$; $\mathfrak{B} = \frac{1.1}{2.4}$; $\mathfrak{C} = \frac{1.1.3}{2.4.6}$;

$\mathfrak{D} = \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}$, u. s. f. Die Differentiale, welche hier erhalten werden, haben die Form $\frac{M\partial x}{x^m\sqrt{(xx-aa)}}$, wo m eine ungerade Zahl ist. Es ist (Integralformel, 65.),

$$\int \frac{\partial x}{x^m \sqrt{(xx-aa)}} = \frac{1}{(m-1)aa} \cdot \frac{\sqrt{(xx-aa)}}{x^{m-1}}$$

$$+ \frac{m-2}{(m-1)aa} \cdot \int \frac{\partial x}{x^{m-2} \sqrt{(xx-aa)}}.$$

Da m ungerade ist, so führt die Integration zuletz auf $\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(xx-aa)}}$, welches aus Integralformel, 54 ist $\frac{1}{a}$ Ang.sec $\frac{x}{a}$ oder $\frac{1}{a}$ Ang.cos $\frac{a}{x}$.

Wenn der Bogen am Scheitel anfängt, wo x = a ist, so ist daselbst der algebraische Theil des Integrals = o, und der Winkel zu der Secante $\frac{x}{a}$ ebenfalls = o, daher die Const. = o.

25. Es ist, wenn zur Abkürzung $xx - aa = u$ gesetzt wird,

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(xx-aa)}} = \sqrt{(xx-aa)}.$$

$$\int \frac{a^2\partial x}{x\sqrt{(xx-aa)}} = a \text{ Ang.sec} \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{a^4\partial x}{x^3\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{aau}{x^2} + \frac{1}{2} a \text{ Ang.sec} \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{a^6\partial x}{x^5\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4u}{x^4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{a^2u}{x^2}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a \text{ Ang.sec.} \frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{a^8\partial x}{x^7\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^6u}{x^6} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{a^4u}{x^4}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{a^2u}{x^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a \text{ Ang.sec.} \frac{x}{a}. \text{ u. s. f.}$$

Die veränderliche u nähert sich der x desto mehr, je größer x wird.

Mit Hülfe dieser Integrale ist die Reihe für den hyperbolischen Bogen leicht gefunden. Es ist

$$s = \frac{u}{n}\Big[1 - \frac{1}{2}\mathfrak{B}n^4 \cdot \frac{a^2}{x^2}$$

$$- \frac{1}{4}\mathfrak{C}n^6\left(\frac{a^4}{x^4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$- \frac{1}{6}\mathfrak{D}n^8\left(\frac{a^6}{x^6} + \frac{5}{4}\cdot\frac{a^4}{x^4} + \frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}\cdot\frac{a^2}{x^2}\right) + \text{etc.}\Big]$$

$$- n\Big(\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{B}n^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\mathfrak{C}n^4$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\mathfrak{D}n^6 + \text{etc.}\Big) \times a . \text{Ang.sec}\frac{x}{a}.$$

25^b. Es ist $\frac{u}{n} = \frac{\sqrt{(aa+bb)(xx+aa)}}{a}$

$= \frac{y\sqrt{(aa+bb)}}{b}$ die Größe der geraden, welche durch den Endpunct des Bogens M (Fig. 74. Tab. XIII. Th. 2) der Asymptote CS parallel gezogen worden, von diesem Puncte an bis an die Achse CA genommen. Setzt man x unendlich, so fällt jene gerade mit der Asymptote CQS zusammen. In diesem Falle verschwinden alle durch x oder Potenzen desselben dividirten Glieder, Ang.sec $\frac{x}{a}$ wird $= \frac{\pi}{2}$, und der Überschuß der Asymptote CS über den ganzen unendlichen Zweig der Hyperbel AMS

$$= \frac{1}{2}na\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1}{4}n^2 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{1}{6}n^4\right.$$

$$+ \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{1}{8} n^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot \frac{1}{10} n^6 + \text{etc.} \Big)$$

26. An der gleichseitigen Hyperbel ist $n^2 = \frac{1}{2}$ und $\partial s = \frac{\partial x \sqrt{(2x^2 - a^2)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$. Man setze $2x^2 - a^2 = z^2$, so ist $\partial x = \frac{z \partial z}{\sqrt{2(z^2 + a^2)}}$, und $\partial s = \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{(z^4 - a^4)}}$. Man sieht hier, was das Integral eines Differentials dieser Form ist.

Setzt man $z^2 = u$, und $a = 1$, so ist $\partial s = \frac{\partial u \sqrt{u}}{2\sqrt{(uu - 1)}}$.

27. Es ist $\frac{z^2}{a^2}$ die Secante des doppelten Winkels, welchen der Radius aus dem Mittelpuncte der gleichseitigen Hyperbel an den Endpunct des Bogens mit der Axe macht. Denn der Winkel des Radius mit der Axe sey φ, so ist $\tang \varphi = \frac{y}{x}$, und $\sec \varphi^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{2x^2 - a^2}{x^2}$. Ferner $2 - \sec \varphi^2 = \frac{a^2}{x^2}$, also $\frac{\sec \varphi^2}{2 - \sec \varphi^2} = \frac{2x^2 - a^2}{a^2}$. Multiplicirt man in dem ersten Theile dieser Gleichung Zähler und Nenner durch $\cos \varphi^2$, so wird derselbe $= \frac{1}{2 \cos \varphi^2 - 1} = \frac{1}{\cos 2\varphi} = \sec 2\varphi$, also $\frac{2x^2 - a^2}{a^2} = \sec 2\varphi$.

28. Man setze $a^2 = 2$, so ist die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel, $xx - yy = 2$. Auch sey $\tang \varphi = \frac{y}{x}$, so ist $\tang(45^\circ - \varphi) = \frac{x-y}{x+y}$

Dieser Quotient sey $= u$, so ist $y = \frac{1-u}{\sqrt{2u}}$;

$x = \frac{1+u}{\sqrt{2u}}$, und $\partial s = -\frac{\partial u \sqrt{(1+uu)}}{2u\sqrt{u}}$.

29. Nimmt man die Coordinaten x, y, jene auf der einen Asymptote, diese mit der andern Asymptote parallel, so ist $xy = aa$, und $\partial y = -\frac{aa\partial x}{xx}$;

also

$\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{a^4}{x^4}\right)}$, oder $\partial s = \frac{\partial x}{xx}\sqrt{(a^4 + x^4)}$.

Diese Formel läßt sich nicht anders als durch Auflösung in eine Reihe integriren.

30. Die in (11) und (25) gefundenen Ausdrücke für einen elliptischen und hyperbolischen Bogen sind nur dann brauchbar, wenn e an der Ellipse und n an der Hyperbel kleine Größen sind. Ist aber e oder n wenig von Eins unterschieden, so muß man den Reihen für den elliptischen oder hyperbolischen Bogen eine andere Gestalt geben. Zu dem Ende drücke man das Differential des elliptischen Bogens in (8) so aus

$$\frac{\partial s}{a} = \frac{\partial z \sqrt{(1-ez)}}{\sqrt{(1-z)}} \cdot \sqrt{\frac{1+ez}{1+z}}$$

$$= \frac{\partial z \sqrt{(1-ez)}}{\sqrt{(1-z)}} \cdot \sqrt{\left(e + \frac{1-e}{1+z}\right)}$$

Man setze $1 + z = u$, und zur Abkürzung $\frac{1-e}{e} = m$, so wird

$$\frac{\partial s}{a\sqrt{e}} = \frac{\partial u \sqrt{(1+e-eu)}}{\sqrt{(2-u)}} \cdot \sqrt{\left(1+\frac{m}{u}\right)}$$

$$= \frac{\partial u(1+e-eu)}{\sqrt{(2+2e-(1+3e)u+eu^2)}} \cdot \sqrt{\left(1+\frac{m}{u}\right)}$$

Man entwickele $\sqrt{\left(1+\frac{m}{u}\right)}$ nach dem binomischen Lehrsatze, so wird wenn man $\sqrt{(2+2e-(1+3e)u+eu^2)}$, um abzukürzen, $= V$ setzt

$$\frac{s}{a\sqrt{e}} = \frac{1+3e}{2}\int\frac{\partial u}{V} - e\int\frac{u\partial u}{V}$$

$$+ \left(\frac{5+3e}{8}\right) m \int\frac{\partial u}{uV}$$

$$- \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9+3e}{12}\right) m^2 \int\frac{\partial u}{u^2V}$$

$$+ \frac{1.3}{4.6}\cdot\left(\frac{13+3e}{16}\right) m^3 \int\frac{\partial u}{u^3V}$$

$$- \frac{1.3.5}{4.6.8}\cdot\left(\frac{17+3e}{20}\right) m^4 \int\frac{\partial u}{u^4V}$$

$$+ \text{etc.}$$

wo die Integrale so zu nehmen sind, daß sie für $z=0$, also für $u = 1$ verschwinden.

Es ist

$$\frac{1+3e}{2}\int\frac{\partial u}{V} - e\int\frac{u\partial u}{V} = -\int\partial V$$

$$= \text{Const.} - V$$

$$= 1 - V.$$

Ferner

$$\int\frac{\partial u}{uV} = \int\frac{\partial u}{u\sqrt{(2+2e-(1+3e)u+eu^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \int \frac{\partial u}{u\sqrt{\left(\frac{2+2e}{e} - \frac{1+3e}{e}u + u^2\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+2e)}} \int \frac{\partial u \sqrt{\frac{2+2e}{e}}}{u\sqrt{\left(\frac{2+2e}{e} - \frac{1+3e}{e}u + u^2\right)}}$$

also nach (Integralformel, 77.) $\int \frac{\partial u}{Vu} =$

$$\frac{1}{\sqrt{(2+2e)}} \log \frac{2(2+2e) - (1+3e)u - 2\sqrt{(2+2e)}V}{u \times \text{const}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+2e)}} \log \frac{3+e-(1+3e)z - 2\sqrt{(2+2e)}\,V}{(1+z)(3+e-2\sqrt{(2+2e)})}$$

nach gehöriger Bestimmung der Constante und Wiederherstellung von z, wo denn $V = \sqrt{(1-z)(1-ez)}$.

Dieses Integral, auf welches alle übrigen zurückgebracht werden, setze man $= L$.

Um die übrigen zu finden, differentiire man die Formel $\frac{V}{u^{p-1}}$, so wird

$$\partial \cdot \frac{V}{u^{p-1}} = -\frac{(1+3e-2eu)\,du}{2u^{p-1}V} - \frac{(p-1)V\partial u}{u^p}$$

$$= -\frac{4(p-1)(1+e)-(2p-3)(1+3e)u+2(p-2)eu^2}{2u^pV}\partial u$$

Hieraus ergiebt sich

$$\int \frac{\partial u}{u^pV} = -\frac{V}{2(p-1)(1+e)u^{p-1}}$$

$$+ \frac{(2p-3)(1+3e)}{4(p-1)(1+e)} \int \frac{\partial u}{u^{p-1}V}$$

$$- \frac{(p-2)e}{2(p-1)(1+e)} \int \frac{\partial u}{u^{p-2}V}.$$

Setzt man hier nach und nach $p = 2, 3, 4,$ u. s. w. so erhält man $\int \frac{\partial u}{u^2 V}, \int \frac{\partial u}{u^3 V}, \int \frac{\partial u}{u^4 V}$ u. s. f. durch $\int \frac{\partial u}{u V}$. Heißen die gehörig ergänzten Werthe jener Integrale M, N, P, u. s. f. so ergiebt sich

$$M = \frac{1}{2(1+e)} - \frac{V}{2(1+e)(1+z)} + \frac{1+3e}{4(1+e)} L$$

$$N = \frac{1}{4(1+e)} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 8} \cdot \frac{(1+3e)}{(1+e)^2}$$

$$- \frac{V}{4(1+e)(1+z)^2} - \frac{1 \cdot 3 (1+3e)}{2 \cdot 8 (1+e)^2} \cdot \frac{V}{1+z}$$

$$+ \left\{ \frac{1 \cdot 3 (1+3e)^2}{4 \cdot 8 (1+e)^2} - \frac{e}{4(1+e)} \right\} L$$

$$P = \frac{1}{6(1+e)} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 12} \frac{(1+3e)}{(1+e)^2}$$

$$+ \frac{15 + 58e + 103e^2}{2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot (1+e)^3} - \frac{1}{6(1+e)} \cdot \frac{V}{1+z}$$

$$- \frac{1 \cdot 5 (1+3e)}{4 \cdot 12 (1+e)^2} \cdot \frac{V}{(1+z)^2}$$

$$- \frac{15 + 58e + 103e^2}{2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot (1+e)^3} \cdot \frac{V}{1+z}$$

$$+ \left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{(1+3e)^3}{(1+e)^3} - \frac{1 \cdot 9 (1+3e) e}{4 \cdot 12 (1+e)^2} \right\} L$$

u. s. w.

Dadurch wird nun

$$\frac{s}{a\sqrt{e}} = 1 - V + \frac{(5+3e)(1-e)}{8e} L$$

$$- \frac{1}{4} \cdot \frac{(9+3e)(1-e)^2}{12e^2} M$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \cdot \frac{(13 + 3e)(1 - e)^3}{16e^3} N$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{(17 + 3e)(1 - e)^4}{20e^3} P$$

$$+ \text{etc.}$$

31. Verlangt man den elliptischen Quadranten, so ist $z = 1$, und $V = 0$. Bezeichnet man also den Quadranten AMB (Fig. 22) durch E, so wird

$$\frac{E}{a\sqrt{e}} = 1 + \frac{(5 + 3e)(1 - e)}{8e\sqrt{(2 + 2e)}} \log \frac{1 - e}{3 + e - 2\sqrt{(2 + 2e)}}$$

$$- \frac{(3 + e)(1 - e)^2}{32e^2(1 + e)}$$

$$- \frac{(3 + 10e + 3e^2)(1 - e)^2}{32e^2\sqrt{(2 + 2e)^3}} \log \frac{1 - e}{3 + e - 2\sqrt{(2 + 2e)}}$$

$$+ \frac{(91 + 190e + 39e^2)(1 - e)^3}{2048e^3(1 + e)^2}$$

$$+ \frac{(39 + 191e + 185e^2 + 33e^3)(1 - e)^3}{1024e^3\sqrt{(2 + 2e)^5}} \times$$

$$\log \frac{1 - e}{3 + e - 2\sqrt{(2 + 2e)}}$$

$$- \text{etc.}$$

Da hier kein Gesetz der Fortschreitung bemerkbar ist, so hat man eine andere Reihe für E zu suchen. Diese erhält man so. Es ist, wenn man Kürze halber die halbe große Axe der Ellipse $a = 1$, setzt, aus (9)

$$E = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1^2}{2^2}e^2 - \frac{1^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot 3e^4\right.$$

$$\left. - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot 5e^6 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot 7e^8 - \text{etc.}\right\}$$

Nimmt man von diesem Ausdrucke das erste und zweyte Differential in Beziehung auf e, so wird

$$\frac{\partial E}{\partial e} = -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2^2} \cdot 2e + \frac{1^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot 3 \cdot 4 e^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot 5 \cdot 6 e^5 + \text{etc.}\right\}$$

$$\frac{\partial\partial E}{\partial e^2} = -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3e^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5e^4 + \text{etc.}\right\}$$

Hieraus ist

$$\frac{\partial\partial E}{\partial e^2} + \frac{1}{e} \cdot \frac{\partial E}{\partial e} = -\frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1}{2^2} \cdot 3e^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot 5e^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot 7e^6 + \text{etc.}\right\}$$

Multiplicirt man hier mit $1 - e^2$, so wird

$$(1 - e^2)\frac{\partial\partial E}{\partial e^2} + \frac{1 - e^2}{e} \cdot \frac{\partial E}{\partial e}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{2^2} \cdot e^2 - \frac{1^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot 3e^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot 5e^6 - \text{etc.}\right\}$$

$$= - E.$$

Also ist

$$(1 - e^2)\frac{\partial\partial E}{\partial e^2} + \frac{1 - e^2}{e} \cdot \frac{\partial E}{\partial e} + E = 0.$$

Man sehe jetzt E als eine Function von b, der halben kleinen Axe an, so muß man um die Differentialgleichung zwischen E und b zu erhalten, statt $\frac{\partial\partial E}{\partial e^2}$

setzen $\frac{\partial e \partial\partial E - \partial E \partial\partial e}{\partial e^3}$ (Differentialgleichung. 16.).

Dadurch wird aus der vorigen Gleichung.

$$(1 - e^2) \cdot \frac{1}{\partial e^2}\left(\frac{\partial e \partial^2 E - \partial E \partial^2 e}{\partial e}\right) + \frac{1 - e^2}{e} \cdot \frac{\partial E}{\partial e} + E = 0.$$

Nun ist

$$e^2 = 1 - b^2$$

also, ∂b constant genommen

$$\partial e = -\frac{b \partial b}{e}$$

$$\partial\partial e = -\frac{\partial b^2}{e^3}$$

folglich

$$\frac{1 - e^2}{\partial e^2} = \frac{b^2}{\partial e^2} = \frac{e^2}{\partial b^2} = \frac{1 - b^2}{\partial b^2}$$

$$\frac{\partial\partial e}{\partial e} = \frac{\partial b}{be^2} = \frac{\partial b}{b(1-b^2)}$$

Hiermit erhält man aus der letzten Gleichung diese

$$(1 - b^2)\frac{\partial\partial E}{\partial b^2} - \left(\frac{1 + b^2}{b}\right)\frac{\partial E}{\partial b} + E = 0.$$

welche zur Entwickelung von E nach b dient. Um die Form der Reihe, welche E durch b darstellt, zu bestimmen, entwickele man die beiden ersten Glieder der Reihe in (31), indem man $e = \sqrt{(1 - b^2)} = 1 - \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{8} b^4 -$ etc. macht, bis zur zweyten Potenz von b, so findet man $E = 1 - \frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{2} b^2 \log \frac{4}{b}$.

Man setze demnach $E = Q + R \log \frac{4}{b}$, wo Q und P zwey nach den Potenzen von b^2 fortschreitende Reihen anzeigen, so ist

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial Q}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial b} \log \frac{4}{b} - \frac{R}{b}$$

$$\frac{\partial\partial E}{\partial b^2} = \frac{\partial\partial Q}{\partial b^2} + \frac{\partial\partial R}{\partial b^2} \log \frac{4}{b} - 2 \frac{\partial R}{\partial b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{R}{b^2}.$$

Bringt man diese Werthe in die Differentialgleichung zwischen E und b, so entstehen, weil die in $\log \frac{4}{b}$ multiplicirten Glieder für sich o seyn müssen, zur Bestimmung von Q und R diese beiden Differentialgleichungen

$$(1 - b^2) \frac{\partial\partial R}{\partial b^2} - \left(\frac{1 + b^2}{b}\right) \frac{\partial R}{\partial b} + R = 0 \text{ (I)}$$

$$(1 - b^2) \frac{\partial\partial Q}{\partial b^2} - \left(\frac{1 + b^2}{b}\right) \frac{\partial Q}{\partial b}$$

$$- 2 \left(\frac{1 - b^2}{b}\right) \frac{\partial R}{\partial b} + Q + \frac{2R}{b^2} = 0 \text{ (II)}$$

Es sey $R = \alpha b^2 + \beta b^4 + \gamma b^6 + \delta b^8 + \ldots$

so ist $\frac{\partial R}{\partial b} = 2\alpha b + 4\beta b^3 + 6\gamma b^5 + 8\delta b^7 + \ldots$

$$\frac{\partial\partial R}{\partial b^2} = 2\alpha + 12\beta b^2 + 30\gamma b^4 + 56\delta b^6 + \ldots$$

wodurch aus der Gleichung (I) wird

$$(8\beta - 3\alpha)b^2 + (24\gamma - 15\beta)b^4$$
$$+ (48\delta - 35\gamma)b^6 + \text{etc.} = 0,$$

also α unbestimmt bleibt. Man kennt dessen Werth aber schon, welcher $\frac{1}{2}$ ist, und hat nun, weil die iß

b^2, b^4, b^6 u. s. w. multiplicirten Coefficienten o seyn müssen,

$$\beta = \frac{3}{8}\,\alpha = \frac{1.3}{2.4}\,\alpha = \frac{1.1.3}{2.2.4}$$

$$\gamma = \frac{15}{24}\,\beta = \frac{3.5}{4.6}\,\beta = \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6}$$

$$\delta = \frac{35}{48}\,\gamma = \frac{5.7}{6.8}\,\gamma = \frac{1.1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8}$$

u. s. w.

Um die Glieder der Reihen für R und Q leichter zusammenziehen zu können, und weil überdies Q mit von R abhängt, setze man

$$Q = 1 + K'\alpha b^2 + K''\beta b^4 + K'''\gamma b^6 + K^{\mathrm{IV}}\delta b^8 + \text{etc.}$$

Sucht man nun $\frac{\partial Q}{\partial b}$, $\frac{\partial\partial Q}{\partial b^2}$ und bringt die Werthe derselben nebst denen von $\frac{\partial R}{\partial b}$ und $\frac{R}{b^2}$ in (II), so erhält man zur Bestimmung von K'', K''', u. s. w. (K' kennt man schon, es ist nämlich $K' = -\frac{1}{2}$) folgende Gleichungen

$$8K''\beta - 3K'\alpha - 6\beta + 4\alpha = 0$$
$$24K'''\gamma - 15K''\beta - 10\gamma + 8\beta = 0$$
$$48K^{\mathrm{IV}}\delta - 35K'''\gamma - 14\delta + 12\gamma = 0$$

Da nun

$$8\beta = 3\alpha,\quad 24\gamma = 15\beta,\quad 48\delta = 35\delta$$

u. s. f. so wird

$$K'' = K' + \frac{6\beta - 4\alpha}{1.3\alpha}$$

$$K''' = K'' + \frac{10\gamma - 8\beta}{3.5\beta}$$

$$K^{IV} = K''' + \frac{14\delta - 12\gamma}{5 \cdot 7\gamma}$$

u. s. f.

wo das Gesetz der Fortschreitung klar ist. Entwickelt man die Werthe wirklich, so findet sich

$$K'' = K' - \frac{7}{12} = - \frac{13}{12} = - 1 - \frac{1}{12}$$

$$= - 1 - \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$K''' = K'' - \frac{7}{60} = K'' - \frac{1}{12} - \frac{1}{30}$$

$$= K'' - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6}$$

$$K^{IV} = K''' - \frac{43}{840} = K''' - \frac{1}{30} - \frac{1}{56}$$

$$= K''' - \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8}.$$

Bezeichnet man also die Coefficienten vom zweyten an K'', K''', K'''' . . . . durch A, B, C, D, so ist

$$E = 1 + \frac{1}{2} b^2 \left(\log\left(\frac{4}{b}\right) - \frac{1}{2} \right)$$

$$+ \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4} b^4 \left(\log\left(\frac{4}{b}\right) - 1 - \frac{1}{3 \cdot 4} \right)$$

$$+ \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} b^6 \left(\log\left(\frac{4}{b}\right) - A - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} \right)$$

$$+ \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot {}^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} b^8 \left(\log\left(\frac{4}{b}\right) - B - \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8} \right)$$

$+$ etc.

Euler hat diese Reihe für den Quadranten einer Ellipse von großer Excentricität gegeben in einer Abhandlung de rectificatione ellipseos, welche die letzte

Stelle im 2ten Th. seiner Opusculorum varii argumenti einnimmt. Sein Verfahren, zu derselben zu gelangen, ist hier etwas vereinfacht. Will man a in die Reihen wieder einführen, so hat man nur $\frac{E}{a}$, $\frac{b}{a}$ statt E, b zu setzen.

32. Die Rechnung für einen hyperbolischen Bogen im Falle eines der Einheit sehr nahe kommenden n, läßt sich auf dieselbe Art, welche in (30) für die Ellipse gebraucht ist, anstellen. Wenn aber e an der Ellipse oder n an der Hyperbel nicht sehr nahe an 0 oder 1 fallen so giebt es für die Berechnung eines elliptischen oder hyperbolischen Bogens keine vorzüglichere Methode, als die von Lagrange, in (Integralformel, 81.) erwähnte, von welcher hier die Anwendung auf die Ellipse nach Legendre gezeigt werden soll.

Das Element ∂s eines im Scheitel der kleinen Axe anfangenden elliptischen Bogens s ist, wenn die große Axe $= 2$, und die Abscisse aus dem Mittelpuncte $x = \sin\varphi$ gesetzt wird, $= \partial\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin\varphi^2)}$. Da $e < 1$, so setze man noch $e = \sin\varepsilon$, so wird

$$\partial s = \partial\varphi \sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)} = \frac{\partial\varphi(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$$

Es sey $\quad \dfrac{(1 + \cos\varepsilon)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}} = \sin\varphi'$

so wird $\quad \dfrac{\cos\varphi^2 - \cos\varepsilon\sin\varphi^2}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}} = \cos\varphi'$

wodurch also für $\sin\varepsilon = 1$, $\sin\varphi' = \sin\varphi$, $\cos\varphi' = \cos\varphi$ wird. Ferner giebt die Differentiation

$$\partial\varphi' = \frac{(1 + \cos\varepsilon)(\cos\varphi^2 + \cos\varepsilon\sin\varphi^2)\partial\varphi}{1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2}.$$

Man nehme noch $\frac{1 - \cos\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon} = \sin\varepsilon'$.

so wird

$$\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)} = \frac{\cos\varphi^2 + \cos\varepsilon \sin\varphi^2}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$$

Folglich

$$\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)}} = \frac{(1 + \cos\varepsilon)\,\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$$

und $\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$

$$= \frac{1}{1 + \cos\varepsilon} \cdot \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin\varepsilon'}}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)}}$$

weil

$$\sin\varepsilon' = \frac{(1 - \cos\varepsilon)(1 + \cos\varepsilon)}{(1 + \cos\varepsilon)^2} = \frac{\sin\varepsilon^2}{(1 + \cos\varepsilon)^2}.$$

Zur Bestimmung von $\sin\varphi$ durch $\sin\varphi'$ erhält man folgende Gleichung $(1 + \cos\varepsilon)^2 \sin\varphi^4 - ((1 + \cos\varepsilon)^2 + \sin\varepsilon^2 \sin\varphi'^2) \sin\varphi^2 = -\sin\varphi'^2$ welche, weil $\frac{\sin\varepsilon^2}{(1 + \cos\varepsilon)^2} = \sin\varepsilon'$, und $\frac{1}{1 + \cos\varepsilon} = \frac{1 + \sin\varepsilon'}{2}$, durch Division mit $(1 + \cos\varepsilon)^2$ sich in diese verwandelt $\sin\varphi^4 - (1 + \sin\varepsilon' \sin\varphi'^2) \sin\varphi^2 = -\frac{(1 + \sin\varepsilon')^2 \sin\varphi'^2}{4}$. Hieraus ist

$$\sin\varphi^2 = \frac{1 + \sin\varepsilon' \sin\varphi'^2 - \cos\varphi' \sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)}}{2}.$$

Der in das Radical multiplicirte Theil muß mit dem Vorzeichen — genommen werden, damit für

$\sin\varepsilon = 1$, wodurch auch $\sin\varepsilon' = 1$ wird, $\sin\varphi = \sin\varphi'$ werde.

Substituirt man den gefundenen Werth von $\sin\varphi^2$ und von $\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$ in dem Ausdrucke für ∂s, so wird $\partial s = \frac{\sin\varepsilon \sqrt{\sin\varepsilon'}}{2} \cdot \cos\varphi' \partial\varphi'$

$$+ \frac{\sqrt{\sin\varepsilon'}}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2 \sin\varphi'^2)}} \times$$
$$\left\{1 - \frac{\sin\varepsilon^2}{2} - \frac{\sin\varepsilon^2 \sin\varepsilon' \sin\varphi'^2}{2}\right\}$$

Der erste Theil hier ist für sich integrabel, der andere hängt von der Integration einer Formel, wie $\frac{(A - B\sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi^2)}}$, welche die ursprüngliche unter sich begreift, ab. Der Vortheil der vorgenommenen Reduction aber besteht darin, daß $\sin\varepsilon'$ kleiner als $\sin\varepsilon$ ist; denn es liegt zwischen den Gränzen $\frac{1}{4}\sin\varepsilon^2$ und $\sin\varepsilon^2$. Man würde also, wenn man den obigen zweyten Theil in eine Reihe auflöste, und integrirte, in Absicht auf $\sin\varepsilon'$ eine schnellere Convergenz erhalten, als vorher in Beziehung auf $\sin\varepsilon$. Allein man kann diese Reihenentwickelung ersparen. Man darf nämlich die obige Reduction nur aufs Neue bey dem zweyten Theile der Formel für ∂s anbringen, und dies Verfahren so lange wiederhohlen, bis man zu einem $\sin\varepsilon^{(m)}$ gekommen ist, welcher klein genug ist, um vernachlässigt werden zu können, alsdann können, weil $\sin\varphi^{(m)2} < 1$, $(\sin\varepsilon^{(m)} \sin\varphi^{(m)})^2$ und

$$\frac{\sin\varepsilon^2 \sin\varepsilon' \sin\varepsilon'' \ldots\ldots \sin\varepsilon^{(m)} \sin\varphi^{(m)2}}{2^m}$$

um so eher vernachlässigt werden, und der letzte Theil

des Ausdrucks für ∂s wird $\partial\varphi^{(m)}$ multiplicirt in eine Constante; wodurch dann s selbst sehr leicht gefunden wird. Das ganze Verfahren wird sogleich klärer werden. Man setze

$$\frac{(1 + \cos\varepsilon')\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2\sin\varphi'^2)}} = \sin\varphi''$$

$$\text{und } \frac{1 - \cos\varepsilon'}{1 + \cos\varepsilon'} = \sin\varepsilon''$$

so wird

$$\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon'^2\sin\varphi'^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin\varepsilon''}}{\sin\varepsilon'} \cdot \frac{\partial\varphi''}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon''^2\sin\varphi''^2)}}$$

und $\sin\varphi'^2 =$

$$\frac{1 + \sin\varepsilon''\sin\varphi''^2 - \cos\varphi''\sqrt{(1 - \sin\varepsilon''^2\sin\varphi''^2)}}{2}$$

auch

$$\partial s = \frac{\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'}}{2}\cos\varphi'\,\partial\varphi$$

$$+ \frac{\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''}}{4}\cos\varphi''\,\partial\varphi''$$

$$+ \frac{\sqrt{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''}}{\sin\varepsilon\sin\varepsilon'} \cdot \frac{\partial\varphi''}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon''^2\sin\varphi''^2)}} \times$$

$$\left\{1 - \frac{\sin\varepsilon^2}{2} - \frac{\sin\varepsilon^2\sin\varepsilon'}{4} - \frac{\sin\varepsilon^2\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin\varphi''^2}{4}\right.$$

Macht man aufs Neue

$$\frac{(1 + \cos\varepsilon'')\sin\varphi''\cos\varphi''}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon''^2\sin\varphi''^2)}} = \sin\varphi'''$$

$$\frac{1 - \cos\varepsilon''}{1 + \cos\varepsilon''} = \sin\varepsilon''' \quad \text{und so fort,}$$

wo $\sin\varepsilon$, $\sin\varepsilon'$, $\sin\varepsilon''$, $\sin\varepsilon'''$ u. s. w. eine stark abnehmende Reihe bilden, so wird, wenn man die Gränze der Werthe φ, $\frac{1}{2}\varphi'$, $\frac{1}{4}\varphi''$, $\frac{1}{8}\varphi'''$ . . . durch Φ bezeichnet, durch Integration

$$s = \frac{\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'}}{2}.\sin\varphi' + \frac{\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''}}{4}\sin\varphi''$$
$$+ \frac{\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin\varepsilon'''}}{8}\sin\varphi''' + \text{etc.}$$
$$+ KL\Phi. \text{ wo}$$

$$K = \frac{2\sqrt{\sin\varepsilon'}}{\sin\varepsilon}.\frac{2\sqrt{\sin\varepsilon''}}{\sin\varepsilon'}.\frac{2\sqrt{\sin\varepsilon'''}}{\sin\varepsilon''}\ldots\ldots$$

und

$$L = 1 - \frac{\sin\varepsilon^2}{2} - \frac{\sin\varepsilon^2\sin\varepsilon'}{4} - \frac{\sin\varepsilon^2\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''}{8}$$
$$- \text{etc.}$$
$$= \frac{\sin\varepsilon^2}{4\sin\varepsilon'}\left(1 - \frac{\sin\varepsilon'^2\sin\varepsilon''}{2} - \frac{\sin\varepsilon'^2\sin\varepsilon''\sin\varepsilon'''}{4} - \text{etc.}\right)$$

durch Zusammenziehung der drey ersten Glieder ist, und keine Constans hinzugefügt zu werden braucht, weil für $\varphi = 0$, auch φ', φ'', φ''' . . . . $= 0$ werden, und s verschwindet.

Verlangt man den elliptischen Quadranten E, so ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, und $\sin\varphi' = 0$, $\cos\varphi' = -1$, also $\varphi' = \pi$, ferner $\sin\varphi'' = 0$, $\cos\varphi' = 1$, und $\varphi'' = 2\pi$ zu nehmen, weil φ'' mit φ' zugleich wächst vermöge der Gleichung

$$\partial\varphi'' = \frac{\sin\varepsilon'}{\sqrt{\sin\varepsilon''}}.\frac{\sqrt{(1-\sin\varepsilon''^2\sin\varphi''^2)}}{\sqrt{(1-\sin\varepsilon^2\sin\varphi'^2)}}\partial\varphi'$$

worin die Radicalien positiv genommen werden.

des Ausdrucks für ∂s wird $\partial\varphi^{(m)}$ multiplicirt in eine Constante; wodurch dann s selbst sehr leicht gefunden wird. Das ganze Verfahren wird sogleich klärer werden. Man setze

$$\frac{(1+\cos\varepsilon')\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sqrt{(1-\sin\varepsilon'^2\sin\varphi'^2)}}=\sin\varphi''$$

$$\text{und}\ \frac{1-\cos\varepsilon'}{1+\cos\varepsilon'}=\sin\varepsilon''$$

so wird

$$\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{(1-\sin\varepsilon'^2\sin\varphi'^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sin\varepsilon''}}{\sin\varepsilon'}\cdot\frac{\partial\varphi''}{\sqrt{(1-\sin\varepsilon''^2\sin\varphi''^2)}}$$

und $\sin\varphi'^2=$

$$\frac{1+\sin\varepsilon''\sin\varphi''^2-\cos\varphi''\sqrt{(1-\sin\varepsilon''^2\sin\varphi''^2)}}{2}$$

auch

$$\partial s=\frac{\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'}}{2}\cos\varphi'\,\partial\varphi$$

$$+\frac{\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''}}{4}\cos\varphi''\,\partial\varphi''$$

$$+\frac{\sqrt{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''}}{\sin\varepsilon\sin\varepsilon'}\cdot\frac{\partial\varphi''}{\sqrt{(1-\sin\varepsilon''^2\sin\varphi''^2)}}\times$$

$$\left\{1-\frac{\sin\varepsilon^2}{2}-\frac{\sin\varepsilon^2\sin\varepsilon'}{4}-\frac{\sin\varepsilon^2\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin\varphi''^2}{4}\right\}$$

Macht man aufs Neue

$$\frac{(1+\cos\varepsilon'')\sin\varphi''\cos\varphi''}{\sqrt{(1-\sin\varepsilon''^2\sin\varphi''^2)}}=\sin\varphi'''$$

$$\frac{1-\cos\varepsilon''}{1+\cos\varepsilon''}=\sin\varepsilon'''\quad\text{und so fort,}$$

wo $\sin\varepsilon$, $\sin\varepsilon'$, $\sin\varepsilon''$, $\sin\varepsilon'''$ u. s. w. eine stark abnehmende Reihe bilden, so wird, wenn man die Gränze der Werthe $\varphi, \frac{1}{2}\varphi', \frac{1}{4}\varphi'', \frac{1}{8}\varphi''' \ldots$ durch Φ bezeichnet, durch Integration

$$s = \frac{\sin\varepsilon \sqrt{\sin\varepsilon'}}{2} \cdot \sin\varphi' + \frac{\sin\varepsilon \sqrt{\sin\varepsilon' \sin\varepsilon''}}{4} \sin\varphi''$$

$$+ \frac{\sin\varepsilon \sqrt{\sin\varepsilon' \sin\varepsilon'' \sin\varepsilon'''}}{8} \sin\varphi''' + \text{etc.}$$

$+ KL\Phi$. wo

$$K = \frac{2\sqrt{\sin\varepsilon'}}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{2\sqrt{\sin\varepsilon''}}{\sin\varepsilon'} \cdot \frac{2\sqrt{\sin\varepsilon'''}}{\sin\varepsilon''} \cdot \ldots$$

und

$$L = 1 - \frac{\sin\varepsilon^2}{2} - \frac{\sin\varepsilon^2 \sin\varepsilon'}{4} - \frac{\sin\varepsilon^2 \sin\varepsilon' \sin\varepsilon''}{8} - \text{etc.}$$

$$= \frac{\sin\varepsilon^2}{4\sin\varepsilon'}\left(1 - \frac{\sin\varepsilon'^2 \sin\varepsilon''}{2} - \frac{\sin\varepsilon'^2 \sin\varepsilon'' \sin\varepsilon'''}{4} - \text{etc.}\right)$$

durch Zusammenziehung der drey ersten Glieder ist, und keine Constans hinzugefügt zu werden braucht, weil für $\varphi = 0$, auch $\varphi', \varphi'', \varphi''' \ldots = 0$ werden, und s verschwindet.

Verlangt man den elliptischen Quadranten E, so ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, und $\sin\varphi' = 0$, $\cos\varphi' = -1$, also $\varphi' = \pi$, ferner $\sin\varphi'' = 0$, $\cos\varphi' = 1$, und $\varphi'' = 2\pi$ zu nehmen, weil φ'' mit φ' zugleich wächst vermöge der Gleichung

$$\partial\varphi'' = \frac{\sin\varepsilon'}{\sqrt{\sin\varepsilon''}} \cdot \frac{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon''^2 \sin\varphi''^2)}}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2 \sin\varphi'^2)}} \partial\varphi'$$

worin die Radicalien positiv genommen werden.

Eben so wird $\varphi''' = 4\pi$ u. s. w. Demnach ist die Gränze der Werthe $\frac{1}{2}\varphi'$, $\frac{1}{4}\varphi''$, $\frac{1}{8}\varphi'''$ u. s. w. $\frac{1}{2}\pi$ und es wird $E = \frac{1}{2}\pi KL$

33. Die Berechnung der Winkel φ', φ'' u. s. w. geschieht am leichtesten nach den Formeln

$$\tang(\varphi' - \varphi) = \cos\varepsilon \tang\varphi$$
$$\tang(\varphi'' - \varphi') = \cos\varepsilon' \tang\varphi'$$

u. s. w. welche aus den obigen folgen. Es ist nämlich

$$\tang\varphi' = \frac{(1 + \cos\varepsilon)\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi^2 - \cos\varepsilon\sin\varphi^2}$$
$$= \frac{\tang\varphi + \cos\varepsilon\tang\varphi}{1 - \cos\varepsilon\tang\varphi \,.\, \tang\varphi}.$$

Setzt man $\cos\varepsilon\tang\varphi = \tang\psi$, so ist das Glied rechter Hand $= \tang(\varphi + \psi)$, also

$$\varphi' - \varphi = \psi$$
oder $\tang(\varphi' - \varphi) = \cos\varepsilon\tang\varphi$.

Den Winkel ψ hat man in demselben Quadranten wie φ zu nehmen, weil das Verhältniß je zweyer Winkel der Reihe φ, φ', φ'', φ''', u. s. w., sich dem von $1 : 2$ ohne Ende nähert.

Beyspiel. Man verlangt den Quadranten einer Ellipse, deren halbe große Axe $= 1$, halbe kleine $= \frac{1}{2}$, ist, wie auch den Bogen, welcher der Abscisse $= \frac{4}{5}$ vom Mittelpuncte an gerechnet, entspricht.

Hier ist also $\cos\varepsilon = \frac{1}{2}$, mithin $\varepsilon = 60°$. Dadurch ergiebt sich vermöge der Formeln

sin

$$\sin \varepsilon' = \tang \frac{1}{2} \varepsilon^2$$

$$\sin \varepsilon'' = \tang \frac{1}{2} \varepsilon'^2 \text{ u. s. w.}$$

$\varepsilon' = 19^\circ\ 28'\ 16'', 39$; $\varepsilon'' = 1^\circ\ 41'\ 12''\ 75$;
$\varepsilon''' = 0^\circ\ 0'\ 44''\ 71$; $\varepsilon^{IV} = 0^\circ\ 0'\ 0'', 00$.

Hier ist also

$$K = \frac{2 \sqrt{\sin \varepsilon'}}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{2 \sqrt{\sin \varepsilon''}}{\sin \varepsilon'} \cdot \frac{2 \sqrt{\sin \varepsilon'''}}{\sin \varepsilon''}$$

$$= \frac{8 \sqrt{\sin \varepsilon'''}}{\sin \varepsilon \sqrt{\sin \varepsilon' \sin \varepsilon''}}$$

$$L = \frac{\sin \varepsilon^2}{4 \sin \varepsilon'} \left(1 - \frac{\sin \varepsilon'^2 \sin \varepsilon''}{2} - \frac{\sin \varepsilon'^2 \sin \varepsilon'' \sin \varepsilon'''}{4} \right)$$

und man erhält $\log K = 0{,}1376330$; $L = 0{,}5615801$ und damit $E = 1{,}211056 +$.

Ferner ist $\sin \varphi = \frac{4}{5} = 0{,}8000000$ und dadurch findet sich

$$\begin{array}{lrrl} \varphi & = 53^\circ & 7' & 48'', 37 \\ \varphi' & = 86 & 49 & 12, 61 \\ \varphi'' & = 173 & 26 & 52, 38 \\ \varphi''' & = 346 & 53 & 54, 88 \\ \varphi^{IV} & = 2 \varphi'''. & & \end{array}$$

Hier ist also $\Phi = \frac{1}{16} \varphi^{IV} = \frac{1}{8} \varphi''' =$ $43^\circ\ 21'\ 44'', 36 = 0{,}75681529$ in Theilen des Halbmessers.

Weiter erhält man

$$\frac{1}{2} \sin \varphi' \sin \varepsilon \sqrt{\sin \varepsilon'} = 0{,}2496151$$

$$\frac{1}{4} \sin \varphi'' \sin \varepsilon \sqrt{\sin \varepsilon' \sin \varepsilon''} = 0{,}0023479$$

$\frac{1}{8}\sin\varphi'''\sin\varepsilon\sqrt{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin\varepsilon'''} = -0{,}0000343$

$$KL\Phi = 0{,}5834915$$
$$\text{und dadurch } s = 0{,}8354202$$

Die mechanischen Quadraturen geben mir E zwischen 1,2110553 und 1,2110561; den Bogen S findet Montucla (T. III. S. 203) nach Simpsons Annäherungsformel (Quadratur, 140.) = 0,828242. Es sind dabey nur fünf Ordinaten gebraucht.

34. Man kann die Reihe der $\sin\varepsilon$ auch rückwärts fortsetzen, und dadurch s von dem Integrale $\int\frac{(A - B\sin\varphi^2)\partial\varphi}{\sqrt{(1 - \sin\varepsilon^2\sin\varphi^2)}}$, wo $\sin\varepsilon$ so wenig als man will von Eins verschieden ist, abhängig machen. Da für $\sin\varepsilon = 1$, jenes Integral $= B\sin\varphi + (A - B)\times$ $\int\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = B\sin\varphi + (A - B)\log\operatorname{tg}(45° + \frac{1}{2}\varphi)$, so erhält man hierdurch eine Annäherung zu dem wahren Werthe desselben, wofern nur $\cos\varepsilon\sin\varphi$ gegen $\cos\varphi$ vernachlässigt werden kann. Wir sind gezwungen, wegen der weitern Ausführung und Entwickelung auf Legendre's Exerciçes de Calcul intégral. Paris. 1811. zu verweisen, wo dieser Gegenstand umständlich behandelt ist. Man findet daselbst auch die Anwendung der Lagrangischen Methode auf die Hyperbel, indem der Unterschied eines hyperbolischen Bogens von dem Stücke der Berührenden an dem Endpuncte desselben, welches von dem Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf die Berührende abgeschnitten wird, durch eine Reihe, wie hier für den elliptischen Bogen gegeben ist, dargestellt wird.

35. Die elliptischen und hyperbolischen Bogen bilden eine eigene Klasse transcendenter Größen, da sie aus einer unendlichen Reihe Glieder bestehen, deren je-

des selbst wiederum eine unendliche Reihe giebt. Man kann sie als die nächste Gattung der Transcendenten nach den Kreis- und logarithmischen Functionen ansehen. Maclaurin und d'Alembert haben sich zuerst damit beschäftigt, die Integralformeln aufzusuchen, welche sich auf die Rectification elliptischer und hyperbolischer Bogen bringen lassen, jener in dem Treatise of Fluxions. §. 798 u. folgg., dieser in den Berliner Memoiren für 1746 und in seinen Opuscules. Nachher hat Euler diesen Gegenstand in den Nov. Comment. Petrop. T. X. behandelt. Landen entdeckte den merkwürdigen Satz, daß ein hyperbolischer Bogen sich vermittelst zweyer elliptischen Bogen zusammensetzen läßt. Philosophical Transactions 1775. Dadurch werden die Integrale, welche Maclaurin und d'Alembert für solche, die von der Rectification der Hyperbel abhängen, erklärt hatten, allein von der Rectification der Ellipse abhängig. Legendre erwies in den Mém. de l'Acad. de Scienc. 1786. Landens Satz auf eine einfachere Art, als dieser selbst gethan hatte, und zeigte, daß sich die Rectification irgend einer Ellipse, immer auf die Rectification zweyer andern, davon die eine der geraden Linie, die andere dem Kreise so nahe kommt als man will, bringen lasse. M. s. die vorhin angeführten Exercices de Calc. intégral.

36. Die Parabel, welche den Übergang von der Ellipse zu der Hyperbel macht, ist durch eine einfache logarithmische Formel rectificabel. Ihre einfachste Gleichung ist, $ax = yy$, also ihre Differentialgleichung, $a\partial x = 2y\partial y$. Daher ist das Differential des Bogens, $\partial s = \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{4yy}{aa}\right)}$. Man setze

$\frac{2y}{a} = u$, so ist $\partial y = \frac{1}{2} a\partial u$, und

$\partial s = \frac{1}{2} a\partial u \sqrt{(1 + uu.)}$ Daraus ist (Integral-

formel, 69. 50.)

$$s = \frac{1}{4} au \sqrt{(1 + uu)} + \frac{1}{4} a \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1 + uu)}}$$

und ferner

$$s = \frac{1}{4} au \sqrt{(1 + uu)} + \frac{1}{4} a \log (\sqrt{(1 + uu)} + u),$$

wo die Constante in beiden Theilen $= 0$ ist, weil der Bogen in dem Scheitel anfangen soll, wo $u = 0$ ist.

Für u dessen Werth zurückgesetzt, ist

$$s = \frac{y}{2a} \sqrt{(aa + 4yy)} + \frac{1}{4} a \log . \frac{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y}{a}.$$

37. Für die Ordinate y deren Werth $\sqrt{ax}$ gesetzt, ist

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{(ax + 4xx)} + \frac{1}{8} a \log . \frac{a + 8x + 4\sqrt{(ax + 4xx)}}{a}.$$

Es ist von der Zahl des Logarithmen das Quadrat genommen, und dagegen der Logarithme halbirt.

Dieses Integral findet man auch unmittelbar, wenn man ∂s durch ∂x und x ausdrückt. Es ist $\partial y = \frac{1}{2} \partial x \sqrt{\frac{a}{x}}$, und $\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{a}{4x}\right)}$ $= \frac{1}{2} \partial x \sqrt{\frac{a + 4x}{x}} = \frac{1}{2} . \frac{(ax + 4x) \partial x}{\sqrt{(ax + 4xx)}}$. Das Integral wird, nach Absonderung des Differentials $\frac{1}{2} \partial . \sqrt{(ax + 4xx)}$ aus Integralformel, 56. gefunden.

38. Es sey an der Parabel (Fig. 11.) $PM = y$, $QN = z$, so ist der Bogen

$$MN = \frac{z}{2a}\sqrt{(aa + 4zz)} - \frac{y}{2a}\sqrt{(aa + 4yy)}$$
$$+ \frac{1}{4} a \log . \frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y}.$$

Rectification einiger andern krummen Linien.

39. Die Curve sey eine parabolische, deren Gleichung ist $x = ry^n$, wo n eine ganze oder gebrochene Zahl ist, und die Größen als Zahlen betrachtet werden. Es ist $\partial x = nry^{n-1}\partial y$, und das Differential des Bogens $\partial s = \partial y \sqrt{(1 + n^2r^2y^{2n-2})}$. Das Integral ist algebraisch, wenn $1 = 2k(n - 1)$ ist, wo k eine ganze positive Zahl bedeutet. Denn es ist, zufolge Integralformel, 59, das Integral, $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\partial x$, algebraisch, wenn $m = (k+1)n$ ist, wo k eine ganze positive Zahl ist. Es muß also in unserm Differential, wo $m = 1$ ist, und $2n - 2$ statt des Exponenten n steht, das Reciprokum von $n-1$ eine gerade Zahl seyn. Das ist es, wenn $n = \frac{2m+1}{2m}$ ist, also, wenn n die Werthe $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}$, u. s. f. hat.

40. Es sey $n = \frac{3}{2}$, so ist $x = ry^{\frac{3}{2}}$, oder $x^2 = r^2y^3$, und wenn die Gleichung homogen gemacht wird, $ax^2 = y^3$, wo nun a, x, y gerade Linien bedeuten. Die krumme Linie ist die Evolute der gemeinen Parabel, (Evolute, 6.), gewöhnlich die parabola semicubicalis, auch cubica secunda genannt.

Es ist für dieselbe $\partial s = \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} . \frac{y}{a}\right)}$.

Daher $s = \frac{8}{27} a \left(1 + \frac{9}{4} . \frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} a$.

41. Es sey $n = \frac{5}{4}$ so ist die Gleichung für die Curve, $x^4 = r^4 y^5$, oder $ax^4 = y^5$, wo a statt $\frac{1}{r^4}$ gesetzt ist. Nun ist

$$\partial s = \left(1 + \frac{25}{16}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial y.$$

Man setze $\frac{y}{a} = u$, und behalte n^2 für $\frac{25}{16}$,

so ist $\partial s = a\,(1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\, \partial u$.

Die Vergleichung mit der Formel IV. a. a. O. giebt

$$s = \frac{4a}{5n^2} u^{\frac{1}{2}} (1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{2a}{5n^2} \int u^{-\frac{1}{2}} (1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \partial u.$$

Ferner ist

$$\int u^{-\frac{1}{2}} (1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \partial u = \frac{4}{3n^2}(1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}.$$

Folglich ist

$$s = \left(\frac{4a}{5n^2} u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}.\frac{4}{3}.\frac{a}{n^4}\right)(1 + n^2 u^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}.$$

Setzt man für u, seinen Werth zurück, so ist

$$s = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\sqrt{ay} - \frac{2}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^2 a\right) \times$$

$$\left(1 + \frac{25}{16}.\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}. - \frac{2}{3}.\left(\frac{4}{5}\right)^5 a,$$

wenn s für $y = 0$ verschwinden soll.

42. Ist aber $n = \frac{2m}{2m - 1}$, so ist

$2n - 2 = \frac{2}{2m - 1}$, und das Reciprokum davon ist keine ganze Zahl. Das Integral ist nun theils algebraisch theils logarithmisch. Man setze $y^{2n-2} = u^2$, oder $y^{n-1} = u$, also $y = u^{1:(n-1)}$, und $\partial y = \frac{1}{n-1} u^{(-n+2):n-1} \partial u = (2m - 1) u^{2m-2} \partial u$. Nun ist $\partial s = (1 + n^2 r^2 y^{2n-2})^{\frac{1}{2}} \partial y = (2m - 1) u^{2m-2} \times (1 + n^2 r^2 u^2)^{\frac{1}{2}} \partial u$. Bey der successiven Integration nach Integralformel IV. 59. wird der Exponent des Factors u^{2m-2} jedesmahl um 2 vermindert, und so kommt man zuletzt auf das Differential $(1 + n^2 r^2 u^2)^{\frac{1}{2}} \partial u$, wovon das Integral ist $\frac{1}{2} u (1 + n^2 r^2 u^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1 + n^2 r^2 u^2)}}$, (a. a. O. 69). Der zweyte Theil ist logarithmisch (a. a. O. 50.).

43. Die parabolischen Linien, deren Bogen sich auf Logarithmen bringen lassen, sind also diejenigen, für welche ist $ax = yy$; $ax^3 = y^4$; $ax^5 = y^6$, und so fort.

44. Exempel. Es sey $n = \frac{4}{3}$, also $ax^3 = y^4$. Nun ist $\partial s = \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{16}{9} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}$. Man setze $y^{\frac{1}{3}} = u$, also $y = u^3$; $\partial y = 3u^2 \partial u$; auch sey $\frac{16}{9} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = b$, so ist $\partial s = 3u^2 (1 + bu^2)^{\frac{1}{2}} \partial u$. Daraus ist (Integralformel, 69.).

$$s = \frac{3}{4} u^3 (1 + bu^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \int \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{(1 + bu^2)}},$$

Ferner ist (eb. das. 61.),

$$\int \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{(1 + bu^2)}} = \frac{1}{2b} u \sqrt{(1 + bu^2)}$$

$$- \frac{1}{2b} \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1 + bu^2)}}$$

und $\int \frac{\partial u}{\sqrt{(1 + bu^2)}}$,

oder

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{\partial u \sqrt{b}}{\sqrt{(1 + bu^2)}} = \log.(\sqrt{(1+bu^2)} + u\sqrt{b}).$$

Aus diesen Werthen folgt

$$s = \frac{3}{4} \left(u^3 + \frac{1}{2b} u \right) \sqrt{(1 + bu^2)}$$

$$- \frac{3}{8\sqrt{b^3}} \log.(\sqrt{(1 + bu^2)} + u\sqrt{b}),$$

wo die Constante Null ist. Setzt man den Werth für u zurück, so ist

$$s = \frac{3}{4}\left(y + \frac{9}{32}(a^2 y)^{\frac{1}{3}}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{16}{9}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} -$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^4 a \log\left(\sqrt{\left(1 + \frac{16}{9}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} + \frac{4}{3}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right).$$

45. Wenn der Exponent n eine andere Form als die beiden hier betrachteten hat, so ist die Differentialformel für ∂s nicht integrirbar, und das Integral läßt sich auch nicht auf ein logarithmisches bringen. Denn, wenn man $y^{n-1} = u$ setzt, so wird

$$\partial s = \frac{1}{n-1} u^{\frac{-(n-2)}{n-1}} \partial u \sqrt{(1 + n^2 r^2 u^2)},$$ wo

$\frac{n-2}{n-1}$ keine ganze durch 2 theilbare Zahl werden kann,

außer, wenn $n = \frac{2m}{2m - 1}$ ist.

46. Die parabolische Linie, deren Gleichung ist $ax^2 = y^3$, ist die erste, welche rectificirt worden ist, von einem englischen Mathematiker, Wilhelm Neil. Er machte seine Entdeckung, die viel Aufsehens erregte, im Jahre 1657 bekannt. Der Beweis, den er davon gegeben hat, steht in Wallis Abhandlung über die Cykloide und Cissoide, in einem Anhange, Operum, T. I. p. 557. Es ist sehr undeutlich. Eben daselbst befinden sich auch die Beweise von Brouncker und von Wallis selbst. Wallis hatte es als ein Mittel vorgeschlagen, für eine krumme Linie zwey gerade zu finden, zwischen welchen ihre Länge enthalten sey, daß man die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate von dem Unterschiede zweyer Abscissen und Ordinaten, das ist $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, berechnen, und eine Anzahl solcher Wurzeln an dem gegebenen Bogen summiren sollte. Arithm. Infin. Scholion. Prop. 38. Es kann seyn, daß durch diese Bemerkung Neil auf seine Methode der Rectification geführt ist.

Von Hevraet fand um dieselbe Zeit mit Neil die Rectification der Curven auf eine andere und allgemeinere Art. Er bringt die Rectification einer gegebenen Curve auf die Quadratur einer andern. Neil fand, wie Craige bemerkt, (Methodus figurarum p. 30.), nicht die Rectification einer gegebenen Curve, sondern gab eine krumme Linie an, die sich rectificiren läßt. Hevraet gründet seine Rectification auf folgenden Satz. Wenn an einer Curve eine Ordinate sich zu der Normale verhält, wie eine gegebene gerade zu der Ordinate an einer zweyten Curve, so ist die Fläche dieser letztern gleich dem Rechteck von jener gegebenen geraden und einer geraden, die dem Bogen der erstern von einem gegebenen Puncte an gleich ist. Er führt die parabola semicubicalis zum Beyspiele an,

auch die andern absolut rectificabeln Parabeln, und bemerkt, daß die Rectification der gemeinen Parabel von der Quadratur der Hyperbel abhängt. Sein Aufsatz ist der Schootenschen Ausgabe von Cartesii Geometria beygefügt. Zur Erläuterung seiner Methode dient das folgende.

Es ist die Normale an einer Curve A $=$ $\sqrt{\left(y^2 + \left(\frac{y\partial}{\partial x}\right)^2\right)} = \frac{y\partial s}{\partial x}$. An der Curve B sey die Ordinate $= z$, und $y : \frac{y\partial s}{\partial x} = a : z$, also $z = \frac{a\partial s}{\partial z}$, und $z\partial x = a\partial s$. Daher ist die Area der Curve B oder $\int z\partial x = as$.

Huygens schreibt die erste Rectification dem Hevraet zu. Neil habe sie nicht vollständig gekannt. Denn er habe nicht gewußt, daß die von ihm rectificirte Linie den Geometern längst bekannt gewesen war. Er eignet sich einen Antheil an Hevraets Erfindung zu, weil er im Jahre 1657 die Länge der apollonischen Parabel durch die Quadratur der Hyperbel bestimmt, auch Hevraet die zu gleicher Zeit von ihm gefundene Complanation des parabolischen Konoids erfahren habe, wodurch er auf die Ausmessung des parabolischen Bogens habe kommen können. Dieses scheint sehr gesucht zu seyn. (Horolog. oscill. P. III. Prop. 9.)

Um dieselbe Zeit fand Fermat, nach einer ihm eigenen Methode, auch die Rectification der semicubischen Parabel. Sein Aufsatz kam 1650 mit einer Schrift des Jesuiten Lalouere über die Cykloide heraus; ist auch in seinen Werken befindlich. Er sucht das Verhältniß zwischen dem Stück auf einer berührenden von dem Berührungspuncte an bis an den

Durchschnitt mit einer folgenden Ordinatenlinie, und dem zugehörigen Unterschiede der Abscissen. In eben dieser Schrift zeigt er auch, wie durch solche Abschnitte auf den berührenden zwey Gränzen für die länge der Curve gefunden werden.

47. Für die Cissoide ist die Gleichung, $\frac{x^3}{a-x} = y^2$, oder $x\left(\frac{a}{x} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} = y$. Hieraus ist die Differentialgleichung für dieselbe,

$$\partial y = \left(\frac{a}{x} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \partial x$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{a\partial x}{x}.$$

$$= \left(\frac{3a - 2x}{2x}\right)\left(\frac{a - x}{x}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \partial x.$$

Ferner ist

$$\partial s^2 = \left(\frac{(3a - 2x)^2 x}{4(a - x)^3} + 1\right) \partial x^2,$$

$$= \frac{4a^3 - 3a^2 x}{4(a - x)^3} \partial x^2.$$

$$\partial s = \frac{a\partial x}{2(a - x)} \sqrt{\frac{4a - 3x}{a - x}}.$$

Diese Formel zu integriren, setze man nach Integralformel, 48. II. $\frac{4a - 3x}{a - x} = uu$, so ist $4a - auu = 3x - xuu$, oder weil uu größer als 4 ist, $a(uu - 4) = (uu - 3)x$, also $x = \frac{a(uu - 4)}{uu - 3}$; $a - x = \frac{a}{uu - 3}$. Aus der letztern Gleichung folgt etwas leichter als aus dem Werthe von x, daß $\partial x = \frac{2au\partial u}{(uu - 3)^2}$.

Folglich ist $\partial s = \frac{au^2\partial u}{uu-3}$. Da die höchste Potenz von u im Zähler dieselbe ist, wie im Nenner, so sondere man durch die Division einen Theil des Differentials ab, damit der Zähler niedriger als der Nenner werde, nach Integralformel, 35. Es ist

$$\partial s = a\partial u + \frac{3a\partial u}{uu-3},$$

oder

$$\partial s = a\partial u + \frac{3a\partial u}{(u+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})}.$$

Daher ist (Integralformel, 8.),

$$s = au + \frac{a\sqrt{3}}{2}\log.\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}} + \text{Const.}$$

Die Curve fange an für $x = 0$, so ist $u = 2$ für diesen Werth von x, und Const =

$$-2a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\log.\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

Also ist

$$s = a(u-2) + \frac{a\sqrt{3}}{2}\log.\frac{(2+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(u+\sqrt{3})}$$

oder

$$s = a(u-2) + a\sqrt{3}\,.\log.\frac{(2+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})}{\sqrt{(u^2-3)}}.$$

Setzt man für u seinen Werth durch x, so wird der Bogen unmittelbar durch die Abscisse erhalten. Für $x = \frac{1}{2}a$ ist s der innerhalb des Quadranten enthaltene Bogen der Cissoide, und $u = \sqrt{5}$. Also ist dieser Bogen

$$= a(\sqrt{5}-2) + a\sqrt{3}\,.\log.\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}.$$

Newtons künstliche Construction sehe man nach in desselben Methodus flux et ser. infin Probl. XII. exempl. 5. Sie gewährt aber nicht die Übersicht wie die Rechnungsformel.

48. Für die logarithmische Linie ist die Subtangente eine beständige Linie, oder es ist $\frac{y\partial x}{\partial y} = a$. Daraus

$$\partial s = \partial y \surd\left(1 + \frac{aa}{yy}\right) = \frac{\partial y \surd(aa + yy)}{y}.$$

Die Integration giebt

$$s = \surd(aa + yy) + a^2 \int \frac{\partial y}{y \surd(aa + yy)},$$

und

$$\int \frac{\partial y}{y \surd(aa + yy)} = \frac{1}{a} \log . \frac{\surd(aa + yy) - a}{y}.$$

Also ist

$$s = \surd(aa + yy) + a \log . \frac{\surd(aa + yy) - a}{y} + C.$$

In dem Anfange des Bogens sey die Ordinate $= b$, so ist

$$\text{Const.} = -\surd(aa + bb) - a \log . \frac{\surd(aa + bb) - a)}{b}.$$

49. So wie die Rectification des Kreises von keiner andern krummen Linie abhängt, so hängt auch die Rectification der logarithmischen Linie blos von ihr selbst ab.

50. Eine gegebene gerade Linie bewege sich innerhalb eines rechten Winkels so, daß sie mit ihren Endpuncten die Schenkel desselben treffe, so ist die

chen Bogen, die in vier Spitzen zusammenlaufen. Die Curve in (45.) eben so.

52. Die Rectification der Cykloide und der Epicykloide ist bey diesen Linien vorgetragen. Die Cykloide ist gleich nach der semicubischen Parabel von Wren rectificirt worden.

53. Die Rectification einer sphärischen Epicykloide (Th. II. S. 129.) hängt von der Quadratur der Hyperbel ab. Hermann glaubte, daß sie absolut rectificabel sey. Comm. vet. Ac. Petr. T. I. p. 215. Er hatte sich übereilt. Joh. Bernoulli zeigte den Fehler in einer Abhandlung über diese Epicykloide, Opp. T. III. p. 216. Euler hat in den Comm. nov. Petrop. die Bedingungen angegeben, welche die Rectification einer Curve auf der Kugelfläche voraussetzt.

54. Beyspiele von Rectificationen, wo die Ordinaten aus einem Puncte ausgehen, in den Artikeln: Conchoide und Spirale.

Allgemeine Annäherungsmethode.

55. Lambert hat in dem zweyten Theile seiner Beyträge zur Mathematik eine Annäherungsformel für die Länge eines Bogens angegeben. Es sey AM (Fig. 23.) ein Bogen einer Curve, an welcher in A und M die berührenden AT, MT gezogen sind. Auf AT, der verlängerten, nehme man die Abscissen, und ziehe MP darauf senkrecht, ziehe auch die Chorde AM, so ist nahe der Bogen $AM = \frac{1}{3}(AT + TM + 2AM)$

Es ist nämlich, wenn $AP = x$, $PM = y$ gesetzt wird, die Chorde $AM = \sqrt{(xx + yy)}$; die Subtan-

tangente PT $= \frac{y\partial x}{\partial y}$; das Stück AT $= x - \frac{y\partial x}{\partial y}$;

die berührende TM $= y \sqrt{\left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2} + 1\right)}$; und der

Bogen AM $= \int \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}$. Diese Werthe entwickele man nach dem binomischen Lehrsatze. Dann nehme man für die Curve die allgemeine Gleichung, $y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 +$ etc., wo die Glieder, wie $A + Bx$, nicht vorhanden sind, weil $y = 0$ für $x = 0$ ist, und weil die Abscissenlinie zugleich eine berührende ist. Denn dadurch ist der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x = 0$ auch $= 0$. Aus dieser Gleichung wird der Werth des Bogens AM hergeleitet. Vergleicht man diesen mit den Werthen von AT, TM, AM (der Chorde), so ergiebt sich die angegebene Formel. Nur ist noch nöthig, aus der gegebenen Gleichung zwischen andern Coordinaten die Werthe von AT, MT und AM herzuleiten.

56. Ein Bogen einer krummen Linie läßt sich auch mit einem Bogen eines Kreises vergleichen. Euler hat dieses gezeigt, in einer Abhandlung de reductione linearum curvarum ad arcus circulares. Comm. Nov. Ac. Petrop. T. II. Es sey (Fig. 24.) AB eine krumme Linie, MN ein Bogen derselben, an welchen in M und N die berührenden MT, NT gezogen sind, und die Normalen MP, NP, welche sich in P schneiden. Man ziehe noch die Chorde MN, so ist Bogen MN $>$ Chorde MN und $<$ MT + TN. Es sey MP $= p$, PN $= q$, der Winkel MPN, die Amplitude des Bogens MN, $= v$, so ist

$$MN = \sqrt{(p^2 + q^2 - 2pq \cos v)}$$

Q

die eingeführte Größe wegschaffen, wodurch eine Gleichung zwischen x und y erhalten wird.

58. Euler hat zuerst allgemeine Formeln für die Rectification angegeben, eine, worin zwey unbestimmte Differentialfunctionen einer dritten veränderlichen Größe enthalten sind, und eine noch allgemeinere, die aus dreyen besteht, in den ältern Petersburger Commentarien, T. V. a. a. 1730. 31. Die Analysis hat er nicht beygefügt.

59. Die Coordinaten der rectificabeln Linie seyn x, y, der zugehörige Bogen, s, so ist $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Man setze $\partial y = p\partial x$, so ist $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + p^2)}$. wobey angenommen werde, daß ∂s und ∂x gleichnamig seyn, oder daß der Bogen mit den positiven Abscissen zugleich zunehme. Der allgemeine Ausdruck für die Ordinate ist $y = \int p\partial x$, oder $y = px - \int x\partial p$, (Th. II. S. 783.). Eben so ist

$$s = x\sqrt{(1 + p^2)} - \int \frac{xp\partial p}{\sqrt{(1 + p^2)}}.$$

Die beiden Integralformeln sehe man als Functionen einer dritten veränderlichen Größe u an, und setze

$$\int x\partial p = P; \int \frac{xp\partial p}{\sqrt{(1 + p^2)}} = Q; \text{ so ist}$$

$$x = \frac{\partial P}{\partial p}; \; y = px - P; \quad s = x\sqrt{(1 + p^2)} - Q,$$

wo die Constante noch zu bestimmen ist, damit s für einen gewissen Werth der Abscisse anfange.

Da $x\partial p = \partial P$, und $\frac{xp\partial p}{\sqrt{(1 + p^2)}} = \partial Q$ ist, so ist $p\partial P = \partial Q\sqrt{(1 + p^2)}$, folglich $p = \frac{\partial Q}{\sqrt{(\partial P^2 - \partial Q^2)}}$. Nimmt man nun für P und

Q zwey Functionen von u an, so wird p durch u gegeben, folglich auch ∂p, und daraus erstlich x durch dieselbe u, ferner auch y durch die Gleichung $y = px - P$. Aus den Werthen von x und y wird die Größe u weggeschafft, so ergiebt sich die Gleichung zwischen x und y, und daraus die Formel für den Bogen s, oder auch mittelbar aus der Gleichung, $s = x\sqrt{(1 + p^2)} - Q$.

In diesem allgemeinen Schema der Rechnung sind alle Größen als positive angenommen.

60. Exempel I. Es sey $P = u$; $Q = \frac{u^2}{2a}$; so ist $\partial P = \partial u$; $\partial Q = \frac{u\partial u}{a}$; $p = \frac{u}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$; $\partial p = a^2 (a^2 - u^2)^{-\frac{3}{2}} \partial u$; $x = \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$; $y = -\frac{u^3}{a^2}$. Die Gleichung für die rectificable Curve ist nun, $a^4x^2 = (a^2 - (a^2y)^{\frac{2}{3}})^3$, oder $ax^2 = (a - a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}})^3$, oder $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Dieses ist die Gleichung für die in (45.) schon rectificirte Linie. Es folgt daraus, mittelst der Differentialformel, $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, der Bogen $s = \frac{3}{2}(ax^2)^{\frac{1}{3}} + C$; oder $s = \text{Const.} - \frac{3}{2}(ay^2)^{\frac{1}{3}}$.

Die Formel, $s = x\sqrt{(1 + p^2)} - Q$, giebt den veränderlichen Theil eben so. Es ist $1 + p^2 = \frac{a^2}{a^2 - u^2}$, also $s = \frac{a^2 - u^2}{a} - \frac{u^2}{2a} = a - \frac{3u^2}{2a}$.

Da $u^2 = a^2 - (a^4 x^2)^{\frac{1}{3}}$, so ist $s = \frac{3}{2}(ax^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}a$. Oder, da $u = -(a^2 y)^{\frac{1}{3}}$, und $u^2 = (a^4 y^2)^{\frac{1}{3}}$ ist, so ist $s = a - \frac{3}{2}(ay^2)^{\frac{1}{3}}$. In beiden Werthen sind noch die Constanten zu bestimmen.

Man bemerke, daß die eingeführte Hülfsgröße u einen negativen Werth hat, damit y positiv und p negativ seyn könne, letzteres, weil die Veränderungen von x und y entgegengesetzter Beschaffenheit sind.

61. Exempel II. Es sey $P = \frac{u^2}{2a}$; $Q = u$; so ist $\partial P = \frac{u\partial u}{a}$; $\partial Q = \partial u$; $p = \frac{a}{\sqrt{(u^2 - a^2)}}$;

$$\partial p = -\frac{au\partial u}{(u^2 - a^2)^{3:2}}.$$

Hieraus wird $x = -\frac{(u^2 - a^2)^{3:2}}{a^2}$. Da dieser Werth negativ ist, die Abscissen einer Curve aber immer positiv genommen werden mögen, so gebe man der Wurzelgröße p das Vorzeichen $-$, nehme also

$$p = -\frac{a}{\sqrt{(u^2 - a^2)}}; \quad \partial p = +\frac{au\partial u}{(u^2 - a^2)^{2:3}};$$

daher

$$x = \frac{(u^2 - a^2)^{3:2}}{a^2}; \quad y = -\frac{u^2 - a^2}{a} - \frac{u^2}{2a} = -\frac{3u^2}{2a} + a.$$

Daraus ist

$$(a^4 x^2)^{\frac{1}{3}} + a^2 = u^2, \text{ und } \frac{2a}{3}(a - y) = u^2,$$

so daß die Gleichung für die rectificable Curve ist

$(ax^2)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}(a + 2y)$, oder $27\,ax^2 = -(a + 2y)^3$. Es muß also y negativ und absolut genommen größer als $\frac{1}{2}$ a seyn. Die krumme Linie ist die Neilische Parabel, (s. Parabeln höherer Ordnungen.). Sie liegt mit beiden Zweigen auf der Seite der negativen y, und die Spitze hat den Abstand $-\frac{1}{2}$ a von der Abscissenlinie in dem Anfangspuncte der Abscissen.

Aus der Gleichung für die Curve folgt vermittelst der Differentialformeln, $\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}$, oder $\partial s = -\partial y \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)}$, der Bogen

$$s = \sqrt{\frac{(a + (ax^2)^{\frac{1}{3}})^3}{a}} + \text{Const. oder}$$

$$s = \sqrt{\frac{8}{27} \cdot \frac{(a - y)^3}{a}} + \text{Const.}$$

Denn es ist $a^{\frac{1}{3}}\, x^{-\frac{1}{3}}\, \partial x = -\partial y$, also

$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{a^{2:3}}{x^{2:3}}$, und $\frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{x^{2:3}}{a^{2:3}} = -\frac{(a + 2y)}{3a}$.

Also ist erstlich $\partial s = x^{-\frac{1}{3}}\,(a^{2:3} + x^{2:3})^{\frac{1}{2}}\,\partial x$, daher

$$s = (a^{2:3} + x^{2:3})^{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{\frac{(a + (ax^2)^{\frac{1}{3}})^3}{a}} + C.$$

Zweytens $\partial s = -\partial y \sqrt{\frac{2a - 2y}{3a}}$; daraus

$$s = \sqrt{\frac{8}{27} \cdot \frac{(a - y)^3}{a}} + C.$$

Die Formel $s = x\sqrt{(1 + p^2)} - Q$ anzuwenden, bemerke man, daß, da p das Vorzeichen geändert hat, es Q auch ändern muß. Dadurch ist;

$$s = + \frac{(u^2 - a^2)u}{a^2} + u = \frac{u^3}{a^2}, \text{ das ist,}$$

$$s = \frac{\sqrt{(a^2 + a(ax^2)^{1:3})^3}}{a^2} = \frac{\sqrt{(a + (ax^2)^{1:3})^3}}{\sqrt{a}},$$

wie vorher.

Hätte man angenommen $P = -\frac{u^3}{2a}$, und $Q = u$, so wird die Gleichung für die Curve, $27ax^2 = (2y - a)^3$. Setzt man $P = b - \frac{u^2}{2a}$, so ist die Gleichung, $27ax^2 = (2y + 2b - a)^3$.

62. In den Nov. Act. Petrop. T. III. giebt Euler zur Erfindung rectificabler Curven folgende Formeln an:

$$x = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi - v \cos \varphi$$

$$y = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi + v \sin \varphi$$

$$s = \int v \partial \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

wo man für v eine solche Function von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$, für welche das Integral $\int v \partial \varphi$ den Bogen φ nicht enthält, die aber sonst beliebig ist, zu nehmen hat. Diese Formeln sind, bis auf die Vorzeichen von x dieselben, welche Lagrange in dem Calcul des Fonctions. Leç. XIX. zu eben dem Zwecke findet.

Setzt man z. B. $v = a \sin \varphi \cos \varphi$, so wird

$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = a(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)$, also

$$x = a\sin\varphi(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)$$
$$- a\sin\varphi\cos\varphi^2 = - a\sin\varphi^3,$$
$$y = a\cos\varphi(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)$$
$$+ a\sin\varphi^2\cos\varphi = a\cos\varphi^3,$$

woraus zwischen x und y die Gleichung $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ hervorgeht. Der Bogen s wird $= a\cos\varphi^2 - \frac{1}{2}a\sin\varphi^2 = a - \frac{3}{2}a\sin\varphi^2 = a - \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \text{Const.} = -\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$, wenn s und x zugleich verschwinden. Der negative Werth des Bogens zeigt bloß, daß er nach der entgegengesetzten Richtung von der, nach welcher die positiven x genommen werden, gerechnet ist. Nimmt man die negativen x zu positiven, so wird auch s positiv. Alles wie in (50).

Vergleichungen irrectificabler Curven.

63. Eine Curve, die nicht rectificabel ist, mag dennoch so beschaffen seyn, daß darauf Bogen genommen werden können, deren Unterschied einer geraden Linie gleich ist, oder deren Verhältniß einem gegebenen gleich ist. Die Untersuchung über die Formen solcher krummen Linien gehört zu den feinsten in der analytischen Geometrie. Es ist eine Gattung von unbestimmter Analytik in der Rechnung des Unendlichen, worin der Gang der Beweise von dem gewöhnlichen verschieden ist, Johann Bernoulli fand, daß die gemeine Parabel beide dieser Beschaffenheiten hat. Opp. T. I. p. 242. Von der erstern zeigt er es nur an, die andern erweiset er durch eine künstliche geometrische Verbindung der Parabel mit der gleichseitigen Hyperbel. Seine Methode ist also eine ganz eingeschränkte.

Auch behauptet er, daß die Differential-Methode hier nicht helfen könne. Die Parabel gewährt den leichtesten Fall, weil der Bogen eine algebraische und logarithmische Function der Absciſſe iſt. Auch entdeckte er, daß an der Parabel, deren Gleichung iſt $a^2x = y^3$, ſich Bogen angeben laſſen, deren Unterſchied eine algebraiſche Function iſt. Dieſes gründet ſich darauf, daß mit jeder paraboliſchen Linie eine andere dieſer Gattung verbunden werden kann, ſo daß zwey Bogen von dem gemeinſchaftlichen Scheitel an eine rectificable Summe ausmachen, die gemeine mit der cubiſch-biquadratiſchen deren Gleichung iſt $ax^3 = y^4$ (Opp. T. I. p. 249). Die Coordinaten der einen Linie ſeyn x, y, der andern $t = \frac{x\partial y^3}{\partial x^3}$, und $u = \frac{3x\partial y^2}{2\partial x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{\partial y^2}{\partial x}$, wo die Integration vorausgeſetzt wird, ſo iſt die Summe der zugehörigen Bogen $= \frac{x(\partial x^2 + \partial y^2)^{3:2}}{\partial x^3}$. In dem Falle, daß an einer gegen die Abſciſſenlinie concaven Curve $3x\partial^2 y$ größer als $\partial x\partial y$ iſt, giebt jene Formel den Unterſchied der beiden Bogen.

64. L'Hopital hat die Aufgabe von den vergleichbaren paraboliſchen Bogen durch eine geometriſche Analyſis mittelſt hyperboliſcher Flächenräume aufgelöſet. Sect. coniques. p. 382.

65. Tſchirnhauſen behauptete in den Actis Erud. Nov. 1695., daß er eine allgemeine Methode entdeckt hätte, auf jeder Curve zu jedem Bogen einen andern anzugeben, der zu jenem ein gegebenes Verhältniß habe. Den Beweis hat er aber nicht liefern können.

66. Hermann legte in den Actis Erud. 1719 eine Aufgabe vor, welche damahls den Geometern viele Beſchäftigung gab, nämlich eine krumme Linie

zu finden, deren Länge durch eine Formel dargestellt würde, welche die Quadratur einer gegebenen Linie enthielte, nebst einer oder mehrern algebraischen Functionen. Nicolaus Bernoulli lösete die Aufgabe nur mit gewissen Einschränkungen auf, A. Er. 1720. Hermann gab seine Auflösung daselbst 1723 und Joh. Bernoulli theilte die seinige daselbst 1724 mit. Diese waren aber noch sehr indirect. Euler war der erste, der zu einer directen Auflösung den Weg zeigte, in den neuen Petersb. Commentarien, T. V. in der Abhandlung de methodo Diophanteae analoga in Analysi Infinitorum.

67. Als Fagnani im Jahr 1718 gefunden hatte, daß auch auf der Ellipse und Hyperbel sich Bogen angeben lassen, deren Unterschied eine algebraische Function ist, so suchte Euler eine bequemere Auflösung und Construction der Aufgabe, solche Bogen zu finden. Comm. novi Petrop. T. VI. Für die Lemniscata fand er allgemeinere Vergleichungen der Bogen als Fagnani entdeckt hatte, (s. Lemniscata). Dieses veranlaßte ihn, Vergleichungen ähnlicher Integralformeln anzustellen, zuerst dieser, $\frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(1 - y^4)}}$, woraus er die Integration allgemeinerer Gleichungen herleitete. Von jener ist die Integralgleichung, $xx + yy + ccxxyy = cc + 2xy\sqrt{(1 - c^4)}$. Eine Probe von Integrirungen dieser Art ist in dem Artikel, Integralgleichung, 47., mitgetheilt. Die Untersuchung scheint eine Zeitlang eine Lieblingsbeschäftigung von Euler gewesen zu seyn, und erforderte auch einen solchen Meister in schicklichen Transformationen.

66. Da die Methode, deren Fagnani sich bedient hatte, auf Substitutionen beruhte, welche gleichsam aufs Gerathewohl unternommen waren, und die vorher angeführte, von Euler angewandte, auch von dieser Be-

schaffenheit, aber weniger eingeschränkt war, so nahm dieser scharfsinnige Analyst einen andern Weg, der demjenigen ähnlich ist, auf welchem man manche Integrale findet, nämlich durch die Vergleichung der vorgegebenen Differentiale mit denen, die aus den Relationen endlicher Größen gefunden sind. Er hatte dieses Verfahren schon bey der Integration der gleich vorher angeführten Differentialgleichung gebraucht. Drey Abhandlungen über diese Materie sind in den Comm. nov. Petr. T. VII. enthalten. In der ersten (der Stelle nach der zweyten, p. 83.) zeigt Euler, daß zwey ähnliche transscendente Integrale von der Form $\int \frac{\partial x\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A + Cx^2)}}$ einen gewissen algebraischen Unterschied haben, und macht davon die Anwendung, auf die Vergleichung von Bogen eines Kreises und der Parabel, um den Geist dieser Methode zu zeigen. Auch wird nach dieser directen Methode eine von Huygens schon aufgelösete Aufgabe behandelt, einen Kreis anzugeben, dessen Area der Summe der Räume der Oberflächen eines gedruckten Sphäroids und eines hyperbolischen Konoids gleich ist. Sie wird auf Segmente des Sphäroids erweitert.

69. In der zweyten Abhandlung (p. 3.) zeigt Euler, wie der algebraische Unterschied zweyer ähnlichen Integrale von der Form $\int \frac{\partial x\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^2\ \mathfrak{C}x^4)}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}}$ beschaffen ist. Es verschwindet derselbe, wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ beide $= 0$ sind. Die Constante ist hier eine Größe eben der Art wie die Integrale. Euler macht davon die Anwendung auf die Ellipse, um auf derselben von irgend einem Puncte einen Bogen abzuschneiden, der von einem gegebenen Bogen oder dessen Vielfachen um eine geometrische Größe verschieden sey, und einen Bogen anzugeben, der zu einem gegebenen Bogen ein

bestimmtes Verhältniß habe. Dieses muß sich auch auf die Hyperbel anwenden lassen.

70. In einer dritten Abhandlang daselbst p. 128. giebt Euler die geometrische Construction zweyer Aufgaben, die er in den Act. Erud. 1754 vorgelegt hatte, erstlich, irgend eine Hälfte des elliptischen Umfanges so zu theilen, daß der Unterschied der Theile geometrisch darstellbar sey, zweytens, auf einem elliptischen Quadranten zwischen den Scheiteln der Axen einen Bogen anzugeben, der die Hälfte des Quadranten sey. Dazu setzt er die noch schwerere Aufgabe, auf einer Ellipse einen Bogen zu bestimmen, welcher der dritte Theil des ganzen Umfanges ist. Die erste Aufgabe hat Bossüt aufgelöset, in den Mém. présentés, T. III. allein auf eine indirecte Art durch eine Art von Versuch. Man sehe auch dessen Calcul intégral, P. I. Ch. 10.

71. In dem XII. Bande der neuen Petersburger Commentarien machte Euler die Untersuchung noch allgemeiner. Er zeigte, daß auf Curven, deren Bogen durch die Formel,

$$\int \frac{\mathfrak{A} \partial z}{\sqrt{(A + 2Bz + Cz^2 + 2D^3z^3 + Ez^4)}},$$

ausgedrückt werden, von irgend einem Puncte ein Bogen abgeschnitten werden kann, der einem gegebenen Bogen gleich ist; und daß auf Curven, deren Bogen den Werth,

$$\int \frac{\partial z (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^4)}{\sqrt{(A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4)}}$$

haben, zu jedem gegebenen Bogen von irgend einem Puncte aus ein Bogen gefunden werden kann, der von jenem, oder einem Vielfachen desselben, um eine geometrisch angebbare Größe unterschieden ist.

72. Euler verfolgte diese Untersuchung immer

75. Da die Vergleichung irrectificabler Bogen eine so sehr bearbeitete Aufgabe ist, so werden ein paar Beyspiele nicht fehlen dürfen. An der Parabel ist die Sache leicht, wie vorher bemerkt ist, wiewohl Joh. Bernoulli eine sehr umständliche Construction und Rechnung dazu gebraucht, und sich noch wundert, daß die Rechnung nicht verwickelter geworden sey.

76. Es sey an der Parabel <AMN (Fig. 11.) $PM = y$, $QN = z$, so ist (36). der Bogen

$$MN = \frac{z}{2a}\sqrt{(aa + 4zz)} - \frac{y}{2a}\sqrt{(aa + 4yy)}$$

$$+ \frac{1}{4} a \log \frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y}.$$

Ein paar andere gegebene Ordinaten seyn p, q, so ist der zwischen ihnen befindliche Bogen

$$= \frac{q}{2a}\sqrt{(aa + 4qq)} - \frac{p}{2a}\sqrt{(aa + 4pp)}$$

$$+ \frac{1}{4} a \log \frac{\sqrt{(aa + 4qq)} + 2q}{\sqrt{(aa + 4pp)} + 2p},$$

Setzt man die beiden logarithmischen Größen einander gleich, so ist der Unterschied der beiden parabolischen Bogen eine algebraische Function der Ordinaten p, q, y, z. Dieses wird erhalten, wenn

$$\frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y} = \frac{\sqrt{(aa + 4qq)} + 2q}{\sqrt{(aa + 4pp)} + 2p}$$

gemacht wird, wodurch zu jeder Ordinate y die zugehörige z gefunden werden kann.

77. Man kann auch den beiden Bogen irgend ein Verhältniß $n : 1$ geben. Zur Abkürzung sey der zweyte, durch p, q gegebene Bogen $= f + \frac{1}{4} a \log k$ so ist

$$\frac{z}{2a}\sqrt{(aa + 4zz)} - \frac{y}{2a}\sqrt{(aa + 4yy)}$$

$$+ \frac{1}{4} a \log. \frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z)}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y}$$

$$= nf + \frac{1}{4} na \log. k.$$

Setzt man den algebraischen Theil auf beiden Seiten der Gleichung gleich groß, und den logarithmischen gleichfalls, so erhält man zwey Gleichungen für y und z, woraus diese unbekannten Größen bestimmt werden.

Die Gleichheit der beiden logarithmischen Größen giebt, wenn man statt der Logarithmen ihre zugehörigen Zahlen nimmt,

$$\frac{\sqrt{(aa + 4zz)} + 2z}{\sqrt{(aa + 4yy)} + 2y} = k^n,$$

da $n \log k = \log k^n$ ist.

78. Die Vergleichung der elliptischen Bogen ist schwieriger, weil für diese keine algebraische Werthe statt finden. Man muß hier Substitutionen versuchen, durch welche die Differentiale zweyer Bogen ein integrirbares Aggregrat geben.

Es sey die halbe große Axe $= 1$, die Excentricität $= e$, die Abscisse aus dem Mittelpuncte $= x$, der zugehörige Bogen $= s$, so ist (8.)

$$\partial s = \partial x \sqrt{\frac{1 - e^2x^2}{1 - x^2}}, \text{ oder}$$

$$\partial s = \frac{(1 - e^2x^2)\,\partial x}{\sqrt{(1 - (1 + e^2)\,x^2 + e^2 x^4)}}.$$

Man setze $1 - e^2 x^2 = u^2$, so ist durch gehörige Verwandlungen für x und ∂x,

$$\partial s = - \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{((2 - e^2)\,u^2 - u^4 - (1 - e^2))}}.$$

Man suche eine Ergänzung zu diesem Differential, damit das Aggregat integrirbar sey. Es ist das Differential von $\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}$

$$= \frac{((2-e^2)u-2u^3)\partial u}{\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}},$$

und das Differential von

$$\frac{\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}}{u}$$

$$= \frac{(1-e^2-u^4)\partial u}{u^2\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e))}}.$$

Es erhellt nun, daß die gesuchte Ergänzung ist

$$+\frac{(1-e^2)\partial u}{u^2\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}}.$$

Dieses Differential hat auch dieselbe Form, wie das für ∂s. Man hat nur statt u^2 zu setzen $\frac{1-e^2}{u^2}$, also $-\frac{\partial u\sqrt{(1-e^2)}}{u^2}$ statt ∂u, so verwandelt sich jenes Differential in diese Ergänzung.

Man nehme nun eine Absciffe y so, daß $1-e^2y^2 = \frac{1-e^2}{u^2}$, und setze den dazu gehörigen Bogen = s', so ist

$$\partial s' = \frac{(1-e^2)\partial u}{u^2\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}}.$$

Die Summe der beiden Differentiale ist

$$\partial s + \partial s' = \frac{(1-e^2-u^4)\partial u}{u^2\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}},$$

und das Integral

$$s + s' = \text{Const.} + \frac{\sqrt{((2-e^2)u^2-u^4-(1-e^2))}}{u}.$$

Es ist $x^2 = \frac{1 - u^2}{e^2}$; und $y^2 = \frac{u^2 - 1 + e^2}{e^2 u^2}$;

daher $x^2 y^2 = \frac{(2 - e^2) u^2 - u^4 - (1 - e^2)}{e^4 u^2}$.

Also ist $s + s' = \text{Const.} + e^2 xy$. Nimmt man $x = 0$, so ist $s = 0$. und $u = 1$; daher $y = 1$, und $s' =$ dem elliptischen Quadranten. Diesen bezeichne man durch Q, so ist $s + s' = Q + e^2 yx$, oder $s - (Q - s') = e^2 xy$. Hier sind s und $Q - s'$ elliptische Bogen, deren jener an dem Scheitel der kleineren Axe, dieser an dem Scheitel der größeren anfängt.

Die hier gegebene Auflösung ist der in Bossuts Integralrechnung, Th. I. §. 499. ähnlich; doch ist bey der gegenwärtigen der Weg gezeigt, auf welchem man zu derselben gelangen möge.

Henry hat gefunden, daß der Punct, an welchem die bis an beide Axen verlängerte Berührungslinie so groß ist, als die halbe Summe der Axen, den elliptischen Quadranten so theilt, daß der Unterschied der beiden Stücke dem halben Unterschiede der Axen gleich ist. Mon. Corr. B. XXVIII. S. 260. An jenem Puncte ist nämlich, wie sich sogleich ergiebt, $x = y$, daher $u^2 = b$, und $x^2 = y^2 = \frac{1 - b}{e^2}$, mithin $s - (Q - s') = e^2 . \frac{1 - b}{e^2} = 1 - b$. Man sehe auch die Zeitschrift für Astron. B. III. 98 ff.

79. Die in (48.) angeführte krumme Linie sey BMC (Fig. 25.), die der Länge nach gegebene gerade Linie zwischen den Schenkeln des rechten Winkels A sey DE, und berühre die Curve in M, zu welchem Puncte die Coordinaten seyn AP, PM. Es sey DE $= a$, AP $= x$; PM $= y$, der Bogen BM $= s$. Da PE die Subtangente auf AC ist, in der-

selben Richtung wie die Abscisse, so ist $PE = -\frac{y\partial x}{\partial y}$ und $ME = \sqrt{(PM^2 + PE^2)} = -y\sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)} = -\frac{y\partial s}{\partial y}$, da $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$ ist. Man ziehe MQ senkrecht auf AB, so ist $QD = -\frac{x\partial y}{\partial x}$, und $MD = x\sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)} = +\frac{x\partial s}{\partial x}$. Folglich ist $a = \frac{x\partial s}{\partial x} - \frac{y\partial s}{\partial y}$. Das Negationszeichen verwandelt in dieser Rechnung die negativen Differentialquotienten in absolute.

Die gefundene Gleichung werde differentiirt, wobey das Differential des Bogens, ∂s, unveränderlich genommen werde, so ist

$$0 = \frac{\partial x^2 - x\partial^2 x}{\partial x^2} - \frac{\partial y^2 - y\partial^2 y}{\partial y^2},$$

das ist, $0 = \frac{y\partial^2 y}{\partial y^2} - \frac{x\partial^2 x}{\partial x^2}$.

Da ∂s unveränderlich genommen ist, so ist $\partial.\,\partial x^2 + \partial y^2) = 0$, und $0 = \partial x\partial^2 x + \partial y\partial^2 y$. Dadurch ist $0 = x\partial y^3 + y\partial x^3$, oder $\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Das Integral dieser Gleichung ist $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Denn die Gleichung $x^m + y^m = c^m$ differentiirt giebt $mx^{m-1}\partial x + my^{m-1}\partial y = 0$, das ist $\frac{\partial y}{\partial x}$

$= -\left(\frac{x}{y}\right)^{m-1} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1-m}$. Die Vergleichung mit der gegebenen Gleichung zeigt, daß $1 - m = \frac{1}{3}$, also $m = \frac{2}{3}$ ist. Die Constante c ist a. Denn wenn der eine Endpunct der Linie DE in A fällt, so liegt der andere in B oder in C, so daß AB und AC = DE sind.

Auch ohne ein Differential constant zu setzen, kann man die Rechnung auf folgende Art anstellen. Es sey AE = t, AD = u, so ist $t^2 + u^2 = a^2$. Daher $t\partial t + u\partial u = 0$, und $\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{u}{t}$. Nun ist $t = x - \frac{y\partial x}{\partial y}$, und $u = y - \frac{x\partial y}{\partial x}$, wo das Negationszeichen die zugehörigen Größen additiv macht.

Daraus ist, nach einer leichten Reduction,

$$\partial t = \frac{y\partial x\partial^2 y - y\partial y\partial^2 y}{\partial y^2},$$

$$\partial u = \frac{x\partial y\partial^2 x - x\partial x\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Also ist $-\frac{\partial t}{\partial u}$ oder $\frac{u}{t} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial y^2}$. Man setze $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, so ist $t = x - \frac{y}{p}$; $u = y - px$, und $\frac{p(y - px)}{px - y} = \frac{y}{ppx}$, das ist $-p = \frac{y}{ppx}$, oder $-p^3 = \frac{y}{x}$, und $\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ wie vorher.

Joh. Bernoulli handelt von dieser krummen Linie in einem Aufsatze über die Brennlinie, Opp. T. I. p. 57., und in den Lect. Hosp. T. III. p. 447. Seine Methoden sind von der hier angewandten ganz verschieden.

80. Die Rectification gedoppelt krummer Linien hat große Schwierigkeit. Auf einem rechtwinklichten Kegel, dessen Seite ein rationales Verhältniß zu dem Durchmesser der Grundfläche hat, lassen sich unzählig viele krumme Linien geometrisch beschreiben, die sich rectificiren lassen. Dieses zeigt Euler in den Actis Petrop. T. V. P. I. p. 60.

Recurrens series, s. rücklaufende Reihe.

Reduction ist überhaupt die Verwandlung einer Größe in eine andere, oder eine Vertauschung. In der gemeinen Arithmetik geschieht sie bey der Verwandlung einer ganzen Zahl in einen Bruch, eines Bruches in einen andern gleichgültigen; bey der Verwandlung der Glieder eines Verhältnisses in andere, bey der Umtauschung kleinerer Einheiten in größere, oder umgekehrt, als bey Münzsorten und Gewichten.

Reduction einer Gleichung oder eines analytischen Ausdrucks ist, wenn dieser auf die einfachste Form gebracht wird, durch Aufheben der gleichen Größen mit entgegengesetzten Vorzeichen, durch Weglassung des gemeinschaftlichen Factors in dem Zähler und Nenner eines Quotienten, durch Absonderung eines Factors, oder auch durch Entwickelung eines Products, u. d. g.

Eine Figur in eine ähnliche, gewöhnlich kleinere, verwandeln, heißt auch sie reduciren. Wegen des Gebrauchs des Proportionalzirkels zu diesem Zwecke heißt dieser auch ein Reductionszirkel, compas de proportion; insbesondere nach der Byrgischen Einrichtung.

Ein Integral auf ein anderes reduciren, heißt, jenes durch dieses angeben. So wird ein nicht algebraisches oft auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel gebracht.

In der angewandten Geometrie wird ein Win-

kel, dessen Schenkel nicht horizontal sind, auf einen mit horizontalen Schenkeln, in den verticalen Ebenen durch jene reducirt. Ein Winkel, dessen Scheitel außerhalb eines angewiesenen Punctes hat genommen werden müssen, wird in denjenigen verwandelt, der an diesem Puncte würde gefunden seyn. In der Astronomie kommen sehr häufig Reductionen des Ortes eines Beobachters auf einen andern vor, als von der Sonne auf die Erde, und umgekehrt; von dem Mittelpuncte der Erde auf ihre Oberfläche und von dieser auf jenen; daher dann der Ort des beobachteten Weltkörpers ebenfalls eine Reduction leidet. Die Länge eines Planeten in seiner Bahn wird auf die zugehörige Länge längs der Ekliptik reducirt.

Redundans hyperbola begreift in Newtons Enumeratione linearum tertii ordinis alle diejenigen Curven, welche drey geradlinichte Asymptoten, von welchen keine parallel sind, haben, s. krumme Linien der zweyten Classe.

Reesische Rechnungsregel, s. Verhältnisse.

Regel, arithmetische, ist jede Vorschrift, aus gegebenen Zahlen die unbekannte herzuleiten. Insbesondere giebt man sie einigen, die sich durch ihre Wichtigkeit oder größere Feinheit auszeichnen.

Von diesen besonders benannten Regeln sind einige in einzelnen Artikeln dieses Werks abgehandelt, als die Alligationsregel, oder die Regel der Beschickung, die Regel der Gesellschaftsrechnung, die Kettenregel. Die Regel de Tri, die Regel Multiplex (Conjointe), de Quinque, die Reesische und die Basedowische Regel, kommen in dem Artikel, Verhältniß, vor. Die Regel Coß bedeutet bey den ältern Arithmetikern die Algebra. Der gegenwärtige Artikel ist für die Regel Cöri und Regula Falsi bestimmt.

Die Regel Cöci.

1. Die Regel Cöci oder Zekis, auch Blindrechnung, Regula virginum, Regula potatorum genannt, betrifft eine Aufgabe aus der unbestimmten Analytik, nämlich eine gegebene Zahl in drey oder mehr Theile so zu theilen, daß, wenn jeder dieser Theile mit einer gegebenen Zahl multiplicirt wird, die Summe der Producte eine gegebene Zahl sey.

2. Aufgaben dieser Art würden unendlich viele Auflösungen zulassen, wenn man für die gesuchten Theile auch gebrochne und negative Werthe gestattete. Man schränkt sie aber auf positive ganze Zahlen ein. Dadurch wird auch die Anzahl der Antworten eingeschränkt. Zur vollständigen Auflösung wird noch erfordert, daß die Anzahl aller Antworten bestimmt werde. In den Rechenbüchern gehören diese Aufgaben zu den künstlichern.

3. Wenn den gesuchten Größen, mit Ausschließung zweyer, bestimmte Werthe beygelegt sind, so wird die Aufgabe eine bestimmte, von derselben Art, wie bey der Alligationsregel vorgekommen ist, wenn zwey Materien, deren Werthe für eine gewisse Einheit derselben gegeben sind, so verbunden werden sollen, daß der Werth der Einheit in der Verbindung ein gegebener sey. Wir wollen diesen Fall in Beziehung auf die gegenwärtige Aufgabe zuerst vornehmen.

4. Die gegebene Zahl sey $= a$; die zwey gesuchten Theile y, z; die gegebenen Multiplicatoren, m, n, die Summe der Producte $= b$, so ist

I. $y + z = a$; II. $my + nz = b$. Die erstere Gleichung werde mit n multiplicirt, so ist III. $ny + nz = na$. Diese von II. abgezogen, giebt IV. $(m - n)\, y = b - na$. Es wird hierbey angenommen, daß n kleiner als m ist, da es gleichgültig ist, welcher der beiden Theile durch z bezeichnet

werde. Damit y eine ganze Zahl sey, muß $m - n$ ein Factor von $b - na$ seyn.

Z. B. Die Zahl 100 in zwey Theile zu theilen, daß der eine mit 7, der andere mit 4 multiplicirt die Summe 430 gebe. Hier ist $y = \frac{430-400}{3} = 10$; der andere Theil also $= 90$.

5. Es sey nun I. $x + y + z = a$; II. $mx + ny + pz = b$, und die Zahlen m, n, p, folgen der Größe nach auf einander, von der größten m an. Man multiplicire I. mit p und ziehe die Gleichung darauf von II. ab, so ist

III. $(m - p)x + (n - p)y = b - pa$.

Multiplicirt man I mit n, und zieht die Gleichung darauf von II. ab, so wird

IV. $(m - n)x - (n - p)z = b - na$.

Hier kann man x auf mehrerley Art annehmen, nur muß sowohl $b - pa - (m - p)x$, als $(m - n)x - b + na$ sich durch $n - p$ theilen lassen, damit y und z ganze Zahlen werden. Auch muß dabey $(m-p)x$ kleiner seyn, als $b - pa$, und $(m - n)x$ größer als $b - na$, so daß diese Größen der Quantität nach abnehmend so auf einander folgen:

$b - pa$; $(m - p)x$; $(m - n)x$; $b - na$.

Dieses dient die Gränzen für x zu bestimmen.

6. Exempel. Man will aus 14 löthigem, 11 löthigem und 9 löthigem Silber eine Masse 12 löthiges 30 Mark schwer machen, wie viel muß von jeder Sorte genommen werden?

Die Gleichungen sind hier

I. $x + y + z = 30$ (Mark)

II. $14x + 11y + 9z = 12 . 30$ (Loth fein).

Es ist $b - pa = 360 - 9 . 30 = 90$, und $b - na = 360 - 11.30 = 30$; also ist $(m-p)x$ oder $5x$ nicht größer als 90, und $(m - n)x$ oder

$3x$ nicht kleiner als 30, das ist, x ist nicht größer als 18, und nicht kleiner als 10. Ferner muß $90 - 5x$ sowohl als $3x - 30$ sich durch 2 theilen lassen, folglich muß x eine gerade Zahl seyn, also die Werthe 10, 12, 14, 16, 18 erhalten. Nun bestimmen sich die Werthe von y und z aus den beiden Gleichungen, III. $5x + 2y = 90$; IV. $3x - 3z = 30$. Die zusammenhörigen Werthe sind

x	10, 12, 14, 16, 18.
y	20, 15, 10, 5, 0
z	0, 3, 6, 9, 12.

7. Es werden vier Größen gesucht, so daß

$$\text{I. } u + x + y + z = a;$$
$$\text{II. } mu + nx + py + qz = b$$

sey, wo die Factoren m, n, p, q, nach der Größe abnehmend auf einander folgen.

Man leite aus diesen Gleichungen wie vorher folgende her:

$$\text{III. } (m-q)u + (n-q)x + (p-q)y = b - qa;$$
$$\text{IV. } (m-p)u + (n-p)x - (p-q)z = b - pa;$$

Die Werthe von u und x können auf mehrerley Art, jede für sich angenommen werden, nur müssen dabey sich beide Gleichungen durch $p - q$ theilen lassen, auch fallen die beiden Summen, $(m-q)u + (n-q)x$ und $(m-p)u + (n-p)x$ zwischen die Größen $b - qa$ und $b - pa$, wenn letzteres positiv ist, wie es jenes immer seyn muß.

8. Exempel. Es sey

$$\text{I. } u + x + y + z = 100,$$

und $$\text{II. } 20u + 10x + 4y + z = 200.$$

Daraus ist $$\text{III. } 19u + 9x + 3y = 100.$$
$$\text{IV. } 16u + 6x - 3z = -200, \text{ oder}$$
$$\text{III. } 100 - 19u - 9x = 3y,$$
$$\text{IV. } 200 + 16u + 6x = 3z.$$

Es muß also $100 - 19u$ durch 3 theilbar seyn, und

200 + 16u auch. Die letztere Formel ergiebt, nach Absonderung des darin enthaltenen größten Vielfachen von 3, nämlich 198 + 15u, daß 2 + u ein Vielfaches von 3 ist, das ist $u = 3t - 2$, oder wenn man $t + 1$ statt t setzt, $u = 3t + 1$. Durch diese Form von u wird auch die Formel, $100 - 19u$, ein Vielfaches von 3. Oder man setze $100 - 19u = 3t$, so ist auch $99 + 1 - 21u + 2u = 3t$, und $2u + 1 = 3t$, wenn man beiderseits dies Vielfache, $99 - 21u$, wegwirft. Man setze $2t + 1$ statt t, so ist $2u + 1 = 3(2t + 1)$, das ist $2u = 6t + 2$, oder $u = 3t + 1$.

Nun erhält man

$$\text{V. } 57t + 9x + 3y = 81.$$
$$\text{VI. } 48t + 6x - 3z = -216, \text{ oder}$$
$$\text{V. } 19t + 3x + y = 27, \text{ und}$$
$$\text{VI. } z - 16t - 2x = 72.$$

Hier kann t nur die beiden Werthe 0 und + 1 erhalten. In dem erstern Falle kann man für x alle ganze Zahlen von 1 bis 9 nebst 0 setzen; in dem andern nur 0, 1, 2. Aus den gewählten Werthen von x ergeben sich die von y und z. In allem giebt es 13 Auflösungen dieser Aufgabe.

9. Die beiden Exempel sind aus Eulers Algebra, II. Th. S. 174. ff. genommen. Die Behandlung ist abgeändert. Das zweyte Exempel steht auch in Clausbergs Rechenkunst, IV. S. 1345, ohne allgemeine Rechnung. Er zeigt die Auflösungen der hieher gehörigen Aufgaben durch Exempel in bestimmten Zahlen, wobey er aber zugleich den Grund des Verfahrens einsehen läßt. — Man sehe auch von dieser, wie von der folgenden Regel Falsi, Kästners Fortsetzung der Rechenkunst, S. 530 ff. 499 ff. Karstens Lehrbegriff der Mathematik zweyter Theil. XVI. Abschnitt der weitern Ausführung der Rechenkunst.

10. Die Rechenmeister kleiden diese Exempel so

ein, daß sie zur Belustigung dienen. Es wird z. B. aufgegeben, wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schafe unter 100 gekauften Stück Vieh gewesen sind, wenn der Preis eines Stücks jeder Sorte gegeben wird. Von solchen Exempeln, mögen einige Benennungen dieser Regel herrühren. Sie heißt Regel Cöci entweder, weil die Rechner, welche darauf fielen, die Auflösung durch Versuche und Herumtappen suchten, oder von dem unbekannten Worte, Zekis, das in Cöci verwandelt ist.

Die Regel Falsi.

11. Die Regel Falsi ist eine Methode, eine Rechnungs-Aufgabe durch die Annahme einer willkührlichen Größe statt der wahren aufzulösen, dadurch daß man das Facit mit dem, was herauskommen sollte, vergleicht, und aus dem Unterschiede die angenommene Zahl berichtigt.

12. Man hat diese Methode in frühern Zeiten benutzt, weil man entweder die algebraische nicht kannte, oder sie dem Lehrling ersparen wollte. Wer nur mit Gleichungen vom ersten Grade umgehen kann, braucht die Regel Falsi nicht. Sie läßt sich nicht anbringen, wo das gesuchte oder etwas davon abhangendes nicht durch eine Formel, welche bloß Factoren und Divisoren enthält, dargestellt wird.

13. Exempel. Drey Personen, A, B, C, sollen 1000 Rthlr. dergestallt theilen, daß B $1\frac{1}{2}$ mahl so viel als A, und C $\frac{1}{5}$ mahl so viel als A und B zusammen bekomme, nebst 40 Rthlr. besonders. — Man nimmt hier irgend eine Zahl Thaler an, die A erhalten soll, gleichviel welche, als 4, so erhält B 6, und C bekommt 2 mit 40. Dieses macht 52 statt 1000. Damit man die Regel Falsi anbringen könne, muß man die 40 von 1000 wegnehmen, so wird die Summe = 12, statt 960. Nun setze man nach der

Regel de Tri an, statt 12 sollen kommen 960, was muß statt 4 in der Portion des A kommen? Facit 320. Nun bekommt B 480; C 160 mit den zurückgelegten 40, und die Summe dieser drey Posten ist 1000.

14. Die Algebra giebt die Auflösung ohne Versuche. Die Portion des A sey $= x$, so ist die des $B = \frac{3}{2} x$, des $C = \frac{1}{5}\left(x + \frac{3}{2} x\right) + 40$. Alle drey zusammen geben die Gleichung, $\frac{30}{10} x + 40 = 1000$, oder $3x = 960$. Man sieht aus diesem Beyspiele oder allgemeiner aus der Gleichung, $\frac{mx}{n} + a = b$, wie man durch einen unrichtigen Werth von x mittelst der Abweichung von dem Werthe $b - a$ des Bruches den wahren Werth finden kann. Die Abweichung von $b - a$ verhält sich wie die Abweichung von x. Die algebraische Rechnung giebt kein bestimmtes Facit; sie stellt bloß den Zusammenhang der Größen dar, dagegen die Zahlenrechnung zwar dieselbe Form beobachtet, aber nicht gerade eine gegebene Größe trifft.

15. Das behandelte Exempel gehört zu der einfachen Regel Falsi. Man hat auch eine doppelte Regel, wo man zwey Ansätze macht, und aus dem Unterschiede der Resultate von dem gegebenen in Vergleichung mit dem Unterschiede der angenommenen Größen das richtige herleitet.

16. Exempel. Eine gewisse Zahl werde mit 2 multiplicirt, zu dem Producte 60 addirt, die Summe durch 11 dividirt, von dem Quotienten 15 subtrahirt, der Rest mit $2\frac{2}{3}$ multiplicirt, worauf 100 herauskommt, was war die genommene Zahl?

Man nehme 80 für sie an, so kommen nach dem angezeigten Verfahren, $11\frac{1}{9}$; nimmt man 135, so kommen $33\frac{1}{3}$, statt 100. Man sage nun, wie der Unterschied $33\frac{1}{3} - 11\frac{1}{9}$ zu $100 - 11\frac{1}{9}$, so $135 - 80$ zu dem Unterschiede der wahren Zahl von 80. Dieser Unterschied ist 220, also die wahre Zahl $220 + 80 = 300$.

Allgemein ist die Aufgabe, aus der Gleichung,

$$\left(\frac{mx + a}{b} - c\right) d = e,$$

die Zahl x zu finden. Wenn man statt der x ein paar andere Zahlen t und u setzt, so kommen f und g statt e. Nun ist

$$g - f = \frac{m\,(u - t)}{b}\,d, \text{ und } e - f = \frac{m\,(x - t)}{b}\,d.$$

Folglich ist $g - f : e - f = u - t : x - t$, welches die angewandte Proportion ist.

17. Exempel. Aus 10 löthigem (A) und 15 löthigem Silber (B) soll ein Werk von 30 Mark 13 löthigen gemacht werden. Wie viel von jedem? — Nach der Regel Falsi setze man, von dem Silber A 5 Mark, so hat man von B zu nehmen 25 Mark. Dieses giebt $50 + 375$ oder 425 Loth fein. Aber 30 Mark zu 13 Loth sind nur 390 Mark fein. Man nehme von A 9 Mark, also von B 21 Mark, so erhält man 405 Loth fein. Hier hat die Vermehrung des Silbers A eine Verminderung des feinen Silbers in der ganzen Masse hervorgebracht, wie es begreiflich ist. Man sage nun, wie $425 - 405$ zu $425 - 390$, so $9 - 5$ zu dem Unterschiede der richtigen Zahl und der angenommenen 5. Dieser ist 7, also muß man von A 12, von B 18 Mark nehmen. Weil weniger fein Silber herauskommen soll, so muß der Unterschied 7 zu der Menge 5 des schlechten Silbers addirt werden.

18. Die Algebra giebt das gesuchte sehr leicht, s. Gleichung, 25. Die Regel Falsi in diesem Falle zu erweisen, setze man m, n, r, statt 10, 15, 13, und a statt 30. Die gesuchte Menge von A sey x, so ist I. $mx + n(a - x) = ra = b$ Loth fein. Man setze statt x sowohl t als u, wodurch statt b nun entstehen c und d Loth fein, und es ist II. $mt + n(a-t) = c$; III. $mu + n(a - u) = d$. Hieraus ist IV. $c - d = (n - m)(u - t)$, und V. $c - b = (n - m)(x - t)$. Daraus ist $c - d : c - b = u - t : x - t$.

19. In der Analysis wird die positio falsi oder vielmehr positio prope veri, häufig angewandt, wo die directe Rechnung entweder nicht wohl möglich oder doch beschwerlicher ist. Höhere Gleichungen werden aufgelöset dadurch, daß man für die Wurzel erst einen nahe kommenden Werth sucht, dann diesen in die Gleichung setzt, und aus der Abweichung des Werths derselben von 0 (wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht sind) eine Verbesserung des angenommenen Werthes der Wurzel herleitet, s. Gleichung, 231 ff. Th. II. S. 488 ff. Auf eben die Art kann aus einer unbestimmten Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen die eine durch die andere in Gestalt einer Reihe dargestellt werden. So verfährt Newton in der Method. flux. et serierum infin. Die Gleichung, $A \tan \varphi + C \sin \varphi = B$ (Kreis, 112) führt auf eine Gleichung vom vierten Grade; sie wird aber bequemer durch Annäherung aufgelöset, indem man zuerst für φ eine Annahme macht, und diese folgweise verbessert. S. Kästners geom. Sammlung. I. S. 42. In der Astronomie läßt sich bey der Berechnung einer Sonnen- und Mondsfinsterniß für eine gegebene Zeit der Abstand der Mittelpuncte beider Weltkörper directe berechnen, aber umgekehrt aus dem Abstande die Zeit zu finden, muß man einige Zeitpuncte annehmen, und aus den zugehörigen Abständen der Mittelpuncte

die gesuchte Zeit für den gegebenen Abstand herleiten. Euler in seiner Theoria Planetarum et Cometarum nimmt für eine gegebene Zeit den Abstand eines Kometen von der Erde durch Schätzung an, berechnet daraus die Elemente der Bahn, und aus diesen für eine entferntere Zeit wieder den geocentrischen Ort nach Länge und Breite. Die Vergleichung mit der Beobachtung giebt zu erkennen, wie jene Annahme zu verbessern seyn möge. Newton verfährt auf eine ähnliche Art, de mundi Systemate, in fine Princip. L. III. prop. 41.

Reguläre Figur, s. Vieleck.

Reihe (Series) ist erstlich eine Folge von Größen, welche nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gebildet werden; zweytens eine nach irgend einem Gesetze entwickelte Folge der Theile einer Größe, welche eine Function einer andern ist, nach deren Potenzen gewöhnlich die Glieder der Reihe fortschreiten. Die in einer Reihe auf einander folgenden Größen oder Theile heißen die **Glieder** (Termini) derselben.

Die Glieder einer Reihe der **ersten Classe** sind gesonderte, vollständige Größen, gleich den Ordinaten an eine Linie. Die Stellenzahlen derselben sind den Abscissen zu vergleichen. Diese nennt man auch die Zeiger (indices). Daher können die Reihen dieser Classe interpolirt werden, indem zwischen je zweyen immer andere gedacht werden können, die nach demselben Gesetze, zufolge der Stellenzahl oder des Zeigers, gebildet werden. Hingegen in den Reihen der **zweyten** Classe findet keine Interpolation statt. Die Reihe wird fortgesetzt, das ist, es werden zu den berechneten Gliedern mehrere zugefügt, bis entweder die Reihe vollständig geworden ist (abbricht), oder bis der Werth der Function hinlänglich genau gefunden ist.

Die

Die Reihen der ersten Classe heißen oft und schicklich **Progressionen**.

1. Die einfachste Reihe ist die **arithmetische** der ersten Ordnung, in welcher die Unterschiede zweyer nächsten Glieder, nach derselben Richtung genommen, gleich groß sind, als in nachstehender,

$a; 2a-b; 3a-2b, 4a-3b, \ldots na-(n-1), b, \ldots$

welche rückwärts fortgesetzt ist,

$b, 2b-a, 3b-2a, 4b-3a, \ldots nb-(n-1)a, \ldots$

Die Glieder dieser Reihe sind die Ordinaten der einfachsten Linie, der geraden, wenn die Stellenzahl n der Abscisse proportional, oder der Quotient ist, den die Abscisse, durch eine gewisse linearische Einheit dividirt, giebt. Entgegengesetzte Werthe der Glieder zeigen entgegengesetzte Lage oder Richtung der Ordinaten an. S. Linie, gerade.

2. Potenzen, deren Wurzeln die Glieder einer einfachen arithmetischen Reihe sind, bilden eine arithmetische Reihe einer höhern Ordnung. Diese Reihen werden zu der Classe der arithmetischen gerechnet, weil die zweyten, dritten oder folgenden Unterschiede der Glieder, dem Exponenten der Potenz gemäß, beständige Werthe erhalten. So die Reihen,

$(a+b)^2, (a+2b)^2, (a+3b)^2 \ldots (a+nb)^2 \ldots$

$(a+b)^2, (a+2b)^3, (a+3b)^3 \ldots (a+nb)^3 \ldots$

Für jene sind die zweyten Unterschiede, nämlich $2b^2$, für diese die dritten, nämlich $6b^3$, beständig. Siehe Potenz, 27. ff.

3. Nimmt man statt der gleichen Factoren bey den Potenzen, ungleiche Factoren, so bilden die Producte aus denselben ebenfalls eine arithmetische Reihe, deren Ordnung durch die Anzahl der Factoren bestimmt wird. Eine Reihe der zweyten Ordnung ist diese:

$(a+b)(c+d); (a+2b)(c+2d); (a+3b)(c+3d); \ldots (a+nb)(c+nd) \ldots$

eine der dritten Ordnung,

$(a+b)(c+d)(e+f)$; $(a+2b)(c+2d)(e+2f)$; .... $(a+nb)(c+nd)(e+nf)$...

u. s. w.

Die Glieder dieser Reihen werden durch die Ordinaten parabolischer Curven dargestellt, die von der zweyten Ordnung durch Ordinaten an eine gemeine Parabel. Die Stellenzahl n des Gliedes ist der Abscisse proportional. Die Gleichung einer parabolischen Curve ist $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots + \lambda x^m$. Die Vergleichung mit der Form des Gliedes giebt die Werthe der Coefficienten. S. Parabeln höherer Art.

4. Eine reciproke arithmetische Reihe besteht aus Brüchen, deren Zähler eine beständige Größe ist, die Nenner eine einfache arithmetische Reihe bilden. Die Form des nten Gliedes ist $\frac{c}{na-(n-1)b}$.

Das Anfangsglied, A, für $n = 0$, ist $\frac{c}{b}$; das nächstfolgende, B für $n = 1$, ist $\frac{c}{a}$. Nimmt man $c = ab$, so ist $A = a$; $B = b$, und das allgemeine Glied der Reihe ist $P = \frac{ab}{na-(n-1)b}$; das nächstfolgende $Q = \frac{ab}{(n+1)a-nb}$.

Es ist $P - Q = \frac{a-b}{ab} PQ$, oder $a - b : P - Q = ab : PQ$.

Je drey auf einander folgende Glieder der reciproken arithmetischen Reihe sind in einer stetigen harmonischen Proportion. Es seyn diese, P, Q, R, so ist

$$a - b : P - Q = ab : PQ,$$
$$a - b : Q - R = ab : QR.$$

Daraus ist

$$P - Q : Q - R = P : R.$$

eine stetige harmonische Proportion. S. diesen Artikel.

Diese Proportion giebt die beiden,

$$2P - Q : Q = P : R,$$
$$2R - Q : Q = R : P;$$

und jede dieser die Proportion,

$$P + R : R = 2P : Q,$$

oder

$$R + P : P = 2R : Q.$$

5. Ein Glied einer reciproken arithmetischen Reihe werde durch $\frac{a}{a - bx}$ ausgedrückt, wo x die Stellenzahl des Gliedes ist. Dieser Quotient entwickelt giebt die geometrische Reihe,

$$1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4} + \text{etc.}$$

Der entgegengesetzte Werth des Gliedes, nämlich $\frac{a}{bx - a}$, werde auch durch die Division, auf gleiche Art wie jener, entwickelt, so ergiebt sich die geometrische Reihe,

$$\frac{a}{bx} + \frac{a^2}{b^2x^2} + \frac{a^3}{b^3x^3} + \frac{a^4}{b^4x^4} + \text{etc.}$$

Es ist die erstere rückwärts fortgesetzt. Beide Reihen zusammen genommen, ins Unendliche gedacht, heben sich, wie sich die Quotienten, woraus sie entstanden sind, einander aufheben; freylich nicht vermöge entgegengesetzter gleicher Quantität.

6. Der Quotient und die entwickelte Reihe ist nur ein einzelner Fall, der einem allgemeinen untergeordnet ist. So wie in einer geometrischen Reihe jedes Glied aus dem vorhergehenden durch die Multiplication mit derselben Größe entsteht, so kann auch jedes Glied einer Reihe aus zwey, drey oder mehrern vorhergehenden Gliedern, durch die Multiplication jedes

mit einem beständigen Factor zusammengesetzt werden. Es sey ein Glied S, die vorhergehenden R, Q, P, u. s. f. Nun sey jedes $S = \alpha R + \beta Q$; oder $S = \alpha R + \beta Q + \gamma P$, wo α, β, γ die beständigen Factoren sind. Diese Reihen, welche rücklaufende (recurrentes) heißen, entstehen durch Entwickelung des Bruches $\frac{a + bx + cx^2 \ldots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots}$. Davon in dem Artikel, rücklaufende Reihen.

Eine sehr zusammengesetzte, aber doch völlig regelmäßige Bildung einer Reihe von Größen, aus allen vorhergehenden Gliedern, zeigt die Reihe der Bernoullischen Zahlen; s. Th. I. S. 258.

7. Die Glieder einer Reihe können auch transscendente Functionen der Stellenzahl seyn. Diese Stellen können durch Winkel angegeben werden, die in arithmetischer Progression oder etwa einer andern genommen werden, und die Glieder der Reihe sind ihre Sinus oder Tangenten oder sonst eine Function dieser Winkel. Dergleichen sind in dem Artikel, Einschalten, 36 — 39 angegeben. Eine logarithmisch-transscendente ist noch in folgendem Ausdruck enthalten:

$$y = p + q \cdot 10^{(m+x):n}.$$

Eine dieser Art kommt in Lamberts Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers S. 66. vor. Dergleichen Reihen werden bey praktischen Untersuchungen angewandt, wo aus den durch Beobachtung gefundenen Werthen einer Größe, welche von einer andern abhängt, der Werth derselben allgemein angegeben werden soll, und die einfachen Formeln (3.) nicht Genüge leisten.

8. Die zweyte ausgebreitetere Classe der Reihen enthält diejenigen, welche von dem Anfangsgliede an die entwickelte Darstellung der Function einer veränderlichen Größe sind, nach deren Potenzen die Glieder der Reihe geordnet werden. Diese Glieder sind nun

Theile eines Ganzen, deren Stellen die dritte veränderliche Größe bey dieser Entwickelung ausmachen. Die Functionalgröße und die Function selbst sind wie Abscissen und Ordinaten an einer krummen Linie zu betrachten. Die Functionalgröße, nach deren Potenzen die Reihe fortschreitet, mag man bequem die Progressionalgröße nennen. Anstatt der Fortschreitung nach den Potenzen einer veränderlichen Größe wird auch oft eine Fortschreitung nach den Vielfachen eines veränderlichen Winkels genommen, wenn bey geometrischen Untersuchungen Winkel und Abstände von einem Puncte zu einander geordnet werden.

9. Diese Reihen dienen einen genäherten Werth einer Größe anzugeben, den man sonst entweder gar nicht erhalten kann, oder nicht anders als unter einer zu verwickelten Gestalt findet, wiewohl zu diesem Zwecke oft noch gewisse Vorbereitungen erfordert werden, wofern die Annäherung schnell genug geschehen soll. Manchmahl gewähren Reihen gar keine Annäherung. Um dieser Anwendung willen ist die Theorie der Reihen von den neuern Mathematikern fleißig bearbeitet worden. Außerdem lassen sich über Reihen, als Formen einer Größe überhaupt, merkwürdige Untersuchungen anstellen, in Absicht auf die Entwickelung ihrer Glieder, die allgemeine Form derselben, die Summe der Glieder und die Vergleichungen verschiedener Reihen unter einander.

10. Die Analysis bietet gleich beym Eingange zwey merkwürdige Entwickelungen dar, der Potenz einer zwey- oder mehrtheiligen Größe und eines Bruches. Die unbestimmte Potenz des Binomium $a + x$ wird durch eine Reihe dargestellt, in welcher die Progressionalgröße x ist, und die Coefficienten aus der Größe a und der Stelle eines Gliedes gebildet werden. Die Function der Stelle ist veränderlich, aber nach einem bestimmten Gesetze. Die Reihe der Coefficienten in derselben Stelle bey veränderten Exponen-

ten des Binonium machen eine Reihe der ersten Classe und zwar eine arithmetische einer gewissen Ordnung aus, wo die Function der Stellenzahl dieselbe bleibt.

11. Die Reihen, welche aus der Entwickelung eines Bruches entstehen, dessen Zähler und Nenner nach den Potenzen einer veränderlichen oder unbestimmten Größe geordnet sind, das ist, die rücklaufenden, können auch als Ganze angesehen werden, die eine Function der veränderlichen Progressionalgröße sind. Die Glieder der Reihe lassen sich aber auch, wie oben (5.) geschehen ist, als abgesonderte Größen betrachten, die nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gebildet werden.

12. Wenn eine veränderliche Größe y eine ungesonderte Function (functio implicita) einer andern x ist, so entstehen durch die Entwickelung derselben mehrere Reihen für die verschiedenen neben einander bestehenden Fortschreitungen der y, wie in dem Artikel, Function. 41. gezeigt ist. Diese Reihen stellen die Ordinaten an den verschiedenen Zweigen einer Curve vor. Sie sind oft nur für kleine Portionen der krummen Linie brauchbar, dienen aber hier besonders die Eigenheiten einer Curve an einzelnen Stellen anzugeben.

13. Wenn eine Größe y durch eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe gegeben wird, so kann es erforderlich seyn, umgekehrt x durch y auszudrücken. Dieses ist, was man die **Umkehrung einer Reihe** nennt.

14. Hieher gehört auch der Fall, wenn die Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch eine Reihe ausgedrückt werden sollen, die nach den Potenzen einer unter den gegebenen Größen fortschreitet. Dieses hat inzwischen manchmahl Schwierigkeit in Rücksicht der Annäherung zu dem Werthe einer jeden Wurzel.

15. Die Integrationen, welche auf transscendente Größen führen, geben mancherley Reihen, von wel-

chen insbesondere die cyklometrischen und logarithmischen wichtige Beyspiele sind. Die cyklometrischen vorzüglich lassen jede eine Eigenheit in der Bildung der Coefficienten zu der Progressionalgröße bemerken, s. Cyklometrie.

16. Die Veränderung einer Function y von einer Größe x durch die Veränderung von x darzustellen, dient eine Reihe, welche nach den Potenzen der Veränderung von x geordnet ist, mit Coefficienten, die aus den Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, und höherer Ordnungen entstehen, welches der Taylorsche Lehrsatz angiebt.

17. Eine jede Function von x aus der Gleichung, $y = x - z\varphi x$ durch dieselbe Function von y mit ähnlichen Functionen von y wie φx von x ist, nach den Potenzen von z geordnet, darzustellen, geschieht durch eine Reihe, welche la Grange angegeben hat, und die nach diesem Analysten zu benennen ist, s. la Grange's Lehrsatz.

18. Als eine besondere Art von Reihen kann man die Formen ansehen, welche eine Größe durch ein Product von unendlich vielen Factoren darstellen, wie den $\sin \frac{m\pi}{2n}$ und $\cos \frac{m\pi}{2n}$ in Cyklometrie, 28, daher auch die $\operatorname{tang} \frac{m\pi}{2n}$.

Die Kettenbrüche oder continuirlichen Brüche machen auch eine eigenartige Reihe durch die fortgesetzten, in einander geschobenen Quotienten aus.

19. Die Glieder einer Reihe der zweyten Classe können wieder aus Reihenausdrücken zusammengesetzt seyn. Ein solcher Fall ist bey der unbestimmten Rectification der Ellipse und Hyperbel.

20. Es sey z eine Function von x und y,

wie die Ordinaten z an eine Fläche eine Function der Coordinaten x, y in der Grundfläche durch die Axen derselben sind. Die aus der Gleichung zwischen den x, y, z entwickelte Function z hat die Form,

$$
\begin{aligned}
z = A &+ A'x + A''x^2 + A'''x^3 + A^{IV}x^4 + \text{etc.} \\
&+ By + B'xy + B''x^2y + B'''x^3y + \text{etc.} \\
&+ Cy^2 + C'xy^2 + C''x^2y^2 + \text{etc.} \\
&+ Dy^3 + D'xy^3 + \text{etc.} \\
&+ Ey^4 + \text{etc.} \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

21. Bey den Reihen der zweyten Classe kommt es auf zwey Momente an, erstlich auf die *Fortschreitung der Exponenten* zu den Potenzen der Progressionalgröße, zweytens auf das *Gesetz der Coefficienten*.

22. Die Exponenten der Progressionalgröße nimmt man in einer arithmetischen Progression. Denn wenn auch bey einer solchen Fortschreitung einige Glieder ausfallen, so muß der Coefficient der zugehörigen Potenz gleich Null gefunden werden. Die Progression der Exponenten wird zufolge der Beschaffenheit der Function bestimmt. Sie enthält die *Gestalt* oder *Form* der Reihe, s. Function.

23. Wenn die Exponenten der veränderlichen Größe nach der angenommenen Folge der Glieder zunehmen, so heißt die Reihe eine *steigende*, wenn sie abnehmen, eine *fallende*. Negativ zunehmende Exponenten geben eine fallende Reihe; negativ abnehmende eine steigende. Denn die relative Vergrößerung einer negativen Größe geschieht durchs Addiren einer positiven Größe, die relative Verminderung durchs Addiren einer negativen Größe oder Subtraction einer positiven. Nach der absoluten Größe der Exponenten läßt sich nicht bestimmen, ob eine Reihe eine steigende oder fallende sey.

24. Die steigenden Reihen sind zur Darstellung

des genäherten Werthes einer Function erforderlich, wenn die Progressionalgröße kleiner ist als die Einheit; die fallenden, wenn sie größer als die Einheit ist. Wenn keine Einheit festgesetzt ist, so muß man zur Progressionalgröße den Quotienten der Functionalgröße durch eine gegebene nehmen. Das Verhältniß beider zeigt nun, ob die Progressionalgröße ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch ist.

25. **Der allgemeine Coefficient** der Progressionalgröße bestimmt vornämlich das Gesetz der Fortschreitung der Glieder in einer Reihe. Mit der zugehörigen Potenz der Progressionalgröße verbunden macht er das **allgemeine Glied** (terminus generalis) der Reihe aus. Dieses ist der analytische Ausdruck eines unbestimmten Gliedes durch die unbestimmte Zahl seiner Stelle, oder überhaupt durch das zugehörige Glied einer arithmetischen Reihe.

26. Z. B. In der Reihe, die durch die Entwickelung des Quotienten $\frac{a}{\alpha - \beta x}$ entsteht, ist das allgemeine Glied $= \frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}} x^n$, wo n die Stelle des Gliedes nach dem Anfangsgliede $\frac{a}{\alpha}$ ist, welches für n $= 0$ gilt. In der Reihe für einen Kreisbogen φ, dessen Sinus $= x$ ist, ist das allgemeine Glied

$$= \frac{2m-3 \cdot 2m-5 \ldots 3 \cdot 1}{2m-2 \cdot 2m-4 \ldots 4 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2m-1} x^{2m-1},$$

wo m die Stelle des unbestimmten Gliedes vom Anfange an bezeichnet. Cyklometrie, 1.

27. Ist das allgemeine Glied bekannt, so ist dadurch die Größe, welche durch die Reihe dargestellt wird, in der That gegeben, wenn sie auch für manche Werthe der Progressionalgröße nur sehr unvollständig

durch wirkliche Berechnung gefunden werden könnte. Denn es kommt im Allgemeinen auf die Form der Größe, nicht auf ihr numerisches Verhältniß zu einer gegebenen an. Die Reihe für den Kreisbogen φ durch die Tangente t, nämlich $\varphi = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 +$ etc., ist zwar nicht brauchbar zur Berechnung des Bogens aus seiner Tangente, wenn diese größer als 1, oder φ größer als 45° ist. Inzwischen wird die Form des Bogens in dem letztern Falle eben so gut und richtig dargestellt, als wenn t ein kleiner Bruch ist. Der Bogen ist in beiden Fällen der Unterschied zweyer Reihen, die in dem einen Falle beide endlich, in dem andern beide unendlich groß, doch mit einem endlichen Unterschiede sind. So ist der natürliche Logarithme x einer Zahl 1 + y die Reihe $y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{5} y^5 -$ etc. und allgemein richtig, wenn man sie sich als vollständig gedenkt, wiewohl sie zur Berechnung nur dann brauchbar ist, wenn y ein wahrer Bruch ist, das ist, wenn die Zahl zwischen 1 und 2 fällt.

28. Wenn das allgemeine Glied sich nicht angeben läßt, so ist die Kenntniß von der Beschaffenheit der Reihe, und der Function, die durch sie angegeben werden soll, mangelhaft, und bloß auf die wirklich berechneten Glieder eingeschränkt, wobey man nicht beurtheilen kann, wie genau sie den Werth der Reihe liefern.

29. Wie das allgemeine Glied gefunden werde, darüber läßt sich im Allgemeinen keine Vorschrift geben. Vorzügliche Beyspiele liefern der binomische und

polynomische Lehrsatz, die cyklometrischen und logarithmischen Reihen, die Bernoullischen Zahlen.

30. Wenn die arithmetische Summe einer Anzahl von Gliedern einer unendlichen Reihe von dem vollständigen Werthe derselben immer weniger verschieden wird, je größer die Anzahl der Glieder genommen wird, so heißt die Reihe eine convergirende oder eine sich nähernde. Ist für eine kleine Anzahl von Gliedern der Unterschied von dem Totalwerthe verhältnißmäßig klein, so convergirt die Reihe schnell, in dem entgegengesetzten Falle langsam. Die Convergenz oder Annäherung hängt nicht von der Kleinheit der Glieder ab. Die harmonische Reihe, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ etc. convergirt nicht, wenn gleich die Glieder immer kleiner werden. Denn ihre Summe ist unendlich groß. Die Reihe, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ etc. oder die Reihe, $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{13 \cdot 15} +$ etc. nähert sich dem Totalwerthe (dem halben Quadranten eines Kreises mit dem Halbmesser $= 1$) sehr langsam. So auch die Reihe, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} +$ etc. oder diese, $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} +$ etc. welche die natürliche Logarithme von 2 ist. Man hat berechnet, daß tausend Millionen Glieder nöthig sind, um durch diese Reihe den log. 2 bis auf die neunte Decimalstelle richtig zu finden.

31. Wenn die Summe irgend einer Anzahl von Gliedern einer Reihe sich von dem Totalwerthe immer mehr entfernt, je größer die Anzahl der Glieder wird, so divergirt die Reihe. Dieses geschieht, wenn die Glieder nach ihrer Folge, von irgend einem Gliede an, immer größer werden. Z. B. die Reihe für den Kreisbogen, dessen Tangente $= t$, und Halbmesser $= 1$ ist, nämlich $t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 -$ etc. wenn t größer als 1 ist. Die Werthe dieser Reihe sind abwechselnd positiv und negativ, und dabey absolut zunehmend. (Z. B. für $t = 2$ ist der Bogen $= 1,107$.) So auch die Reihe für den natürlichen Logarithmen einer Zahl $1 + y$, nämlich $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 -$ etc. wenn die Zahl größer als 2 ist. Die Reihe, $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 +$ etc. ist für jeden Werth von x, der größer als 1 ist, divergirend, und entfernt sich immer mehr von dem Totalwerthe $\frac{1}{(1+x)^2}$. Für $x = 1$ ist ein Stück dieser Reihe, $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ etc. abwechselnd positiv und negativ, und dabey zunehmend. Der Totalwerth ist $= \frac{1}{4}$. Die hypergeometrische Reihe $1 - 2 + 6 - 24 + 120 -$ etc. gehört gleichfalls hieher. Die Glieder von Anfang an genommen geben die Werthe, $1, - 1, + 5, - 19, + 101$, etc. der Totalwerth ist $= 0,4036524$..

32ᵃ. Eine Reihe kann auch anfangs convergiren, zuletzt aber divergirend werden. Dies ist der Fall mit folgender Reihe

$$\frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1-\frac{1}{2T^2}+\frac{1.3}{2^2.T^4}-\frac{1.3.5}{2^3.T^6}+\frac{1.3.5.7}{2^4.T^8}-\text{etc.}\right)$$

welche den Werth des Integrals $\int\partial t.e^{-t^2}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, von $t = T$ bis $t = \infty$ genommen, angiebt. Für $T = 2$ nämlich ist das 12te Glied des eingeklammerten Factors, $\frac{1.3.5\ldots\ldots21}{2^{11}.T^{22}} = \frac{13749310575}{8589934592}$, also schon > 1. Dessen ungeachtet können die ersten convergirenden Glieder der Reihe sicher gebraucht werden, den Werth des Integrals zu berechnen. Die übrigen Glieder der Reihe nämlich, welche vernachlässigt werden, lassen sich auf ein bestimmtes Integral bringen, dessen Werth mit dem des letzten in Rechnung gebrachten Gliedes verglichen nur klein ist. Reihen dieser Art können ganz schicklich halbconvergirende heißen.

32b. Es giebt auch Reihen, die weder convergiren, noch divergiren, sondern innerhalb gewisser Gränzen von dem eigentlichen Werthe wechselsweise in Plus und Minus unterschieden bleiben, dergleichen ist diese, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. welche aus dem Quotienten $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 -$ etc. entsteht, wenn darin $x = 1$ gesetzt wird. Diese Reihe kann zur numerischen Rechnung nur angewandt werden, wenn x kleiner als 1 ist, da man bey demjenigen Gliede stehen bleibt, welches nicht größer ist als der Bruch, den man nach dem nöthigen Grade der Genauigkeit weglassen kann. Sonst aber muß die Ergänzung beygefügt werden. Diese ist, nach dem Gliede $\pm x^n$, der Rest dividirt durch $1 + x$, also $\mp \frac{x^{n+1}}{1+x}$, und für $x = 1$ ist sie

$= + \frac{1}{2}$. Wird diese zu der Reihe $+ 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \pm 1$ hinzugefügt, so ist die Summe $= \frac{1}{2}$. Sonst wäre sie entweder 0 oder $+ 1$, bliebe also eigentlich unbestimmt, da man weder mit $+ 1$ noch mit $- 1$ abbrechen darf.

33. Bey der Entwickelung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch Reihenausdrücke, kommen auch dergleichen schwankende Reihensummen vor, wie man sie nennen mag. Die Reihen der Sinus und Cosinus, deren Winkel in arithmetischer Fortschreitung sind, sind auch von dieser Art, s. Goniometrie, 72 ff.

34. Man muß daher in der Lehre von den Reihen den Begriff einer Summe erweitern, und darunter, bey den Reihen der zweyten Classe, diejenige Function verstehen, aus deren Entwickelung eine Reihe hervorgeht. Diese mag man bey divergirenden Reihen die analytische nennen, um sie von der arithmetischen Summe, welche die gemeine ist, zu unterscheiden. Ein merkwürdiges Beyspiel geben die Summen der Potenzen ganzer Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen (Potenz, 49. u. folgg.)

35. Die Erklärung der Frage, wie die Reihe, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. $= \frac{1}{2}$ seyn müsse, hat einige Mathematiker beschäftigt. Guido Grandi glaubte, daß aus unzählig vielen $1 - 1 = 0$ etwas endliches entstehen könne, und suchte darin eine Erklärung der Schöpfung aus Nichts. Leibnitz, nach welchem diese Reihe auch die Leibnitzische genannt wird, hat darüber einen langen Brief an Christian Wolf geschrieben. Acta Erud. Suppl. T. V. a. a. 1713. Er löset das Räthsel auf eine witzige Art.

Die Reihe ist für eine gerade Anzahl Glieder = 0, für eine ungerade = + 1. Von einer unendlichen Anzahl Glieder könne man weder sagen, daß sie gerade, noch daß sie ungerade sey. Daher geschehe mit bewundernswerther Feinheit (ingenio) der Natur, bey dem Übergange von dem Endlichen zum Unendlichen, auch ein Übergang von dem Disjunctiven zu einem Bestimmten in der Mitte zwischen beiden Disjunctiven liegenden. Da nun bey zwey gleich wahrscheinlichen Fällen das arithmetische Mittel für die Wahrscheinlichkeit zu nehmen ist, so beobachte auch hier die Natur die Regel der Gerechtigkeit und gebe das Mittel zwischen 0 und + 1, das ist $\frac{1}{2}$. Diese Schlußart, setzt L. hinzu, sey zwar mehr metaphysisch als mathematisch, aber doch gründlich.

36. Wenn zu einer Reihe der ersten Classe eine andere Reihe geordnet wird, deren Glieder jedes die Summe von so vielen Gliedern der erstern Reihe ist, als die Zahl dieses Gliedes anzeigt, und zwar durch eine Function des Zeigers oder der Stellenzahl des Gliedes, so heißt diese Reihe die summirende Reihe (series summatrix) und ein unbestimmtes Glied derselben das summatorische Glied (terminus summatorius). Dieses Glied ist ein analytischer Ausdruck, dessen Werth dem Aggregate von so vielen Gliedern der vorgegebenen Reihe als seine Stellenzahl anzeigt, gleich ist. Beyspiele geben die arithmetischen Reihen höherer Ordnungen, als deren Glieder die Summen von Gliedern der nächst niedrigern sind (Th. I. S. 201. ff.); auch die Brüche, deren Zähler unveränderlich ist, und deren Nenner ein Product von Factoren in arithmetischer Progression ist. Differenzenrechnung, 59 ff.

37. Archimedes hat die Summen arithmetischer Reihen und einer Reihe von Quadraten der na-

türlichen Zahlen bey geometrischen Sätzen gebraucht, s. Exhaustions-Methode, Th. II. S. 164. 165, (wo nur am erstern Orte noch zuzusetzen ist, daß die Unterschiede dem kleinsten der Glieder gleich seyn.) Bey der zweyten Methode die Parabel zu quadriren, gebraucht er die Summirung einer geometrischen Reihe mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$.

Cavaleri fand, wie sich die Summen der nten Potenzen aller parallelen Linien in einem Rechtecke und aller Ordinaten in dem Dreyeck, das die Hälfte desselben ist, verhalten, nämlich wie $n + 1 : 1$. Dieses machte er in den exercitationibus geometricis, Bonon. 1647 bekannt. Für die Cuben und Biquadrate bewies er dieses Verhältniß, für höhere Potenzen schloß er es aus der Analogie. Montucla hist. des Mathém. T. II. p. 40. 41.

Wallis erweiterte diese Summirung unendlicher Reihen auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Die Beweise sind nicht evident. Für die Summen endlicher Reihen der ersten bis sechsten Potenzen findet er durch Induction Formeln. Arithmetica Infinitorum, edita a. 1655. s. Th. I. S. 214 ff.

Faulhaber hat aber viel früher, im Anfange des 17ten Jahrhunderts, einen allgemeinen Ausdruck (cossische Quantität nennt er es) für die Summen der fünften und sechsten Potenzen der natürlichen Zahlen angegeben. Kästners Geschichte der Mathematik, Bd. III. S. 123.

Die ersten Proben der Darstellung einer transscendenten Größe durch eine unendliche Reihe von Theilen werden Brounckers und Mercators Reihen seyn. Von der letztern s. Logarithmen, 139 — 142. Darauf folgten die cyklometrischen Reihen von Leibnitz, Gregory und Newton.

Newton zeigte in seinen analytischen Schriften, wie die Reihen zur Darstellung einer Größe aus einer endlichen Gleichung, und zu Integrationen angewandt werden; s. Differentialrechnung, Th. I. S. 831. ff.

Die Summirung der Progressionen von Brüchen, deren Zähler und Nenner nach einem gewissen Gesetze gebildet werden, beschäftigte einige der angesehensten Mathematiker. Leibnitz zeigte in den Actis Erud. 1682 an, daß die unendlichen Reihen

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\text{etc.}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}=\frac{1}{4}.$$

Die Nenner sind von der Form $m^2 - 1$. In der Folge gab Leibnitz auch von einigen Reihen mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder die Summe an.

Jakab Bernoulli ward hiedurch vermuthlich veranlaßt, diese Untersuchung ausführlicher vorzunehmen, in zwey akademischen Abhandlungen: Positiones arithmeticae de seriebus infinitis, earumque summa, Basil. 1689. 92. Hier erweiset er auch die Summen jener Leibnitzischen Reihen. Die Fortschreitungen im Zähler und im Nenner sind arithmetische, geometrische, die figurirten Zahlen, die von der Form $m^2 - 1$. Auch findet er den merkwürdigen Satz: in einer Reihe von Brüchen, deren Zähler sich alle gleich sind, und die Nenner die nten Potenzen der natürlichen Zahlen (sie selbst einbegriffen), verhält sich die Summe aller Glieder in den ungeraden Stellen zu der Summe aller in den geraden, $2^n - 1 : 1$; also für die Zahlen selbst wie $1 : 1$, für die Quadrate wie $3 : 1$, für die Würfel wie $7 : 1$; für die Biqua-

drate wie 15 : 1. — Auf jene zwey Dissertationen sind noch drey gefolgt, worin gezeigt wird, wie die Quadraturen und Rectificationen krummer Linien durch Reihenausdrücke bewerkstelligt werden. Hier auch von der Darstellung einer irrationalen Größe durch eine Reihe und von dem Gebrauche der unbestimmten Coefficienten die Relation einer veränderlichen Größe zu einer andern auszudrücken.

Joh. Bernoulli hat sich auch mit diesem Gegenstande beschäftigt. Seine Aufsätze darüber stehen in dem vierten Theile seiner Werke, der die noch nicht gedruckten Aufsätze enthält. Hier findet sich auch (Nr. 152) der schöne Satz über die Summe der geraden reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen.

Die Beschäftigung mit der Lehre von der Berechnung wahrscheinlicher Fälle gab Gelegenheit die arithmetischen Reihen höherer Ordnungen, wovon die figurirten Zahlen eine besondere Gattung sind, genauer zu untersuchen. Newton hatte die allgemeinen Formeln zum Gebrauch beym Einschalten schon angegeben (Th. I. S. 216). Montmort, von dem ein ausführliches Werk über die Glücksspiele (Essai d'Analyse sur les jeux de Hazards, 2de édit. à Paris 1714) vorhanden ist, gab darin pag. 64. eine allgemeine Formel, für die Summen solcher Reihen, von welcher er auch zeigt, wie durch dieselbe die Potenzen der Glieder arithmetischer Reihen irgend einer Ordnung summirt werden können. Jakob Bernoulli hatte in der Arte conjectandi (Basileae, 1713) nur die Summen der figurirten Zahlen angegeben, und blos an einem Beyspiele gezeigt, wie nach deren Vorbilde allgemeinere Reihen gemacht werden können. In den Philos. Transactions 1718. nr. 353 hat Montmort noch verschiedene Summirungen gezeigt, unter andern von Producten, deren Factoren in arithmetischer Progression sind als $a(a+n)(a+2n) + (a+n)(a+2n)(a+3n) + (a+2n)(a+3n)(a+4n)$

+ etc. Oder von Brüchen, deren Nenner diese Form haben, da die Zähler nach einem andern Gesetze bestimmt werden, oder auch nach demselben Gesetze wie die Nenner.

Durch die Lehre von der Berechnung der Wahrscheinlichkeit ward Moivre auf die rücklaufenden Reihen geleitet, deren Theorie er in der Schrift, Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Londini 1730, vortrug.

Ein noch gegenwärtig sehr geschätztes Werk ist Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, auct. Iacobo Stirling. Londini, 1730. 154 pag in 4. Es ist darin nicht die Absicht zu finden, welche Reihen summirbar sind, sondern durch schickliche Verwandlungen der Formen solche Reihen, die langsam convergiren, schnell convergiren zu machen. Eine mäßige Anzahl von Gliedern einer Reihe wird etwa nur unmittelbar zu berechnen seyn, worauf sich für alle übrigen eine schnell convergirende Reihe ergiebt, in solchen Fällen nämlich, wobey sich des Verfassers Methode anwenden läßt. In dem Artikel, Summirung der Reihen, wird dieses Verfahren beschrieben werden.

Der zweyte Theil von Eulers Institt. Calculi differentialis enthält viele und vortreffliche Untersuchungen über die Theorie der Reihen, ihre Transformation, Entwickelung und Summirung.

Das ausführlichste Werk über die Reihen ist Traité des différences et des series, par Lacroix, sec. ed. à Paris 1819., welches zu des Verfassers Werk über die Differential- und Integralrechnung gehört. Es enthält sehr allgemeine Untersuchungen, die zum Theil aus einer sehr tiefsinnigen Abhandlung von la Place über die Reihen, Mém. de l'Acad. des Sc. 1779, p. 207 — 309 genommen sind.

Einzelne Abhandlungen über die Reihen findet man in Murchards Literatur der mathem. Wissenschaften Th. II. S. 262 — 273 verzeichnet. Freylich nicht vollständig, wie gewöhnlich.

Maclaurin giebt in seinem Werke über die Fluxionen, Ch. X. Bemerkungen über die Summen der Progressionen, betreffend ihre Gränzen, ihre Beschaffenheit und die Mittel sich ihnen schnell zu nähern.

Landen liefert in seinen Mathematical Lucubrations, London 1755 einige allgemeine Lehrsätze, die zur Summirung der Reihen, es sey vollständiger oder genäherter, dienen. So auch Thomas Simpson in seinen Miscellaneous tracts, London, 1757. Hutton hat sich auch mit diesem Gegenstande beschäftigt, in den Tracts on mathematical and philosophical subjects; London; 1812. Seine Methode, aus der berechneten Summe einer Anzahl Glieder in einer sehr langsam convergirenden Reihe sich dem wahren Werthe der Reihe bald zu nähern, ist sinnreich und einfach.

Lorgna's Methode zur Summirung der Reihen (Specimen de seriebus convergentibus. Veronae, 1775) besteht in Zurückführung derselben auf ein bestimmtes Integral. Die erste Idee, die Summirung der Reihen auf die Integration einer Differentialformel oder Differentialgleichung zurück zu führen, haben Leibnitz und Joh. Bernoulli gehabt. (Commerc. epistol. Tom. I. p. 213). Euler handelt davon in seiner Integralrechnung. Th. 2. Kap. 11.

Pfaff (Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin, 1788.) summirt mehrere Gattungen unendlicher Reihen dadurch, daß ihre Glieder selbst wieder in unendliche Reihen aufgelöset werden. Diese Methode erstreckt sich sehr weit.

Relation ist die Art, wie eine Größe von andern abhängt. Die Coordinaten an einer krummen Linie haben eine gewisse Relation gegen einander, zufolge der Beschaffenheit der Curve. Diese Relation wird hier, wie überhaupt, durch eine Gleichung ausgedrückt.

Das Verhältniß zweyer Größen, es sey das geometrische oder das arithmetische, ist die einfachste Gattung einer Relation.

Relativ ist, was mit einer Beziehung auf eine andere Größe gedacht wird, in Gegensetz des Absoluten. So ist eine negative Größe etwas relatives, weil dabey Rücksicht auf eine andere, zwar ähnliche, Verbindung der Größen genommen wird, worin diese Größe aber in einer andern Beziehung gegen die andern Größen gesetzt ist. Relativ zunehmen oder abnehmen ist bey einer negativen Größe absolut abnehmen oder zunehmen. — Relative Bewegung ist die Bewegung nach einer Richtung, die von der wirklichen Richtung verschieden ist.

Reptorius motus ist die sich parallele Bewegung einer krummen Linie längs einer andern Curve, wobey jene diese immerfort berührt, indem die Axe jener sich parallel bleibt. Dadurch wird von einem gegebenen Puncte der bewegten Curve, oder auch von einem Puncte ihrer Axe eine neue Curve beschrieben. Die Schleifung der bewegten Curve kann entweder so geschehen, daß beide ihre convexen Seiten einander zuwenden, oder daß die convexe Seite der bewegten die concave der andern berührt. Die erzeugte Curve hat die Eigenschaft, daß jeder Bogen derselben so groß ist als die Summe oder der Unterschied der Bogen, welche auf den beiden Curven, der unbewegten und der verschobenen zu einander und zu dem erzeugten Bogen gehören. Die Summe ist es, wenn der convexe Bogen

auf dem converen hingleitet, der Unterschied, wenn dieses auf der concaven Seite geschieht.

Joh. Bernoulli hat diese Erzeugungsart einer krummen Linie erdacht, die aber nicht weiter benutzt ist. Operum T. I. Nr. 74.

Residual-Analysis ist eine besondere Form der Fluxionen oder Differentialrechnung, welche Landen in einer Schrift: The residual Analysis, a new branch of the analytic art, London, 1764, vorgeschlagen hat. Da ich die Schrift nicht zur Hand habe, so entlehne ich die folgende Nachricht und Beurtheilung aus Lagrange's Théorie des fonctions analytiques. p. 5. Anstatt der bis dahin von den Englischen Geometern unverbrüchlich befolgten Methode der Fluxionen wollte Landen eine blos analytische, welche der Differentialrechnung verwandt ist, setzen, nur daß er anstatt der unendlich kleinen oder ganz verschwindenden Differenzen der veränderlichen Größen zuerst verschiedene Werthe dieser Größen ansetzt, darauf dieselben gleich nimmt, nachdem der Factor, der durch diese Gleichstellung Null werden mußte, durch die Division weggeschafft ist. Dadurch, sagt La Grange, werden freylich die unendlich kleinen und verschwindenden Größen vermieden; allein die Verfahrungsart und die Anwendung der Rechnung sind unbequem und unnatürlich. Was die Differentialrechnung in Absicht auf die Strenge der Gründe gewinnen soll, verliert sie wieder in Rücksicht wesentlicher Vorzüge, der Einfachheit ihrer Methode und der Leichtigkeit ihrer Rechnungsart.

Residuum binomiale, s. Apotome.

Rest (Residuum) ist erstlich der Überschuß einer Größe über eine andere, die von jener weggenommen wird; zweytens der Überschuß einer Größe über das möglich größte Vielfache einer andern, welche als

Divisor mit jener als Dividenden verglichen wird. In allgemeinen Rechnungen kann ein Rest auch negativ seyn.

Rest in der erstern Bedeutung heißt auch der Unterschied oder Differenz.

Rest, quadratischer, ist der Überschuß einer Quadratzahl über das möglich größte Vielfache irgend einer andern Zahl. Wenn diese andere Zahl eine Primzahl ist, so kommen den quadratischen Resten, welche aus der natürlichen Zahlenreihe entstehen, merkwürdige Eigenschaften zu. Euler hat dieselben untersucht in zwey Abhandlungen, welche in den Opuscul. analyt. T. I. enthalten sind. In der ersten erweist er unter andern, daß wenn der Divisor P eine Primzahl von der Form $4q + 1$ ist, allemal -1 oder $P - 1$ unter den quadratischen Resten vorkomme, daß aber dies nicht der Fall sey, wenn der Divisor die Form $4q + 3$ hat. In der andern Abhandlung zeigt er unter andern auf eine kürzere Art, als dies früher von ihm geschehen war, daß, wenn p eine Primzahl von der Form $4m + 1$ ist, es auf mehrley Art möglich sey, zwey Quadratzahlen, deren Wurzeln nicht größer als 2m, anzugeben, so daß ihre Summe durch p theilbar sey. Hieraus folgt dann vermittelst des Satzes, daß die Summe zweyer Quadrate wiederum nur durch eine solche Summe theilbar ist, der Satz, daß jede Primzahl von der Form $4m + 1$ die Summe zweyer Quadrate sey. Gauß handelt von den quadratischen Resten Disquis. arithm. Sect. IV.

Retrocessio, oder Retrogradatio, oder Retrogressio einer krummen Linie ist nach Huttons Ausgabe dasselbe, was Wendungspunct. Besser würde man einen Rückkehrpunct dadurch bezeichnen.

Reversio serierum, s. Umkehrung der Reihen.

Reversionsproblem, s. eb. das.

Rhabdologia, s. Instrumentale Arithmetik, Th. II. S. 739. Als Nachtrag zu jenem Artikel mag noch angemerkt werden, daß auch Claude Perrault einen Abacus rhabdologicus angegeben hat, welcher in dem 4ten Th. seiner vermischten Werke beschrieben ist.

Rhetice oder Exegetice wird von Vieta der Inbegriff der Methoden genannt, die Wurzeln einer Gleichung zu finden.

Rhodonea ist die Benennung gewisser krummen, in einem Kreise construirten, Linien, die von ihrer Ähnlichkeit mit einer Rose (ῥοδον) so genannt wird. Der Pater Guido Grandi, ein sehr guter Geometer im Anfange des 18ten Jahrhunderts, übergab im Jahre 1723 der Königl. Gesellschaft zu London eine Schrift über diese Curve, welche aus einer Reihe von Blättern oder aus mehreren, die sich zum Theil decken, besteht. Die Fläche jedes Blattes ist die Hälfte des einschließenden Kreissectors. Auf ähnliche Art zeichnete Grandi auch Curven auf einer Kugelfläche, und nannte sie Cleliae, zu Ehren der Gräfinn Clelia Borromei, welcher er diese geometrischen Blumen widmet, weil sie im Stande sey, ihren Geruch zu empfinden und zu schätzen. Er hat über beyderley krumme Linien eine besondere Schrift herausgegeben: Flores geometrici ex Rhodonearum et Cleliarum curvarum descriptione resultantes, Florentiae, 1728.

Rhomboides, ein Parallelogramm mit schiefen Winkeln und ungleichen Seiten.

Rhombus, ein Parallelogramm mit schiefen Winkeln und gleichen Seiten.

Ein körperlicher Rhombus ist ein aus

zwey gleichseitigen und gleichen Kegeln an den Grundflächen zusammengesetzter Körper. Archimedes gebraucht diese Benennung in der Schrift von Kugel und Cylinder. In dem 19ten Satze des 1sten Buchs zeigt er, daß ein aus (zwey gleichen) gleichschenkligen Kegeln zusammengesetzter Rhombus gleich ist einem Kegel, dessen Grundfläche der Oberfläche des einen jener Kegel, und dessen Höhe dem von der Spitze des andern Kegels auf eine Seite des ersten gefällten Lothe gleich ist.

Durch die Formeln unserer rechnenden Geometrie ist dieses leicht erwiesen. Der Halbmesser der Grundfläche sey $= a$, die Höhe jedes Kegels $= b$, so ist der Inhalt eines der Kegel $= \frac{1}{3} \pi aab$; des Rhombus $= \frac{2}{3} \pi aab$. Es sey φ der halbe Winkel an der Spitze des erzeugenden Dreyecks, so ist die Seite des Kegels $= \frac{a}{\sin \varphi}$, die Oberfläche $= \pi a . \frac{a}{\sin \varphi}$; das Perpendikel von der Spitze des einen Kegels auf eine Seitenlinie des andern $= 2 b \sin \varphi$. Nimmt man jene Oberfläche zur Grundfläche, diese senkrechte zur Höhe eines Kegels, so ist dessen Inhalt

$$= \frac{1}{3} . \frac{\pi aa}{\sin \varphi} . 2 b \sin \varphi = \frac{2}{3} \pi aab.$$

Das griechische Stammwort bedeutet im Kreise herumdrehen, daher die Benennung Rhombus eigentlich auf den Doppelkegel paßt.

Rhombica linea, s. Loxodromie in der zweyten Abtheilung dieses Werks.

Riccati's Gleichung ist die Differentialgleichung, $\partial y + ay^2x^m\partial x = bx^n\partial x$. Der Conte Giacomo Riccati legte sie in den Actis Erud.

Supplem. T. VIII. (1724) p. 73 den Analysten in folgender Form vor: $x^m \partial q = \partial u + uu\partial x : q$. Der Exponent m ist willkührlich. Nun ist die Aufgabe, wenn $q = x^n$ gesetzt wird, diejenigen Werthe von n zu bestimmen, bey welchen die Sonderung der veränderlichen Größen und die Construction der Gleichung durch Quadraturen allein bewerkstelligt werden mögen. Die Gleichung pflegt in der anfangs angegebenen Form vorgetragen zu werden. Euler hat ihr in seiner Integralrechnung, T. I. §. 436, die einfachere Form $\partial y + yy\partial x = ax^m \partial x$ gegeben. Diese wird erhalten, wenn in jener Gleichung $x^m \partial x = \partial t$ gesetzt wird. Montucla giebt ihr die allgemeinere, $ax^m y^p \partial x + by^2 x^n \partial x = \partial y$, (Hist. des Mathém. T. III. p. 177.), welche aber nicht mehr die Riccatische zu seyn scheint. Daniel Bernoulli fügte dem Aufsatze von Riccati, an dessen Schlusse die Aufgabe befindlich ist, seine Auflösung bey, aber in Chiffren. Er erwähnt dabey, daß sein Vater, sein Bruder und Neffe auch Auflösungen gefunden hätten, mit denselben Werthen für den Exponenten n. Goldbach lieferte auch eine in dem ersten Theile der Petersburger Commentarien. Von Johann Bernoulli befindet sich eine Auflösung der Gleichung, $as^m \partial s + bu^q s^p \partial s = \partial u$, in dem IV. Th. seiner Werke. Man sehe auch den Traité du calcul intégral par Bougainville T. II. nr. 118 — 121, und die Integralrechnung von la Croix an mehrern Stellen; in diesem Wörterbuche den Artikel, Integralgleichung, 15.

Ring, der Flächenraum zwischen zwey concentrischen Kreisen, s. Armilla. Ein cylindrischer Ring ist der Raum zwischen zwey gleich hohen Cylindern mit einer gemeinschaftlichen Axe. Die beiden Halbmesser seyn a, und a + u, die Höhe = h, so ist der cylindrische, von ihren krummen Flächen eingeschlossene Raum $= \pi(a + u)^2 h - \pi aah = 2\pi hau + \pi huu$.

Ringförmiger Körper ist ein Körper, der durch eingeschlossene Figur, als einen Kreis, eine Ellipse, oder auch von dem Abschnitte einer schicklichen Figur, durch die Umdrehung ihrer Ebene um eine in dieser befindliche Axe erzeugt wird. Ein offener Ring ist, wenn die Axe außerhalb der Figur liegt; ein geschlossener, wenn sie die krumme Linie berührt. Geht sie durch die Figur, so entsteht ein runder Körper.

1. Kepler hat sich zuerst mit dieser Art der Entstehung eines geometrischen Körpers beschäftigt, in dem Anhange zu der Nova Stereometria doliorum. Lincii 1615, besonders mit der Messung der Körper, die durch die Umdrehung eines Kreises oder einer Ellipse um eine Chorde entstehen, dabey auch mit solchen, die von einem Abschnitte dieser Figuren hervorgebracht werden. Die erstern vergleicht er, einiger Ähnlichkeit wegen, mit Äpfeln, Quitten, Pflaumen, Melonen, Kürbissen. Seine Methode den Inhalt zu berechnen ist sinnreich, und ist eine Analysis des Unendlichen. Cavaleri nahm die Messung nach seiner Methode des Untheilbaren vor. Der Jesuit Tacquet verfaßte ein starkes Werk, Cylindracea et Annularia betitelt, welches 142 Folioseiten einnimmt. In dem ersten Theile desselben handelt er von den hufförmigen Abschnitten eines senkrechten Cylinders, ihrem Inhalt und der Vergleichung ihrer krummen Oberfläche, in dem zweyten von den Körpern, die durch Herumführung eines Kreises und eines Kegelschnittes entstehen.

Für unsere Integralrechnung ist die Untersuchung, zu welchen jene Geometer eine kunstreiche Zurüstung gebrauchten, leicht. Sie liefert einige artige Vergleichungen, weswegen ich etwas davon beybringen werde, auch als Ergänzung des Artikels, Cubirung.

2. Es sey BAB (Fig. 26.) die Axe, um wel-

che sich die Ebene eines aus C beschriebenen Kreises drehet. Der Durchmesser desselben DD sey der Axe parallel, und der Durchmesser EF auf dieselbe senkrecht. Dieser Kreis beschreibt durch die Herumführung um BAB einen körperlichen Ring, dessen äußerer Halbmesser AE, innerer AF ist. Eine mit DD parallele Chorde MM beschreibt eine cylindrische Oberfläche; der zwischen zwey solchen, von MM und mm beschriebenen Flächen enthaltene körperliche Raum ist die Zunahme des von dem Kreisabschnitte DMMD beschriebenen Raumes. Für diese Zunahme ist nun ein von der Größe des Abstandes Pp der Chorden unabhängiger Ausdruck zu suchen.

3. Der Halbmesser des Kreises sey CE $= a$, der Abstand des Mittelpunctes C von der Axe BAB sey AC $= b$; CP $= x$; PM $= y$; Pp $= \Delta x$; PM $-$ pm $= \Delta y$; der von dem Segmente DM beschriebene Körper sey $= Z$, der von Dm $= Z + \Delta Z$. Es ist $\Delta Z < 4\pi y\,(b + x)\,\Delta x + 2\pi y \Delta x^2$, und $\Delta Z > 4\pi\,(y - \Delta y)\,(b + x)\,\Delta x + 2\pi\,(y - \Delta y)\Delta x^2$. Daraus folgt die von der Größe der Differenzen Δx, Δy, ΔZ, unabhängige Differentialgleichung, $\partial Z = 4\pi y (b + x)\partial x$.

Es ist

$$\int y \partial x = \int \partial x \sqrt{(aa - xx)} = \frac{1}{2} x \sqrt{(aa - xx)}$$

$$+ \frac{1}{2} aa \int \frac{\partial x}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{1}{2} x \sqrt{(aa - xx)}$$

$+ \frac{1}{2}$ aa Ang.sin $\frac{x}{a}$. Integralformel, 57. 49. Ferner ist $\int x \partial x \sqrt{(aa - xx)} = - \frac{1}{3} (aa - xx)^{\frac{3}{2}}$, daselbst 59. II. Folglich ist

$$Z = 2\pi bx\sqrt{(aa - xx)} + 2\pi a\ ab\ \text{Ang.sin}\frac{x}{a}$$
$$- \frac{4}{3}\pi(aa - xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\pi a^3,$$

wo $\frac{4}{3}\pi a^3$ die erforderliche Constante ist.

Oder

$$Z = 2\pi bxy + 2\pi aab\ \text{Ang.sin}\frac{x}{a} + \frac{4}{3}(a^3 - y^3).$$

Der äußere von dem Halbkreise DED beschriebene Körper ist $= \pi^2 aab + \frac{4}{3}\pi a^3$.

4. Auf dem Halbmesser CF nehme man CQ = x, und ziehe durch Q die Chorde NQN senkrecht auf CF; der von dem Kreisabschnitte DNND beschriebene Körper sey $= Z'$, so ist $\partial Z' = 4\pi y(b - x)\partial x$; und

$$Z' = 2\pi bxy + 2\pi aab\ \text{Ang.sin}\frac{x}{a}$$
$$- \frac{4}{3}\pi(a^3 - y^3).$$

Der innere von dem Halbkreise DFD beschriebene Körper ist $= \pi^2 aab - \frac{4}{3}\pi a^3$.

5. Der Unterschied des äußern und innern Ringes ist $\frac{8}{3}\pi a^3$, das Doppelte der mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel.

6. Der ganze von dem Kreise beschriebene körperliche Ring ist $= 2\pi^2 aab$, so groß als ein Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis (πaa) und die Hö-

he der Umfang des mit dem Halbmesser b beschriebenen Kreises ($2\pi b$) ist.

7. Dieses ist ein Fall des Satzes, daß der Inhalt eines Körpers, der durch die Umdrehung einer Figur um eine Axe erzeugt wird, das Product aus der Figur in den Weg ihres Schwerpunctes ist, s. Centrobaryca methodus.

8. Man mache CQ = CP, so ist der von dem zwischen den parallelen MM, NN und den beiden Bogen MN enthaltenen Segmente beschriebene cylindrische Ring $= 2\pi b \left(2xy + 2aa \text{ Ang. sin} \frac{x}{a} \right) =$ $2\pi b \times$ Segm. MNNM. Dieser Raum ist ebenfalls das Product aus dem Inhalte der bewegten Fläche in den Weg ihres Schwerpunctes.

9. Man nehme anstatt des Kreises eine Ellipse, deren eine Axe DD, die andere EF ist, und welche sich wie $m : n$ verhalten, so ist $y = \frac{m}{n} \sqrt{(aa - xx)}$, (Ellipse, 5.) und der Unterschied des innern und äussern Ringes ist $= \frac{8}{3} \cdot \frac{m}{n} \pi a^3$. Die Summe ist $= \frac{m}{n} \cdot 2\pi^2 a^2 b$.

10. Es sey EF die grössere Axe, und DD die kleinere, so ist das gedruckte Sphäroid, das durch die Umdrehung um DD beschriebene $= \frac{4\pi}{3} \cdot CE^2 \cdot CD$, (Sphäroid), und die elliptische Fläche $= \pi \cdot CE \cdot CD$. Ist EF die kleinere Axe, so ist das ablange Sphäroid, das durch die Umdrehung um DD beschriebene, $= \frac{4\pi}{3} \cdot CD \cdot CE^2$. Die elliptische Fläche ist, wie

vorher $= \pi . CD . CE$. Es ist also der Unterschied des innern und äußern Ringes das Doppelte des Sphäroids, welches durch die Umdrehung um die mit der Axe der Herumführung BAB parallele Axe entsteht. Der elliptische Ring selbst ist die elliptische Fläche in dem Umfang des mit b beschriebenen Kreises multiplicirt.

11. Die um die Axe BAB (Fig. 27.) herumgeführte Figur sey eine Parabel EDF, deren Axe CD ist. Der Parameter derselben sey $= a$, die Höhe des parabolischen Segments $CD = h$, die halbe Grundlinie $CE = g$, so ist $ah = g^2$. Wie vorher sey $AC = b$, $PC = x$, $PM = y$, so ist $a(h - y) = xx$, daher $ay = ah - xx = g^2 - x^2$. Der von DCPM beschriebene Ring sey Z, so ist $\partial Z =$

$$2\pi(b + x)\, y\partial x = \frac{2\pi}{a}(b + x)\ (g^2 - x^2)\ \partial x$$

$$= \frac{2\pi}{a}\ (bg^2 - bx^2 + g^2x - x^3)\ \partial x.$$ Daher $Z =$

$$\frac{2\pi}{a}\left(bg^2x - \frac{1}{3}\ bx^3 + \frac{1}{2}g^2x^2 - \frac{1}{4}\ x^4\right),$$ wo die Constante $= 0$ ist.

Der von DCQN beschriebene Körper ist Z'

$$= \frac{2\pi}{a}\left(bg^2x - \frac{1}{3}\ bx^3 - \frac{1}{2}\ g^2x^2 + \frac{1}{4}\ x^4\right).$$

Der äußere von DCE beschriebene Ring, $x = g$ gesetzt, ist $= \dfrac{2\pi g^3}{a}\left(\dfrac{2}{3}\ b + \dfrac{1}{4}\ g\right)$; der innere von DCF beschriebene ist $= \dfrac{2\pi g^3}{a}\left(\dfrac{2}{3}\ b - \dfrac{1}{4}g\right)$.

Der Unterschied ist $= \dfrac{\pi g^4}{a} = \pi g^2 h$; Die Summe

oder der ganze ringförmige Körper ist $= \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{bg^3}{a}$

$= \frac{8\pi}{3} \cdot bgh = 2\pi b \cdot \frac{4}{3} gh.$

12. Das parabolische Konoid, dessen Höhe DC, und die Grundfläche der mit dem Halbmesser CE beschriebene Kreis ist, ist $= \frac{1}{2} \pi hg^2$; (Cubirung, I.). Die Fläche der Parabel ist $= \frac{4}{3}$ gh (Parabel.). Es ist also der Unterschied des innern und äußern Ringes auch hier doppelt so groß, als der von der Figur um die Axe DC beschriebene Körper, und der ganze Ring gleich einem Cylinder über der beschreibenden Figur mit der Höhe, so groß als der Umfang des von C beschriebenen Kreises.

13. Die Axe einer Parabel MCM (Fig. 28.) sey senkrecht auf die Axe der Herumführung; der Parameter sey $= a$; der Abstand des Scheitels von BAB $= b$; CP $= x$; PM $= y$; der von MCM beschriebene Körper $= Z$, so ist $\partial Z = 4\pi (b - x) y\partial x =$

$4\pi (b - x) a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \partial x = \frac{4\pi a (b - x)}{\sqrt{a}} x^{\frac{1}{2}} \partial x.$

Daraus ist

$$Z = \frac{4\pi a}{\sqrt{a}} \left(\frac{2}{3} bx^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{8\pi}{15} xy (5b - 3x).$$

14. Der Inhalt des Ringes, der von dem Kreisabschnitte MEM (Fig. 26.) beschrieben wird, ist der Unterschied des von den Halbkreisen und den Abschnitten DMMD beschriebenen Ringes. Man kann denselben aber auch unmittelbar finden, wie gleich vorher den parabolischen.

15. Es sey AE $=$ c, EP $=$ z, der von MEM beschriebene Ring $=$ U, so ist $\partial U = 4\pi(c-z)y\partial z$ $= 4\pi(c-z)\sqrt{(2az-zz)}\,.\,\partial z$.

$$= \frac{4\pi(2acz - (2a+c)z^2 + z^3}{\sqrt{(2az-z^2)}}\partial z.$$ Das Integral wird aus Integralformel, 71. gefunden. Es ist

$$U = 4\pi\left(\frac{1}{2}a^2(c-a)\,\text{Ang.sin}\frac{y}{a} - \frac{1}{2}a(c-a)y\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a+c\right)zy - \frac{1}{3}z^2y\right).$$

Die Constante $= 0$.

16. Die Axe der Herumführung gehe durch den Mittelpunct C, so ist die ringförmige, von dem Segmente MEM beschriebene Zone $V = \frac{4}{3}\pi zy(2a-z)$. Man setze $a - x$ statt z, so ist

$$V = \frac{4}{3}\pi y(a-x)(a+x)$$
$$= \frac{4}{3}\pi y(a^2-x^2) = \frac{4}{3}\pi y^3.$$

17. Die Chorde NN sey die Axe der Herumführung oder der Drehung des größern Segments NEN, so entsteht ein runder Körper, der dicker als hoch ist. Man setze CQ $=$ g, QN $=$ h, so ist der von dem Halbkreise DED beschriebene Körper $=$ $\pi^2 aag + \frac{4}{3}\pi a^3$, nach (3.). Den von dem Segmente DNND beschriebenen zu finden, setze man in (4.) in dem Werthe von Z′ statt b hier g, und nehme das Integral von o bis bis $x = g$, wodurch $y = h$ wird, und es ist dieser Körper

u

$$U = 4\pi\left(\frac{1}{2}a^2(c-a)\,\text{Ang.sin}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}a(c-a)h + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a + c\right)ch - \frac{1}{3}c^2h\right),$$

und nach gehöriger Reduction,

$$U = 4\pi\left(\frac{1}{2}a^2h - \frac{1}{3}ach + \frac{1}{6}c^2h - \frac{1}{2}a^2(a-c)\,\text{Ang sin}\frac{h}{a}\right).$$

Es ist $h^2 = 2ac - cc$, also werden die drey ersten Glieder des Factors zu 4π diese, $\frac{1}{2}a^2h - \frac{1}{6}h^3 = \frac{1}{2}(h^2 + g^2)h - \frac{1}{6}h^3 = \frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}g^2h$. Da $g = a - c$ ist, so ist

$$U = \frac{4}{3}\pi h^3 - 2\pi g\left(a^2\,\text{Ang sin}\frac{h}{a} - gh\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi h^3 - 2\pi g \times \text{Segm. MEM.}$$

22. Der Unterschied der beiden runden Körper in (20. 21.) ist $= 4\pi g\left(a^2\,\text{Ang.sin}\frac{h}{a} - gh\right)$ $= 4\pi g \times \text{Segm. MEM.}$

23. Die Sätze (6, 19, 20.) sind von Kepler; der Satz (5.) ist von Tacquet. Den äußern und innern Ring vergleicht Tacquet mit einem Abschnitte eines Cylinders über der Figur, welche den Ring beschreibt. Keplers Verfahren, jene Sätze zu finden, ist sinnreich. Er errichtet über dem Kreise EDFD (Fig. 26.) einen senkrechten Cylinder, dessen Höhe dem Umfange des Kreises, welchen QE bey der

Drehung beschreibt, gleich ist. In diesem nimmt er einen hufförmigen Abschnitt über dem Kreisabschnitte NEN als Grundfläche und in der Höhe des Cylinders. Ein senkrechter Schnitt in dem Hufe durch irgend eine mit der Drehungsaxe parallele MM ist gleich der von MM beschriebenen cylindrischen Fläche, und der hufförmige Körper ist gleich dem runden von NEN erzeugten. Der senkrechte prismenartige Abschnitt desselben über MNNM ist gleich dem cylinderartigen von MNNM in dem runden Körper um NN beschriebenen und der Abschnitt über MEM ist gleich dem ringförmigen Theile des runden Körpers, wenn die Bogen DM, DN gleich groß genommen werden. Dieser Abschnitt über MEM besteht aus zwey Stücken, einem senkrechten cylinderförmigen über MEM, dessen Höhe der Umfang des von QC beschriebenen Kreises ist, und einem, welches dem von MEM in der Kugel beschriebenen Ringe gleich ist, und eben so, wie jener, aus einem cylindrischen Theile und einem hufförmigen besteht.

24. Allgemein sey EDF (Fig. 27.) irgend eine krumme Linie, welche durch eine Axe DC in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt wird. Wie vorher sey, $AC = a$, PC oder $CQ = x$, PM oder $QN = y$, der von DMPC durch die Drehung um BAB (mit DC parallelen) beschriebene Körper $= Z$, der von DNQC beschriebene $= Z'$, so ist

$$\partial Z = 2\pi (b + x) y\partial x$$
$$\partial Z' = 2\pi (b - x) y\partial x$$

also

$$Z = 2\pi b \int y\partial x + 2\pi \int xy\partial x + C.$$
$$Z' = 2\pi b \int y\partial x - 2\pi \int xy\partial x - C'.$$

Wenn das $\int y\partial x$ keiner Constante bedarf, damit es für $x = 0$ auch 0 sey, so sind die beiden Constanten C, C' sich gleich, und es ist, wenn $x = CE = CF$ genommen wird,

$= \frac{1}{4} \pi cc = \frac{1}{2} \pi a (a - \sqrt{(aa - xx)})$. Jener Unterschied ist also achtmahl so groß als die Fläche dieses Kreises.

Die Sätze, 28. 29. 31 hat Tacquet gefunden.

32. Eine praktische Anwendung kann man auf das Visiren oder die Ausmessung der Fässer machen. Es sey BAB (Fig. 28.) die Axe eines Fasses, MM die Höhe desselben, MCM die Ausbauchung, so besteht das Faß aus zwey Theilen, einem cylindrischen, dessen Halbmesser BM, Höhe MM ist, und dem von MCM beschriebenen ringförmigen Raume. Man wird meistens MCM für einen Kreisbogen nehmen können.

Zu vergleichen ist eine Abhandlung von Kästner über die Ausmessung bauchichter Körper in dem Leipziger Magazin für Mathematik, Jahrg. 1787. 1. St.

Rückkehrpunct oder Spitze (cuspis, sive punctum reflexus, *point de rebroussement*) ist ein Doppelpunct an krummen Linien, in welchem zwey Zweige neben einer gemeinschaftlichen berührenden zusammenstoßen, und jeder sich daselbst endigen. Es sind zweyerley Lagen hier möglich. Die beiden Zweige liegen entweder auf verschiedenen Seiten der berührenden und kehren sich die convexen Seiten zu, wie in Fig. 29; oder sie liegen auf derselben Seite, die convexe Seite des einen Zweiges gegen die concave des andern gekehrt, wie in Fig. 30. Die letztere Vereinigung zweyer Zweige nennt man auch einen Schnabel, rebroussement en bec.

1. An den Linien der zweyten Ordnung ist kein Rückkehrpunct möglich. Denn da ein solcher Punct für zwey gilt, so würde eine gerade Linie durch denselben und einen andern Punct die krumme Linie in drey Puncten schneiden, welches nicht möglich ist. Aber an den Linien der dritten Ordnung kommen Rückkehr-

puncte vor, da diese Linien von einer geraden Linie in drey Puncten geschnitten werden können. Sie entstehen, wenn eine Ovale in einen Punct sich zusammenzieht, wie in Th. III. Tab. XIX. Fig. 59. 60., wobey die beiden berührenden in dem Durchschnittspuncte in eine einzige gerade zusammenfallen. Die beiden Zweige liegen hier auf verschiedenen Seiten der berührenden. Denn die zweyte Lage der beiden Zweige, die eine Spitze machen, ist nur an den Linien der vierten Ordnung und höherer möglich, weil eine gerade Linie, die durch den Rückkehrpunct und zwey Puncte auf den beiden Zweigen gezogen wird, die Curve noch ein- oder mehrmahl schneidet.

2. Es seyn AC, BC (Fig. 29.) zwey Zweige einer krummen Linie, deren übrige Zweige hier nicht in Betracht kommen, und CE sey die gemeinschaftliche berührende zwischen ihnen in dem Puncte C. Die Coordinaten an dem concaven Zweige seyn $AP = x$, $PM = y$, so ist an diesem das Differential $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negativ, welches an dem convexen Zweige positiv ist (Concav u. Convex, 12.). Daher ist in C, wo der Übergang von dem einen zu dem andern geschieht, der Quotient $= 0$. Der Übergang vom Negativen zum Positiven geschieht hier nicht durch das Unendlichgroße, weil an der geraden Linie, durch welche der Übergang geschieht, der Quotient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ ist.

Auch ist in dem Rückkehrpuncte der Halbmesser der Krümmung unendlich groß als welcher für die entgegengesetzten Zweige auch eine entgegengesetzte Beschaffenheit hat. Krümmungskreis, 3. In dem gegenwärtigen Falle kann der Übergang für denselben vom Positiven zum Negativen nicht durch Null geschehen, weil er für die gerade berührende unendlich groß ist.

und $\partial^2 y = \frac{3}{4} a^2 x^{-1:2} (a - x)^{-5:2} \partial x^2$, auf ähnliche Art, wie an jener Parabel. Um die Beschaffenheit der Curve nahe bey der Spitze zu erkennen, suche man eine steigende Reihe für y durch x, wobey es nur nöthig ist die drey ersten Glieder zu bestimmen. Es ist

$$y = x^{3:2} (a - x)^{-1:2}, \text{ oder}$$

$$y = x \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ das ist}$$

$$y = x \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a} + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \text{etc.}\right)$$

oder

$$y = a \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{7}{2}} + \text{etc.} \right)$$

9. Den Rückkehrpunct an einer krummen Linie, wenn ein solcher vorhanden ist, zu finden, suche man aus der Gleichung zwischen x und y den Quotienten $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, wobey das Differential ∂x constant genommen werde, setze denselben $= 0$, so hat man eine Gleichung zwischen x und y, welche mit der gegebenen Gleichung zwischen denselben verbunden, durch Elimination eine bestimmte Gleichung sowohl für x als für y giebt, welche die Coordinaten zu dem Rückkehrpuncte sind. Es sey $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{N}$, wo M und N Functionen von x und y sind, so ist entweder $M = 0$, oder N unendlich groß zu nehmen. Allein die Rechnung kann sehr weitläufig werden.

10. An den Linien der dritten Ordnung kann der Rückkehrpunct ohne Hülfe der Differentialrechnung gefunden werden. Es sey die Gleichung für eine solche: $y^3 + x^2 y - ay^2 - by - 2cx - d = 0$,

(Krumme Linien der zweyten Classe, 32 u. f.), so ist

$$x = \frac{c}{y} \pm \frac{\sqrt{(c^2 + dy + by^2 + ay^3 - y^4)}}{y}.$$

Für jede Wurzel der Gleichung,

$$(Y)\; y^4 - ay^3 - by^2 - dy - c^2 = 0,$$

hat x nur einen einfachen Werth, oder wird, als Ordinate betrachtet, aus einer schneidenden eine berührende, wenn die Wurzel der Gleichung nur einfach ist, wie Tab. XIX. Fig. 58. Ist die Wurzel zweyfach, so gehen zwey Berührungspuncte in einen Durchschnittspunct zusammen, Fig. 59. Ist die Wurzel dreyfach, so ist ein Rückkehrpunct vorhanden, Fig. 60. Damit die Gleichung (Y) drey gleich große Wurzeln habe, müssen die Formen der Coefficienten folgende seyn,

$$a = 3p - q; \quad b = 3p(q - p);$$
$$d = -p^2(3q - p); \quad c^2 = p^3q,$$

aus Gleichung, 83, wenn daselbst die drey Wurzeln, p, r, s, sich gleich, und q negativ genommen werden. Für den Rückkehrpunct sind die Coordinaten,

$$y = p; \; x = \frac{\sqrt{p^3q}}{p} = \sqrt{pq}.$$

Die Lage der berührenden in dem Rückkehrpuncte zu finden, suche man den Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, als der Tangente des Winkels, welchen die berührende mit der Abscissenlinie (der Axe der x) macht. Es ist überhaupt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2c - 2xy}{3y^2 + x^2 - 2ay - b}.$$

Setzt man hier $y = p$, $x = \sqrt{pq}$, so werden Zähler und Nenner jeder $= 0$, oder $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, eben so wie bey einem Knoten oder Durchschnittspuncte zweyer Zweige, (berührende Linie, 23 ff.). Um den Werth

gebenen Gleichung richtet sich auch nach dieser Annahme.

In Kästners Analysis des Unendlichen §. 520. I. ist die Gleichung so vorgetragen, daß noch kein Differential constant genommen ist. Es sind daselbst, S. 604. Z. 8 u. 9, zwey Druckfehler zu verbessern. Um daraus die obigen Gleichungen herzuleiten, muß statt $\frac{\partial x}{r}$ gesetzt werden $\partial \varphi$, und $\frac{\partial u}{r \partial \varphi}$ statt p.

14. Bey der zweyten Art des Rückkehrponctes (Fig. 30.) liegen die beiden Zweige AC, CB, welche in ihm zusammen kommen, an derselben Seite der gemeinschaftlichen in C berührenden CE. Hier ist kein Übergang vom Concaven zum Converen; der Halbmesser der Krümmung kann hier also endlich seyn. Die berührende CE ist die äußerste der berührenden an beiden Zweigen, und daher ist der Abstand ihres Durchschnittspunctes E mit der Are der Abscissen von A oder einem andern bestimmten Puncte auf derselben, zwar größer als bey andern berührenden, aber doch nicht ein Größtes, in dem Verstande, daß das Differential von AE Null wäre. Denn wenn der Abstand $\frac{y \partial x}{\partial y} - x$ in diesem Verstande ein Größtes, also $\frac{y \partial x \partial^2 y}{\partial y^2} = 0$ wäre, so wäre der Halbmesser der Krümmung in C unendlich groß, welches nicht nothwendig ist. Es sind hier nur zwey verschiedene Folgen von Abständen, die eine gemeinschaftliche Gränze haben, eben so wie die Ordinaten an den beiden Zweigen AC, BC.

15. Der Halbmesser der Krümmung kann endlich, oder unendlich groß, oder unendlich klein seyn. Die gemeinschaftliche berührende läßt dieses unbestimmt.

16. Ist der Halbmesser der Krümmung für beide

Zweige

Zweige in C gleich groß, so ist das Differential desselben = 0, und es läßt sich zwischen den Bogen AC, BC durch C kein Kreis ziehen. Sind die Halbmesser der Krümmung ungleich, so läßt sich zwischen diesen Bogen durch C ein Kreis ziehen, der flächer als der Bogen AC in C ist, und krümmer als BC. Eine solche Verbindung zweyer Bogen mag aber kein Rückkehren heißen, sondern wird nur ein Durchschneiden zweyer über C hinaus sich erstreckenden Bogen seyn.

17. Der Halbmesser der Krümmung in C für beide Zweige sey = r, so ist, wenn das Differential ∂x constant gesetzt wird, $r = -\frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y}$ (Krümmungskreis, 8.), wo $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ ist. Es ist $\partial r = -\frac{3\partial s^2 . \partial^2 s}{\partial x . \partial^2 y} + \frac{\partial s^3 . \partial^3 y}{\partial x . (\partial^2 y)^2}$, und dieses = 0 gesetzt, $\partial s . \partial^3 y = 3\partial^2 s . \partial^2 y$. Ferner ist $\partial^2 s = \partial y \partial^2 y (\partial x^2 + \partial y^2)^{-\frac{1}{2}}$, oder $\partial^2 s = \frac{\partial y \partial^2 y}{\partial s}$, also ist für den Rückkehrpunct der zweyten Art,

$$\partial s^2 . \partial^3 y = 3\partial y (\partial^2 y)^2.$$

18. Die Untersuchung des Rückkehrpuncts der zweyten Art macht einige Schwierigkeit. L'Hopital hat ihn zuerst in Betracht gezogen, Analyse des infin. petits, nr. 109. Er zeigt daselbst, daß durch die Abwickelung einer Curve mit einem Wendungspuncte eine schnabelförmige Verbindung zweyer Zweige entsteht, woran der Halbmesser der Krümmung gleich groß ist.

19. Der Abbé de Gua behauptete in der Schrift, Usage de l'Analyse de Descartes pour decouvrir les propriétés des lignes géométriques, daß es keinen Rückkehrpunct der zweyten Art gebe, sondern daß die beiden Zweige, die in einem sol-

ri ritrovato per utilità et solazzo delli Studiosi. Et al presente per Francesco Barozzi Gentilhuomo Venetiano in lingua volgare in domo di Paraphrasi composto; in Venetia 1572. 24 Quartblätter.

Eine Übersetzung dieser Schrift ist dem Schach- oder Königspiel von Gustavo Seleno, (dem Braunschweigisch-Wolfenbüttelschen Herzoge August) Leipzig, 1616. angehängt. Die Steine sind in Form von Scheiben, Dreyecken und Vierecken, auf einer Seite weiß, auf der andern schwarz. Sie sind mit gewissen Zahlen auf beiden Seiten bezeichnet. Die Spieler können sich die Steine nach Maaßgabe der bezeichneten Zahlen auf verschiedene Arten nehmen und durch Umkehren in eigene verwandeln; auch kann ein Stein durch Einsperren genommen werden. Der Sieg wird erhalten, wenn man in des Gegners Feld Steine bringt, deren Zahlen eine arithmetische, geometrische oder harmonische Proportion ausmachen; ein größerer, wenn man vier Steine hineinspielt, deren Zahlen Glieder zweyer dieser Proportionen sind; der größeste, wenn sie alle drey Proportionen liefern.

Murhard führt in seiner Litteratur der Mathematik an: Le trés-excellent et ancien jeu Pythagorique dict. Rithmomachi etc. pour obtenir vraye et prompte habitude en toute nombre et proportion, à Paris, 1576.

Von einer Schrift des Alterthums über ein solches Spiel weiß man nichts.

Rösselsprung, s. Springer auf dem Schachbrete.

Rücklaufende oder wiederkehrende Reihe (series recurrens) ist eine solche, worin jedes Glied das Aggregat der Producte einiger zunächst vorhergehenden Glieder in bestimmte Zahlen

in derselben Ordnung genommen, ist. Die bestimmten Zahlen, mit ihren Vorzeichen verbunden, machen die **Verhältniß- oder Beziehungs-Scale** (Scala relationis, *échelle de relation*) aus. Die Anzahl der bestimmten Factoren zeigt die **Ordnung** einer rücklaufenden Reihe an.

1. Eine geometrische Reihe ist eine rücklaufende Reihe, in welcher die Scale der Relation aus einem einzigen Gliede, dem Exponenten, mit dem Vorzeichen + oder — besteht. Das erste Glied ist willkührlich.

2. Wenn die Scale der Relation aus zwey Gliedern besteht, so können die zwey ersten Glieder der Reihe nach Gefallen angenommen, oder den Bedingungen der Frage zufolge bestimmt werden. Hat die Scale m Glieder, so sind die m ersten Glieder der Reihe, willkührlich oder durch gegebene Bedingungen bestimmt. Z. B. die Scale sey + 3, — 1, die beiden ersten Glieder setze man 1, 2, so ist die Reihe:

1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, u. s. f.

Sind die beiden ersten Glieder 1, 3, so ist die Reihe:

1, 3, 10, 27, 71, 186, 487, 1275 etc.

Eine sehr irregulär scheinende Reihe kann solchergestalt nach einem sehr einfachen Gesetze gebildet seyn.

3. Ist die Scale der Relation + 2, — 1, so ist die Reihe eine arithmetische der zweyten Ordnung; ist die Scale + 3, — 3, + 1, so ist die Reihe eine arithmetische der dritten Ordnung; ist sie + 4, — 6, + 4, — 1, so ist die Reihe von der vierten Ordnung; ist die Scale

$$+ m; - \frac{m . \overline{m - 1}}{1 . 2}; + \frac{m . \overline{m - 1} . \overline{m - 2}}{1 . 2 . 3} \ldots \underline{+} m, \overline{+} 1,$$

so ist die Reihe eine arithmetische der mten Ordnung, s. arithmetische Reihen höherer Ordnungen, 3. 4.

4. Alle rücklaufenden Reihen entstehen durch die Division einer rationalen Function von einer veränderlichen Größe durch eine andere Function dieser Art, worin die höchste Potenz der veränderlichen Größe wenigstens einen Grad höher ist, als in dem Dividendus. Die Coefficienten der veränderlichen Größe in dem Quotienten machen die rücklaufende Reihe aus. Dieser Bruch heißt der **erzeugende Bruch**, Urbruch (*fraction génératrice.*).

5. Es sey nämlich $\frac{a + bz}{1 - \alpha z + \beta z^2} =$

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. so ist

$$\begin{aligned} a + bz = A & + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.} \\ & - A\alpha. - B\alpha. - C\alpha. - D\alpha. - \text{etc.} \\ & + A\beta. + B\beta. + C\beta. + \text{etc.} \end{aligned}$$

wo die Puncte die Stelle der Potenzen von z vertreten.

Die Vergleichung der Coefficienten in beiden Theilen der Gleichung, giebt

$$\begin{aligned} A &= a; \\ B - A\alpha &= b; \\ C - B\alpha + A\beta &= 0; \\ D - C\alpha + B\beta &= 0; \\ E - D\alpha + C\beta &= 0; \end{aligned}$$

u. s. f.

also

$$A = a; \quad B = A\alpha + b$$
$$C = B\alpha - C\beta; \quad D = C\alpha - B\beta,$$
$$E = D\alpha - C\beta; \quad F = E\alpha - D\beta,$$

u. s. f.

Die Scale der Relation ist demnach $+ \alpha, - \beta$.

6. Es sey $\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3} =$

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ etc.

so giebt die Multiplication des Quotienten mit dem Divisor und die Vergleichung mit dem Dividendus die Werthe der Coefficienten,

$$
\begin{aligned}
A &= a; \\
B &= A\alpha + b; \\
C &= B\alpha - A\beta + c; \\
D &= C\alpha - B\beta + A\gamma; \\
E &= D\alpha - C\beta + B\gamma; \\
F &= E\alpha - D\beta + C\gamma;
\end{aligned}
$$

u. s. f.

Die Scale der Relation ist $+ \alpha, - \beta, + \gamma$.

7. Auf gleiche Art folgt aus dem Bruche $\frac{a + bz + cz^3 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$ die Scale der Relation $+ \alpha, - \beta, + \gamma, - \delta$, und die Coefficienten der ersten vier Glieder des Quotienten, $A = a$; $B = A\alpha + b$; $C = B\alpha - A\beta + c$; $D = C\alpha - B\beta + A\gamma + d$. Der Fünfte ist $E = D\alpha - C\beta + B\gamma - A\delta$, und nach dieser Form auch die folgenden.

8. Die Scale der Relation mag auch eine unendliche Anzahl von Gliedern enthalten, wenn nämlich der Divisor eine unendliche Reihe ist.

9. Bey dieser Entwickelung einer gebrochenen Function in eine Reihe hat jeder Coefficient eine involutorische Form, da er aus mehrern vorhergehenden, nicht selten aus allen zusammengesetzt wird, z. B. die Reihe für sec φ, in Cyklometrie, 22. Es ist aber auch möglich, die Coefficienten unabhängig von einander, durch einen algebraischen Ausdruck anzugeben, mittelst der Wurzeln derjenigen Gleichung, welche entsteht, wenn der Divisor $= 0$ gesetzt wird. Man muß nämlich den Bruch in partielle Brüche, nach Function, 20 ff. zerlegen. Hat ein solcher Bruch die Form

$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}$, so giebt die Entwickelung eine geometrische Reihe, deren allgemeines Glied sich sogleich ergiebt. Hat der partielle Bruch die Form $\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^m}$, so giebt der binomische Lehrsatz das allgemeine Glied durch die Stelle desselben an. Hat der partielle Bruch die Form $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}z}{1-pz+qz^2}$, wo der Nenner nicht zerlegbar ist, so verfährt man entweder so, wie in dem Artikel, Function, 32, 33, angewiesen ist, oder nach einer andern Art, die hier gewiesen werden wird.

10. Es sey der zu entwickelnde Bruch $\frac{a+bz}{1-\alpha z+\beta z^2}=Z$, und die Gleichung $1-\alpha z+\beta z^2=0$, oder $\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}z+z^2=0$, habe zwey mögliche, ungleiche Wurzeln, die durch $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ bezeichnet werden. Es ist nun $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{p}.\frac{1}{q}$ (Gleichung 40), und $\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}+z^2=\left(z-\frac{1}{p}\right)\left(z-\frac{1}{q}\right)$ eben das. 43. Multiplicirt man auf der einen Seite mit β, auf der andern mit pq, so ist

$$1-\alpha z+\beta z^2=(pz-1)(qz-1),$$

oder

$$1-\alpha z+\beta z^2=(1-pz)(1-qz).$$

Nun läßt sich die gebrochene Function Z, in zwey gebrochene zerlegen, $Z=\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}+\frac{\mathfrak{B}}{1-qz}$ wo,

$\mathfrak{A} = \frac{ap + b}{p - q}$, und $\mathfrak{B} = - \frac{aq + b}{p - q}$ ist, Function, 31. Dadurch ist

$$Z = \begin{array}{l} \mathfrak{A}(1 + pz + p^2z^2 + \ldots + p^m z^m + etc) \\ + \mathfrak{B}(1 + qz + q^2z^2 + \ldots + q^m z^m + etc.) \end{array}$$

Wie vorher sey $Z = A + Bz + Cz^2 \ldots + Mz^m + etc.$ so ist $M + \mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}q^m$.

Das Product $(1 - pz)(1 - qz)$ entwickelt, ist $= 1 - (p + q)z + pqz^2$, also ist $p + q = \alpha$; $pq = \beta$, und daher ist

$$p = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\right)};$$

$$q = \frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\right)}$$

aus Gleichung, 38. Damit p und q mögliche Größen seyn, muß $\frac{1}{4}\alpha^2 > \beta$ oder $\alpha^2 > 4\beta$ seyn.

11. Der zu entwickelnde Bruch sey!

$\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^2} = Z$, und die Gleichung

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 = 0, \text{ oder}$$

$\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\beta}{\gamma} z^2 - z^3 = 0$, habe die drey möglichen ungleichen Wurzeln, $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$. Es ist

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{r}, \text{ und}$$

$$z^3 - \frac{\beta}{\gamma} z^2 + \frac{\alpha}{\gamma} z - \frac{1}{\gamma}$$

$$= \left(z - \frac{1}{p}\right)\left(z - \frac{1}{q}\left(z - \frac{1}{r}\right)\right),$$

Gleichung, 60, 61. Multiplicirt man auf der einen Seite mit γ, auf der andern mit pqr, und vertauscht zugleich die Vorzeichen, so ist

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 = (1 - pz)(1 - qz)(1 - rz).$$

Die gebrochene Function Z läßt sich nun in die Brüche

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1 - qz} + \frac{\mathfrak{C}}{1 - rz},$$

zerlegen, worin

$$\mathfrak{A} = \frac{ap^2 + bp + c}{(p - q)(p - r)}; \quad \mathfrak{B} = \frac{aq^2 + bq + c}{(q - p)(q - r)};$$

$\mathfrak{C} = \dfrac{ar^2 + bp + c}{(r \quad q)(r - p)}$ ist. Daraus wird das allgemeine Glied in der entwickelten Function

$$Mz^m = (\mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}q^m + \mathfrak{C}z^m)\, z^m.$$

12. Auf ähnliche Art wird eine gebrochene Function $\dfrac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.}}$, deren Nenner das Product aus n möglichen, ungleichen Factoren von der Form $(1 - pz)$ ist, in n Brüche von der Form $\dfrac{\mathfrak{A}}{1 - pz}$ zerlegt, deren jeder zu dem allgemeinen Gliede Mz^m einen Terminus, wie $\mathfrak{A}p^m z^m$ liefert.

13. Der Nenner des zu entwickelnden Bruches habe zwey gleiche Factoren, jeden $= 1 - pz$, so entstehen daraus die beiden partiellen Brüche $\dfrac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^2}$ $+ \dfrac{\mathfrak{B}}{1 - pz}$, nach Function, 28. Die Zähler werden nebst den Zählern der übrigen partiellen Brüche auf die a. a. O. gewiesene Art bestimmt. Da ferner $(1 - pz)^{-2} = 1 + 2pz + 3p^2z^2 \ldots + (m + 1)p^m z^m$ $+$ etc. ist, so entsteht aus dem ersten jener beiden

Brüche in dem allgemeinen Gliede Mz^m der Terminus $(m + 1)\,\mathfrak{A}p^m z^m$. Aus dem andern kommt zu diesem der Terminus $\mathfrak{B}p^m z^m$, und der Coefficient von z^m wird $= (m + 1)\,\mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}p^m + \mathfrak{C}q^m$ + etc.

Man kann auch den partiellen Bruch, der aus dem Factor $(1-pz)^2$ des Nenners entspringt, setzen $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{(1 - pz)^2}$, welcher nun anstatt jener beiden Brüche allein kommt. In dem allgemeinen Gliede Mz^m ist nun der daraus entstehende Terminus

$$= ((m + 1)\,\mathfrak{A}p^m + m\,\mathfrak{B}p^{m-1})z^m.$$

14. Der Nenner der gebrochenen Function habe den cubischen Factor $(1 - pz)^3$, so entstehen daraus drey partielle Brüche, $\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^3} + \frac{\mathfrak{B}}{(1 - pz)^2} + \frac{\mathfrak{C}}{1 - pz}$, und hieraus in dem Coefficienten M des Gliedes Mz^m aus der gebrochenen Function der Terminus

$$\frac{m + 1 \,.\, m + 2 \,.}{1 \,.\, 2}\,\mathfrak{A}p^m + (m + 1)\,\mathfrak{B}p^m + \mathfrak{C}p^m.$$

Oder man nimmt statt jener drey partiellen Brüche den Bruch $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2}{(1 - pz)^5}$.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn noch höhere Potenzen eines einfachen Factors $1 - pz$ in dem Nenner der gebrochenen Function enthalten sind.

15. Exempel. Das allgemeine Glied der Reihe, die aus dem Bruche $\frac{1 - z}{1 - 5z + 6z^2}$ entsteht, oder der Reihe

$1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 + 454z^5$ + etc. anzugeben.

Der Nenner ist das Product $(1-2z)(1-3z)$, also ist $p = 2$, $q = 3$; und $a = 1$; $b = -1$. Also ist in (10), $\mathfrak{A} = -1$; $\mathfrak{B} = +2$, und das allgemeine Glied $= (-2^m + 2 \cdot 3^m)z^m$.

Die Scale der Relation ist $+5; -6$.

16. Exempel. Das allgemeine Glied der Reihe, die aus dem Bruche $\frac{1 - 5z + 8z^2}{1 - 8z + 21z^2 - 18z^3}$ oder der Reihe
$1 + 3z + 11z^2 + 43z^3 + 167z^4 + 631z^6$ + etc. zu finden.

Die Reihe selbst wird nach den Formeln für die Coefficienten (6.) gefunden, da die Scale der Relation ist $+8; -21; +18$. Der Nenner ist gleich dem Producte $(1-3z)^2(1-2z)$. Man setze

$$\frac{1 - 5z + 8z^2}{(1-3z)^2(1-2z)} =$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-3z)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{1-3z} + \frac{\mathfrak{C}}{1+2z}.$$

Bringt man diese Brüche auf denselben Nenner mit dem vorgegebenen, so wird dadurch
$\mathfrak{A}(1-2z) + \mathfrak{B}(1-3z)(1-2z) + \mathfrak{C}(1-3z)^2 = 1 - 5z + 8z^2$. Das giebt

I. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 1$;
II. $-2\mathfrak{A} - 5\mathfrak{B} - 6\mathfrak{C} = -5$
III. $6\mathfrak{B} + 9\mathfrak{C} = 8$.

Durch die Elimination zweyer dieser Größen findet man die dritte. Solchergestalt ist

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{3};\quad \mathfrak{B} = -\frac{5}{3};\quad \mathfrak{C} = 2,$$

und das allgemeine Glied der Reihe ist

$$= \left[\frac{1}{3} (2m - 3) \cdot 3^m + 2 \cdot 2^m \right] z^m.$$

Die zweyte Zerlegung der gebrochenen Function (13.) in die Brüche, $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{(1-pz)^2} + \frac{\mathfrak{C}}{1-qz}$, giebt für dieses Exempel

$$\frac{1 - 5z + 8z^2}{(1 - 3z)^2 (1 - 2z)} = \frac{-1 + 5z}{(1 - 3z)^2} + \frac{2}{1 - 2z}.$$

17. Der Nenner der Function

$Z = \frac{a + bz}{1 - \alpha z + \beta z^2}$ habe keine mögliche Factoren, weil $\alpha^2 < 4\beta$ ist, daher die Gleichung

$1 - \alpha z + \beta z^2 = 0$, oder $\frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} z + z^2 = 0$,

keine mögliche Wurzeln hat. (Gleichung, 36. 44.).

Man setze $\frac{\alpha\alpha}{4\beta} = \cos\varphi^2$, wodurch $\frac{\alpha\alpha}{4\beta}$ ein eigentlicher Bruch wird, der Voraussetzung gemäß; auch schreibe man f^2 für β, so daß $\alpha = 2f\cos\varphi$, und $1 - \alpha z + \beta z^2 = 1 - 2f\cos\varphi \cdot z + f^2 z^2$ sey. Dieser Größe gebe man die Form eines Products, $(1 - pz)(1-qz)$, obwohl die beiden p, q unmögliche Größen sind, so ist $p + q = 2f\cos\varphi$, und $pq = f^2$, beides mögliche Größen. Aber es ist

$$p = f\cos\varphi + f\sin\varphi \cdot \sqrt{-1},$$
$$q = f\cos\varphi - f\sin\varphi \cdot \sqrt{-1}.$$

Die Function Z wird nun wie vorher (10.) in die beiden eingebildeten Brüche, $\frac{\mathfrak{A}}{1-pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1-qz}$ zerlegt und daher in zwey eingebildete geometrische Reihen, deren allgemeines Glied ist

$$Mz^m = (\mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}q^m)\, z^m.$$

Jeder der beiden Theile ist eine unmögliche Größe, die Summe aber ist eine mögliche.

18. Denn es ist aus Goniometrie, 100,
$(\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1})^m = \cos m\varphi + \sin m\varphi . \sqrt{-1}.$
Also

$$p^m = f^m (\cos m\varphi + \sin m\varphi . \sqrt{-}\ );$$
$$q^m = f^m (\cos m\varphi - \sin m\varphi . \sqrt{-1}),$$

und daraus

$$M = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\ f^m \cos m\varphi$$
$$+ (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\ f^m \sin m\varphi . \sqrt{-1}.$$

Nun ist oben (10.) gefunden:

$\mathfrak{A} = \frac{ap + b}{p - q}$; $\mathfrak{B} = -\frac{aq + b}{p - q}$, also ist

$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = a$; und $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \frac{a(p+q) + 2b}{p - q}$

$= \frac{af\cos\varphi + b}{f\sin\varphi . \sqrt{-1}}$. Daher ist

$$M = af^m \cos m\varphi + \frac{af\cos\varphi + b}{f\sin\varphi} . f^m \sin m\varphi.$$

Da

$\sin\varphi . \cos m\varphi + \cos\varphi . \sin m\varphi = \sin(m+1)\varphi$

ist, (Goniometrie, 24.) so ist

$$M = \frac{f^m}{\sin\varphi}\left(a\sin(m+1)\varphi + \frac{b}{f}\sin m\varphi\right).$$

Der Winkel φ ist durch die Gleichung, $\frac{\alpha^2}{4\beta} = \cos\varphi^2$, gegeben.

19. Exempel. Der Bruch sey $\frac{1 + 2z}{1 - z + z^2}$, so ist $a = 1$; $b = 2$; $\alpha = +1$; $\beta = +1$;

$f = 1$; $\cos\varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi = 60° = \frac{\pi}{3}$; also

$$M = \frac{1}{\sin\frac{1}{3}\pi}\left(\sin\frac{(m+1)\pi}{3} + 2\sin\frac{m\pi}{3}\right).$$

Die Sinus der Vielfachen von $\frac{1}{3}\pi$ sind gleich einem der Sinus von $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{6\pi}{3}$, von welchen die beiden ersten dem $\sin 60^\circ$, der 4te und 5te $= -\sin 60^\circ$, die beiden übrigen $= 0$ sind. Daher ist

$$\frac{1+2z}{1-z+z^2} = 1 + 3z + 2z^2 - z^3 - 3z^4 - 2z^5 + z^6$$

+ etc. wo die Scale der Relation ist $+1; -1$, wie es auch die Division ergiebt.

20. Aus jedem Paare unmöglicher zusammengehörigen Factoren, welche der Nenner einer gebrochenen rationalen Function enthält, entsteht bey der Zerlegung der Function ein Bruch von der Form

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{1 - 2f\cos\varphi\,.\,z + ffz^2},$$

welcher in eine Reihe verwandelt, ein allgemeines Glied, $M'z^m$, giebt, wo M' die in (18.) gefundene Form hat, und $M'z^m$ ein Theil des allgemeinen Gliedes Mz^m der Reihe ist, in welche die vorgegebene gebrochene Function aufgelöset wird.

Den Werth von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in jedem partiellen Bruche zu bestimmen, verfahre man entweder nach Function, 33, oder, wenn dieser zu beschwerlich seyn sollte, nach der von Euler in der Introd. in Anal. Inf. §. 201 ff. gewiesenen Methode, welche derjenigen in dem Artik. Function vorgetragenen analog ist.

21. Es sey nämlich

$$Z = \frac{P}{(1 - 2f\cos\varphi\,,\,z + f^2z^2)\,V},$$

wo P und V zwey ganze Functionen von z sind, und der dreytheilige Factor auf die in (17.) gezeigte Art bestimmt ist. Der partielle Bruch, der aus diesem Factor entsteht, sey, wie vorher,

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{1 - 2f\cos\varphi\,.\,z + f^2z^2},$$ und $\frac{Y}{V}$ der ergänzende

Bruch zu der Function Z. Es ist nun

$$P = \mathfrak{A}V + \mathfrak{B}Vz + (1 - 2f\cos\varphi\,.\,z + f^2z^2)\,V$$

daher

$$\frac{P - \mathfrak{A}V - \mathfrak{B}Vz}{1 - 2f\cos\varphi\,.\,z + f^2z^2} = Y.$$

Da Y eine ganze Function ist, so ist der Zähler des Bruches durch den Nenner theilbar, oder enthält denselben als Factor; wird also $= 0$, wenn dieser $= 0$ ist. Dieses geschieht, wenn für z eine der Wurzeln der Gleichung, $1 - 2f\cos\varphi\,.\,z + f^2z^2 = 0$ gesetzt wird. Diese sind $\frac{1}{f}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\,.\sqrt{-1})$. Setzt man diese Werthe in die Function $P - \mathfrak{A}V - \mathfrak{B}Vz$, so entsteht eine Doppelgleichung, in welcher das mögliche dem möglichen, so wie das unmögliche dem unmöglichen gleich ist. Durch diese zweyfache Gleichung werden nun die beiden unbekannten Größen, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, bestimmt.

22. Bey dem hier gezeigten Verfahren, das allgemeine Glied einer rücklaufenden Reihe zu finden, ist es hinderlich, daß die Zerfällung des Nenners in Factoren von der Auflösung der Gleichungen abhängt, welche meistens nur irrationale und genäherte Werthe der Wurzeln liefert. La Grange hat eine merkwürdige und feine Methode angegeben, wobey es nicht nöthig ist, die Werthe der Wurzeln, welche den Nenner auf Null bringen, zu wissen, sondern in jedem Falle unabhängig von diesen Werthen das allgemeine Glied der Reihe durch wiederhohlte Differentiirung einer gegebenen

nen Function findet. De la résolution des équations numériques, p. 215 ss. Daraus in Lacroix traité des différences et des séries, art. 1120. 1121. Inzwischen empfiehlt sich die Eulerische Darstellung des allgemeinen Gliedes dadurch, daß man das Gesetz der Formation daran deutlicher wahrnimmt, und daß man es benöthigt ist, um zwischen die Hauptglieder andere einzuschalten.

23. Walmesley hat schon früher versucht, das allgemeine Glied einer rücklaufenden Reihe zu finden ohne die Factoren des Nenners in dem Urbruche dazu nöthig zu haben, in den Mém. de l'Ac. de Berlin, 1758, allein seine Auflösung erfordert eine gar zu weitläufige Rechnung, daß man sich ihrer schwerlich wird bedienen mögen.

24. Argobast hat in seinem Calcul des Dérivations, à Paris 1800. nr. 205. das allgemeine Glied der Reihe, die aus dem Bruche

$\frac{a + bx + cx^2 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}}$ entsteht, ganz kurz durch seine Bezeichnungsart dargestellt. Der Coefficient zu der Potenz x^m in der Reihe ist $= \underset{c}{D}^m . (a\alpha^{-1})$, wo das c unter dem Derivationszeichen D das Product 1. 2. 3. . . . m bedeutet. Die Derivation ist, wie der Punct anzeigt, eine zusammengesetzte, s. Derivations-Rechnung, 9. Allein es ist hier eine doppelte Entwicklung nöthig. Die Division wird als eine Multiplication mit der Function $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})^{-1}$ betrachtet. Nun müssen erstlich die Derivirten, welche aus dem einen Factor, dem Zähler, entstehen, bestimmt werden. Dieses giebt den Coefficienten, der durch A_m bezeichnet werde,

$$A_m = a\underset{c}{D}^m . \alpha^{-1} + b\underset{c}{D}^{m-1} . \alpha^{-2} + c\underset{c}{D}^{m-2} . \alpha^{-3} + \text{etc.}$$

Die Derivirten aus der entwickelten Function $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})^{-1}$ werden aus den Formeln,

Derivations-Rechnung, 21. gefunden, wenn daselbst $\varphi\alpha = \alpha^{-1}$ gesetzt wird.

25. Es braucht aber dieser, etwas verwirrenden, Rechnung nicht, da die bloße Division, mittelst der angenommenen Form des Quotienten, das Gesetz der Coefficienten deutlich genug zu erkennen giebt. Dieses ist in dem Artikel, Buchstabenrechnung, 27. Th. I. S. 383. schon geschehen. Vorzüglicher ist der Ausdruck, der durch die combinatorische Analysis (s. diese, 37. Th. I. S. 494) gefunden ist. Daselbst sind alle Glieder des Nenners nach dem ersten subtractiv. Sind sie alle additiv, so werden die Combinationen von einer ungeraden Anzahl aus β, γ, δ, ε, etc. negativ. Zur bequemern Vergleichung mit Arbogasts Derivations-Formel oder jeder andern setze ich die fünf ersten Coefficienten in der Reihe für $\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{1 + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}$ her. Die Reihe sey $P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + Tx^4 + \text{etc.}$ so ist

$$P = a.$$
$$Q = -a\,\mathfrak{a}\,{}^1A + b.$$
$$R = -a(\mathfrak{a}\,{}^2A - \mathfrak{b}\,{}^2B) - b\,\mathfrak{a}\,{}^1A + c.$$
$$S = -a(\mathfrak{a}\,{}^3A - \mathfrak{b}\,{}^3B + \mathfrak{c}\,{}^3C) - b(\mathfrak{a}\,{}^2A - \mathfrak{b}\,{}^2B) - c\,\mathfrak{a}\,{}^1A + d.$$
$$T = -a(\mathfrak{a}\,{}^4A - \mathfrak{b}\,{}^4B + \mathfrak{c}\,{}^4C - \mathfrak{d}\,{}^4D) - b(\mathfrak{a}\,{}^3A - \mathfrak{b}\,{}^3B + \mathfrak{c}\,{}^3C) - c(\mathfrak{a}\,{}^2A - \mathfrak{b}\,{}^2B) - d\,\mathfrak{a}\,{}^1A + e.$$

u. s. f.

Die lateinischen Buchstaben bedeuten Combinationen der β, γ, δ, ε, etc., so vieler als die Stellenzahl des Buchstabens Einer enthält, und solcher, deren Summe, zufolge des Zeigers,

$$\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$$
$$1, 2, 3, 4 \ldots$$

die dem lateinischen Buchstaben beygefügte Ziffer angiebt. Der deutsche kleine Buchstab zeigt überhaupt an, daß jeder Combination die Versetzungszahl ihrer Elemente beyzufügen ist. S. combinatorische Analysis, 28, 29.

So ist

$$T = -a(\varepsilon - (2\beta\delta + \gamma^2) + 3\beta^2\gamma - \beta^4)$$
$$- b(\delta - 2\beta\gamma + \beta^3) - c(\gamma - \beta^2)$$
$$- d\beta + e.$$

Das Gesetz der Formation ist ganz deutlich.

Wenn man zum ersten Gliede des Divisors α behält, so werden a, b, c, d, etc. jede durch α dividirt, und statt A, B, C, D, etc. werden $\frac{A}{\alpha}$, $\frac{B}{\alpha^2}$, $\frac{C}{\alpha^3}$, $\frac{D}{\alpha^4}$, etc. gesetzt.

Die Hindenburgische combinatorische Formel muß so wie Arbogasts Derivationsformel durch zusammengesetzte Operationen gehen, allein bei der letztern hält es schwer, sich von den zusammengesetzten Derivationen, die sich auf mehrere Glieder einer Function beziehen, einen netten Begriff zu machen. Auch die entwickelte Derivationsformel (Derivations-Rechnung, 21.) gewährt keine helle Einsicht, wenn man nicht bemerkt, daß die Factoren zu den derivirten Größen die vollständigen Combinationen einer gewissen Gattung mit ihren Versetzungszahlen sind. Arbogast bemerkt dieses nirgends in seinem sonst sehr schätzbaren Werke. Daher muß er viele, theils sehr zusammengesetzte Regeln für die Entwickelung seiner Derivationen geben, deren Grund man nicht anders als empirisch einsieht, besonders was die numerischen Factoren oder die Versetzungszahlen betrifft. Es ist ein Vortheil bey der Hindenburgischen Methode, daß die Combinationen unabhängig von ihren numerischen Factoren gebildet werden, welches bei Arbogast unzertrennlich ist.

Uebrigens ist die Arbogastische Methode sehr bequem, wenn unbestimmte Functionen, wie $\varphi\,(a + bx + cx^2 + \text{etc.})$; $\psi\,(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ oder noch mehrere mit einander multiplicirt, oder durch einander dividirt werden sollen.

Die Hindenburgische Entwickelung gebrochner Function findet man in dessen Systema permutationum, combinationum, cet. Lips. 1781. p. 78 ss. und noch allgemeiner in der zweyten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, Leipzig, 1780. Es ist daselbst ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Potenzen eines Polynomium sind, in den vielbefassenden combinatorischen Symbolen, auf zweyerley Art, abhängig und unabhängig, in eine Reihe gebracht. Die völlige Entwicklung giebt Euler in den Calc. differ. P. II. §. 207.

26. In dieser Sammlung ist auch eine Abhandlung von Trembley enthalten, worin gezeigt wird, wie man, ohne den Nenner einer gebrochnen Function in Factoren zu zerfällen, das allgemeine Glied der Reihe finden könne. Die Methode ist von den vorher angeführten ganz verschieden, und legt den Eulerischen Ausdruck des allgemeinen Gliedes zum Grunde, Doch beruht sie auf einer Induction. Bey Brüchen mit vier Gliedern im Nenner (bis zur dritten Potenz von x) wird das Gesetz schon ziemlich verwickelt, noch vielmehr bey Brüchen von höhern Nennern. Ich bemerke noch bey diesen Formeln, daß die numerischen Coefficienten bey einer Reihe der zweyten Ordnung in der Entwickelung des sin $(n + 1) \varphi$ und sinφ durch den sinφ und cosφ (Goniometrie, 84) vorkommen.

27. Moivre ist der erste, welcher die einfachen rücklaufenden Reihen (die bisher erklärten) genauer in Betracht gezogen hat. Vor ihm waren über einzelne Fälle solcher Reihe Bemerkungen gemacht worden, als von Dominicus Cassini über die Reihe, in welcher jedes Glied die Summe der beiden vorhergehenden ist, der aber doch weder ihre Summe, noch ihr allgemeines Glied anzugeben suchte. Moivre ward durch seine Beschäftigung mit der Berechnung der Wahrscheinlichkeit in Spielen, besonders der Dauer derselben bis zu einem gewissen Ereigniß, geleitet. Die erste Aus-

gabe seiner Schrift, The Doctrine of chances erschien 1716. In den Miscellaneis analyticis, Londini, 1730, trug er die Theorie der rücklaufenden Reihen, welche von ihm auch ihre Benennung erhalten haben, ausführlich vor. Er zeigte, wie die Summe oder der erzeugende Bruch dieser Reihen gefunden wird, und die Form des allgemeinen Gliedes durch die Zerfällung des Nenners jenes Bruches, der = o gesetzt wird, in binomische Factoren. Darüber hat sich in der Folge Euler in seiner Introd. in Anal. Inf. ausführlich verbreitet.

28. Daniel Bernoulli machte von den rücklaufenden Reihen eine Anwendung auf die annähernde Auflösung der Gleichungen, in den ältern Petersburger Commentarien, T. III. Davon unten.

29. La Grange hat sich verschiedentlich mit diesen Reihen beschäftigt, zuerst in dem ersten Bande der Miscellan. Taurinensium, wo er die Erfindung des allgemeinen Gliedes auf die Integration einer linearischen Gleichung mit endlichen Differenzen bringt, und diese Integration auch auf die Fälle ausdehnt, wo die Gleichung, welche die Relation zwischen den Gliedern der Reihe darstellt, eine Function der veränderlichen Größe zum letzten Gliede hat. Ein besonderer Fall, den Vincent Riccati in den Mém. présentés, T. V. untersucht hat, ist, wenn dieses letzte Glied, diese Zugabe, eine beständige Größe ist.

In den Memoiren der Berliner Akademie für 1775 ist eine tiefsinnige Abhandlung von diesem großen Analysten über die rücklaufenden Reihen, vorzüglich über die doppelten und dreyfachen, enthalten, nebst Anwendungen auf die Glücksspiele. In den Mém. de Paris für 1772 zeigt er in einer Abhandlung über die Art, wie man blos aus Beobachtungen Tafeln über den Lauf der Planeten verfertigen könne, zugleich, wie man eine vorgegebene Reihe prüfen könne, ob sie eine rücklaufende sey. Davon handelt er auch in einer Abhandlung über das Ein=

schalten in dem Astronomischen Jahrbuche der Berliner Akademie für 1783. Prony hat gleichfalls die Hauptprobleme über die rücklaufenden Reihen in dem Journal de l'Ecole polytechnique ausführlich behandelt.

30. La Place hat sehr künstliche Untersuchungen über die Doppelreihen, die er recurro-recurrentes nennt, angestellt, in den Mém. présentés, T. VI et VII. Er behandelt sie als einen besondern Fall der Integrationen von Gleichungen mit endlichen partiellen Differenzen für mehrere veränderliche Größen. In den Mém. de l'Acad. pour 1779 hat er die Materie aufs neue vorgenommen, und in der Théorie analytique des probabilités (Paris 1814) solche auf eine noch allgemeinere Art vorgetragen.

31. Die vorher erwähnte Anwendung der rücklaufenden Reihen auf die Erfindung der Wurzeln einer Gleichung geschieht folgendergestalt.

Es sey der erzeugende Bruch =

$\frac{a + bz + cz^2 + \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.}}$, und die Wurzeln der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta x^2 - \gamma z^3 + \text{etc.} = 0$, seyn alle möglich und verschieden, so ist, wenn $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, etc. die Wurzeln derselben sind, der Coefficient zu z^m,

$$M = \mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}q^m + \mathfrak{C}r^m + \text{etc.}$$

Der nächstfolgende zu z^{m+1} ist

$$N = \mathfrak{A}p^{m+1} + \mathfrak{B}q^{m+1} + \mathfrak{C}r^{m+1} + \text{etc.}$$

aus (12.). Es bedeute p die größte unter den Größen p, q, r, etc. also $\frac{1}{p}$ die kleinste Wurzel der obigen Gleichung, so ist p^m desto größer gegen die gleichnamigen Poten-

zen von q, r, etc. je größer m ist, so daß für ein unendlich großes m, gegen das erste Glied $\mathfrak{A}p^m$ alle übrigen verschwinden, und $\frac{M}{N} = \frac{1}{p}$ ist. Das heißt, der Quotient zweyer auf einander folgenden Glieder $\frac{M}{N}$ der rücklaufenden Reihe nähert sich immer mehr der kleinsten Wurzel der Gleichung, $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.} = 0$, je weiter hin die Glieder genommen werden. Will man ihre größte Wurzel haben, so muß man $z = \frac{1}{x}$ setzen, und die Gleichung für x vermittelst der Division durch das gegebene Glied der Gleichung auf dieselbe Form wie jene bringen.

32. Zu einer schnellen Annäherung wird erfordert, daß die größte reciproke Wurzel p beträchtlich größer als die übrigen sey, damit auch für mäßig große m das erste Glied $\mathfrak{A}p^m$ gegen die übrigen sehr groß werde. — Wenn eine oder mehrere Wurzeln negativ sind, so werden die Glieder der Reihe sich sehr ungleichförmig verändern, da die Potenzen der umgekehrten negativen Wurzeln wechselsweise addirt und subtrahirt werden. — Wenn die Werthe zweyer nächsten Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist die gesuchte Wurzel negativ. In diesem Falle ist es dienlich, eine Substitution, $z = x - k$ zu machen, so daß alle Wurzeln der Gleichnng positiv werden (oder alle Vorzeichen abwechseln), und k zugleich der Wurzel $\frac{1}{p}$ schon möglichst nahe komme. — Die Coefficienten a, b, c, etc. im Zähler bleiben unbestimmt, doch hängt die Annäherung zum Theil von ihnen ab, da die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. durch sie bestimmt werden.

33. Exempel. Die kleinste Wurzel der Gleichung,

$1 - 6z + 8z^3 = 0$ zu finden. Die Wurzel derselben sind die Sinus dreyer Winkel, von deren dreyfachern der Sinus $= \frac{1}{2}$ ist. (Goniometrie, 86).

Man bilde den Bruch $\frac{a + bz + cz^2}{1 - 6z * + 8z^3}$,

und entwickele diesen in eine Reihe. Da die Coefficienten a, b, c, willkürlich bleiben, so setze man sie 0, 0, 1. Die Verhältniß-Scale ist + 6; 0, − 8. Die Coefficienten von z in der entwickelten Reihe sind nun:

0, 0, 1, 6, 36, 208, 1200, 6912, 39808, 229248, etc.

Die gesuchte kleinste Wurzel ist $= \frac{39808}{229248} = \frac{311}{1791}$ $= 0,173651$. Da der Winkel, dessen Sinus $= \frac{1}{2}$ ist, 30° beträgt, so ist die kleinste Wurzel der vorgegebenen Gleichung = 0, 173648, etwas weniger kleiner als der gefundene Werth.

34. Exempel. Die größte Wurzel der Gleichung $1 - 6z * + 8z^3 = 0$, zu finden.

Man setze $z = \frac{1}{x}$, so wird die Gleichung $x^3 - 6x^2 * + 8 = 0$ oder $1 * - \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{8} x^3$. Der erzeugende Bruch ist $\frac{a + bx + cx^2}{1 * - \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{8} x^3}$, und die Verhältnißscale ist $0, \frac{3}{4}, - \frac{1}{8}$. Nimmt man die drey ersten Glieder der Reihe 1, 1, 1, so ist die Reihe

$1, 1, 1, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{11}{32}, \frac{25}{64}, \frac{23}{128}, \frac{64}{256}, \frac{44}{512}, \frac{169}{1024}, \frac{68}{2048}, \frac{463}{4096}, \frac{35}{8192}$, etc. Diese Glieder geben für

die Wurzel Werthe, die abwechselnd grösser und kleiner als 1 sind. Die Reihe nähert sich also gar nicht. In der That ist die absolut größte Wurzel der vorgegebenen Gleichung negativ, und $= - \sin 70^\circ = - 0,9396926$. Goniometrie, 117.

Man muß die ersten Glieder der Reihe gleich so nehmen, daß ihre Quotienten der gesuchten Wurzel einigermaßen nahe kommen, zu welchem Ende man sie auf irgend eine Art vorher erforschen muß. Man nehme die drey ersten Glieder, $+1, -1, +1$, so wird die Reihe folgende: $+1, -1, +1, -\frac{7}{8}, +\frac{5}{8}, -\frac{25}{32}, +\frac{37}{64}, -\frac{85}{128}, +\frac{136}{256}, -\frac{292}{512}, +\frac{493}{1024}$, etc.

Die beiden letzten Brüche geben für die größte Wurzel x den genäherten Werth $-\frac{584}{493}$, also für z den Werth $-\frac{493}{584} = -0,844..$, welches von dem wahren noch beträchtlich abweicht. Dieses rührt theils von den ersten Gliedern der Reihe her, noch mehr daher, daß die mittlere Wurzel, nämlich $\sin 50^\circ$, oder $0,766044..$ der gesuchten zu nahe, und zugleich entgegengesetzt ist.

Die Rechnung zu erleichtern, setze man $z = \frac{1}{2x}$, so wird die Gleichung diese, $0 = 1 - 3x^2 + x^3$, und die Verhältniß-Scale ist $0, 3, -1$.. Man nehme die drey ersten Glieder, $+1, -2, +4$, um durch ihre Quotienten dem wahren Werthe der Wurzel x sich zu nähern, und die Reihe wird

$+1, -2, +4, -7, +14, -25, +49, -89, +172, -316, +605$, — etc.

hier ist $x = -\frac{316}{605}$, und $z = -\frac{605}{632} = -0,957$.

35. Man verwandle die Gleichung in eine andere, deren Wurzeln alle positiv sind, dadurch daß man setzt $z = x - 1$. Da alle drey Werthe von z kleiner sind als 1, so wird dadurch jede der Wurzeln x positiv. Die verwandelte Gleichung ist $0 = -1 + 18x - 24x^2 + 8x^3$, oder $0 = 1 - 18x + 24x^2 - 8x^3$. Um diese noch einfacher zu machen, setze man $x = \frac{1}{2}y$, so ist $0 = 1 - 9y + 6y^2 - y^3$. Die Verhältniß-Scale ist $+9, -6, +1$. Die drey ersten Glieder der Reihe nehme man willkürlich an, 1, 1, 1, so ist die Reihe der Coefficienten aus dem entwickelten Bruche

$$\frac{a + by + cy^2}{1 - 9y + 6y^2 - y^3} \text{ diese:}$$

1, 1, 1, 4, 31, 256, 2122, 17593, 145861, etc.

$$\text{und } y \text{ nahe} = \frac{17593}{145861} = 0,\ 12061483$$

$x = 0,\ 06030741$, also $z = -0,\ 93969259$, welches mit dem $\sin 70^\circ$ in den Tafeln ganz übereinstimmt.

Nimmt man die ersten drey Glieder 1, 8, 64, so wird die Reihe,

1, 8, 64, 529, 4385, 36355, etc. und es kommt schon der Bruch $\frac{4385}{36355}$ oder $\frac{877}{7271}$ der Wurzel sehr nahe. Es ist derselbe $= 0,\ 1206161..$

36. Der Fall, wenn eine Gleichung zwey gleiche Wurzeln hat, macht Schwierigkeit. Der Coefficient von z^m ist, wenn die Gleichung zwey gleiche Wurzeln, $\frac{1}{p}, \frac{1}{p}$, hat,

$$M = (m + 1)\mathfrak{A}p^m + \mathfrak{B}p^m + \mathfrak{C}q^m, + \text{etc.}$$

und der folgende

$$N = (m + 2)\mathfrak{A}p^{m+1} + \mathfrak{B}p^{m+1} + \mathfrak{C}q^{m+1} + \text{etc.}$$

Ist p größer als die andern reciproken Wurzeln q, r, etc.

so ist zwar für ein unendliches m der Quotient $\frac{M}{N} = \frac{1}{p}$, allein die Annäherung zu diesem Werthe geschieht langsam, da mA beträchtlich größer als B werden muß. Ist p eine mittlere Wurzel, so geschieht die Annäherung immer langsam, wegen des Factors m zu A.

37. Euler selbst giebt hier k.ine gehörige Auskunft, in der Introd. in Anal. Infin. Cap. XVII, wo die Anwendung der rücklaufenden Reihen auf die Auflösung der Gleichungen ausführlich gezeigt wird. La Grange aber hat in der Resolution des équations numériques gewiesen, wie man sich hier leicht helfen kann. Die Zähler der Brüche $\frac{A}{1 - pz}$, $\frac{B}{1 - qz}$, $\frac{C}{1 - rz}$, müssen alle gleich und $= 1$ genommen werden. Dadurch werden die Coefficienten a, b, c, etc. in dem Zähler des erzeugenden Bruches bestimmt. Allein diese Brüche auf einerley Benennung gebracht, erhalten keinen quadratischen oder höhern potenzirten Nenner, wenn zwey oder mehrere der Größen p, q, r, etc. sich gleich sind. Es muß, wenn in diesem Falle die Zerlegung in die einfachen Brüche Statt finden soll, der Zähler der gebrochenen Function mit dem Nenner derselben einen oder mehrere Factoren gemein haben. Das ist dann auch der Fall bey dem Zähler derselben, wenn dieser zufolge der Annahme, daß die Zähler der einfachen Brüche $= 1$ seyn, bestimmt wird. Die potenzirten Factoren des Nenners werden durch die Division des Zählers und Nenners mit dem gemeinschaftlichen Factor auf einfache gebracht, und die Auflösung in eine Reihe geschieht wie in dem Falle, da die Factoren des Nenners alle verschieden sind. — Diese Bemerkungen hat La Grange beyzufügen nicht nöthig gefunden.

38. Es sey $\frac{a + bz}{1 - \alpha z + \beta z^2} = \frac{1}{1 - pz}$

$+ \frac{1}{1 - qz}$, so daß $\alpha = p + q$, und $\beta = pq$ ist. Werden die beiden einfachen Brüche auf einerley Nenner gebracht, so ist $a = 2$; $b = -(p + q) = -\alpha$.

39. Es sey $\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3} = \frac{1}{1 - pz}$ $+ \frac{1}{1 - qz} + \frac{1}{1 - rz}$, so daß $\alpha = p + q + r$; $\beta = pq + pr + qr$; $\gamma = pqr$ ist. Die drey Brüche auf gleiche Nenner gebracht, geben $a = 3$; $b = -2$ $(p + q + r)$; $c = pq + pr + qr$; das ist $a = 3$; $= -2\alpha$; $c = \beta$.

40. Es sey $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} =$ $\frac{1}{1 - pz} + \frac{1}{1 - qz} + \frac{1}{1 - rz} + \frac{1}{1 - sz}$, so ist α gleich der Summe der p, q, r, s; β gleich der Summe ihrer Binionen; γ der Summe ihrer Ternionen, δ dem Product aller. Bringt man die einzelnen Brüche auf einen Nenner, so giebt die Vergleichung des Zählers mit demjenigen der gebrochnen Function, $a = 4$; $b = -3\alpha$; $c = +2\beta$; $d = -\gamma$.

41. Hieraus erhellt schon das Gesetz für die Coefficienten a, b, c, d, etc. hinlänglich. Man setze $z = \frac{1}{x}$, so werden die jetzt eingerichteten Brüche, wie folget.

$$\frac{2x - \alpha}{x^2 - \alpha x + \beta} = \frac{1}{x - p} + \frac{1}{x - q}$$

$$\frac{3x^2 - 2\alpha x + \beta}{x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma} = \frac{1}{x - p} + \frac{1}{x - q} + \frac{1}{x - r}.$$

$$\frac{4x^3 - 3\alpha x^2 + 2\beta x - \gamma}{x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta} = \frac{1}{x - p} + \frac{1}{x - q}$$

$+ \frac{1}{x - r} + \frac{1}{x - s}$. Bey diesen Brüchen bemerke man, daß der mehrtheilige Factor des Zählers der Differential-Factor des Nenners ist. Enthält der Nenner einen quadratischen Factor $(x - p)^2$, so ist in dem Zähler der Factor $x - p$ vorhanden; ist in jenem der Factor $(x - p)^3$ enthalten, so steckt in diesem der Factor $(x - p)^2$, und auf gleiche Art bey Brüchen höherer Ordnungen für jede Potenz von $(x - p)$, Gleichung, 202.

42. Das allgemeine Glied der Reihe, die bey dieser Einrichtung aus dem Bruche entspringt, ist nun $(p^m + q^m + r^m + s^m + \text{etc.})\, x^{-m}$. Die größte Wurzel sey p, so ist die Gränze des Quotienten zweyer Coefficienten, $\frac{N}{M} = p$, auch in dem Falle, wenn die größte Wurzel mehrfach ist. Der Exponent m ist hier kein Factor der Potenzen.

43. Exempel. Die größte Wurzel der Gleichung $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ zu finden. — Es ist nicht nöthig, x mit $\frac{1}{z}$ zu vertauschen, um dem Nenner die Form $1 - 3x * + 4x^3$ zu geben. Der zu entwickelnde Bruch ist nun $\frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + 4}$, und die Verhältnißscale, ist $+3, 0, -4$. Die drey ersten Glieder in der Reihe der Coefficienten sind wie in (6.)

$A = 3;\ B = 3.3 - 6 = 3;\ C = 3.3 = 9.$

Hieraus ergeben sich zufolge der Scale die folgenden, 15, 33, 63, 129, 255, u. s. f. welche sich alle durch 3 theilen lassen, weil die drey ersten diesen Theiler haben. Da es hier nur auf die Verhältnisse der Glieder ankommt, so kann man die Reihe

1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, etc.

nehmen. Die Quotienten $\frac{N}{M}$ sind wechselsweise größer und kleiner als 2. Wirklich ist 2 eine Wurzel des Nenners = 0 gesetzt, zugleich aber auch des Zählers, wenn er = 0 seyn soll. Daher hat (Gleichung, 185.) der Nenner die Wurzel 2 zweymahl, und Zähler und Nenner haben den gemeinschaftlichen Factor $x - 2$.

Euler findet für eben dieses Exempel (346) die Reihe 1, 3, 9, 23, 57, 135, 313, 711, 1593, etc. Die Quotienten bleiben immer größer als 2, und nähern sich diesem Werthe viel langsamer.

44. Die Einrichtung, daß die Zähler der einfachen Brüche jeder = 1 genommen werden, gewährt inzwischen nicht die schnelle Annäherung, welche man erhält, wenn die Quotienten der Anfangsglieder schon der gesuchten Wurzel ziemlich nahe kommen. In dem Exempel 35. ist nach jener Einrichtung, der zu entwickelnde Bruch $\frac{3 - 18y + 6y^2}{1 - 9y + 6y^2 - y^3}$, und die Anfangsglieder sind dadurch 3, 9, 15, wofür man, wegen des gemeinschaftlichen Theilers 1, 3, 5 nehmen kann. Die Reihe wird nun

1, 3, 5, 28, 225, 1862, 15436; etc.

hier ist der Quotient $\frac{225}{1862} = 0,1208.$, nicht so genau als der gleichstellige in der zweyten Reihe daselbst. Der folgende Quotient ist 0, 120627.

45. Durch die Annahme, daß die Zähler A, B, C, etc. = 1 seyn, wird der Theil des allgemeinen Gliedes, welcher aus dem möglichen Producte zweyer unmöglichen Factoren in dem Nenner der zu entwickelnden Function entsteht, $= 2\, f^m \cos m\varphi$, (17.). Ist f oder das Product der beiden unmöglichen zusammengehörigen reciproken Wurzeln nicht größer als das Quadrat

jeder möglichen Wurzel, so ist die bisher gezeigte Methode auch auf Gleichungen mit unmöglichen Wurzeln anwendbar.

46. Was vorher von der Form des Zählers einer gebrochenen Function gezeigt ist, wenn sie in einfache Brüche mit dem Zähler = 1 zerlegt werden soll, verdient allgemein gezeigt zu werden.

Es sey die gegebene Gleichung,

$$x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

ihre Wurzeln seyn p, q, r, s, etc. so ist für jedes x,

$$x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} + \text{etc.}$$
$$= (x - p)\ (x - q)\ (x - r)\ (x - s), \text{ etc.} \quad \text{(I.)}$$

wo die Anzahl der Factoren = m ist (Gleichung, 165 — 167.). Man bezeichne durch $x + u$ irgend einen andern Werth der veränderlichen Größe, so bleibt

$$(x + u)^m - \alpha(x + u)^{m-1} + \beta(x + u)^{m-2}$$
$$- \gamma(x + u)^{m-3} + \text{etc.} = (x + u - p)\ (x + u - q)$$
$$(x + u - r) + (x + u - s) + \text{etc. (II.)}.$$

Beide Theile dieser Gleichung entwickelte man nach den Potenzen von u. Was kein u enthält, ist die Gleichung (I.). Was in die erste Potenz von u multiplicirt ist, ist in dem ersten Theile der Gleichung

$$m x^{m-1} - (m - 1)\, \alpha x^{m-2} + (m - 2)\, \beta x^{m-3}$$
$$- (m - 3)\, \gamma x^{m-4} + \text{etc.}$$

In dem andern Theile der Gleichung (II.) nehme man aus je einem der Factoren nach der Reihe das Glied u, und lasse u in den übrigen Factoren weg, so wird das Aggregat aller Producte, die in u zu multipliciren sind,

$$= (x - q)\ (x - r)\ (x - s) + \text{etc.} + (x - p)$$
$$(x - r)\ (x - s)\ \text{etc.} + (x - p)\ (x - q)$$
$$(x - s) + \text{etc.} + (x - p)\ (x - q)\ (x - r) + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Die Producte aus u^2, u^3, etc. in die zugehörigen Functionen von x brauchen hier nicht entwickelt zu werden. Da u von x ganz unabhängig ist, so müssen in der entwickelten Gleichung (II.) die Functionen von x, welche in dieselbe Potenz von u multiplicirt sind, sich gleich seyn.

Demnach ist

$mx^{m-1} - (m-1)\,\alpha x^{m-2} + (m-2)\,\beta x^{m-3} - (m-3)\,\gamma x^{m-4} + \text{etc.} =$
$(x-q)(x-r)(x-s) + \text{etc.} + (x-p)(x-r)(x-s) + \text{etc.} + (x-p)(x-q)(x-s) + \text{etc.} + (x-p)(x-q)(x-r) + \text{etc.} + \text{etc.}$ (III.)

Man dividire die Gleichung (III.) durch die Gleichung (I.), so ist

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)\,\alpha x^{m-2} + (m-2)\,\beta x^{m-3} - \text{etc.}}{x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \text{etc.}}$$
$$= \frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x-s} + \text{etc.}$$
(IV.)

Dieses ist die allgemeine Gleichung, wovon einige besondere Fälle in (41.) schon gefunden sind.

47. Setzt man $x = \frac{1}{z}$ so ist

$$\frac{m - (m-1)\,\alpha z + (m-2)\,\beta z^2 - (m-3)\,\gamma z^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.}}$$
$$= \frac{1}{1-pz} + \frac{1}{1-qz} + \frac{1}{1-rz} + \frac{1}{1-sz} + \text{etc.}$$

48. Das allgemeine Glied der entwickelten Function in (46.) ist $= (p^m + q^m + r^m + s^m + \text{etc.})\, x^{-m-1}$; von der Function in (47.) ist es $= (p^m + q^m + r^m + s^m + \text{etc.})\, z^m$.

49. Fängt man das Polynomium $x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \text{etc.}$ mit dem letzten Gliede an, und nimmt zum Nenner der gebrochenen Function diese auf steigende Reihe,

$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{etc.}$ so ist

$$\frac{-b + 2cx - 3dx^2 + 4ex^2 - \text{etc.}}{a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{etc.}}$$
=

$$= \frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x-s} + \text{etc.}$$

wenn die höchste Potenz von x immer das Vorzeichen + behält. Um eine steigende Reihe nach x zu erhalten, muß man die Nenner negativ nehmen, und daher auch die Brüche selbst. Dann ist das allgemeine Glied =

$$-\left(\frac{1}{p^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} + \frac{1}{s^m} + \text{etc.}\right) x^{m-1}.$$

Hier nähert sich die Reihe der Coefficienten einer abnehmenden geometrischen Reihe, so wie in (48.) einer wachsenden. Dort nähert sich der Quotient $\frac{N}{M}$ der größten Wurzel, hier der kleinsten. Die Scale der Relation ist hier + b, — c, + d, — e, etc.

50. Der Newtonische Satz von dem Verhalten der Coefficienten in einer Gleichung zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln (Combination. 43) findet auf diesem Wege einen leichten Erweis. Der erste Theil der Gleichung (IV.) werde durch die Division nach den fallenden Potenzen entwickelt, so daß dieser Bruch sey

$$\frac{m}{x} + \frac{P}{x^2} + \frac{Q}{x^3} + \frac{R}{x^4} + \frac{S}{x^5} + \text{etc.}$$

Diese Reihe multiplicire man durch den Nenner des Bruchs, und setze die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x auf beiden Seiten gleich, so ist

$$P = \alpha.$$
$$Q = \alpha P - 2\beta.$$
$$R = \alpha Q - \beta P + 3\gamma.$$
$$S = \alpha R - \beta Q + \gamma P - 4\delta. \text{ u. s. f.}$$

Die Coefficienten α, β, γ, δ, etc. sind die Summen der Unionen, Binionen, und folgenden Combinationen der Gleichung, $x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} -$ etc. Die Werthe von P, Q, R... ergeben sich aus (48), wie sie in dem Art. Combin. 43. angenommen sind.

51. Der Bruch in (49.) entwickelt gebe die Reihe

$$-P' - Q'x - R'x^2 - S'x^3 - \text{etc.}$$

Diese multiplicire man mit dem Nenner des Bruches, und setze die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen in diesem Producte und dem Zähler einander gleich, so ist

$$aP' = b.$$
$$aQ' = bP' - 2c.$$
$$aR' = bQ' - cP' + 3d.$$
$$aS' = bR' - cQ' + dP' - 4e.$$

u. s. f.

Die einfachen Brüche entwickelt geben die Reihe,

$$-\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \text{etc.}\right) - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \text{etc.}\right)x$$

$$-\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \text{etc.}\right)x^2 - \text{etc.}$$

Folglich ist

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \text{etc.} = P'.$$
$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} + \text{etc.} = Q'.$$
$$\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{s^3} + \text{etc.} = R'.$$
$$\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{s^4} + \text{etc.} = S'.$$

u. s. f.

Es ist a das Product aller Wurzeln, b die Summen aller Combinationen von je $m - 1$ derselben, c die Summe der Combinationen von je $m - 2$; d von je $m - 3$, u. s. f.

Also ist $\frac{b}{a}$ die Summe der reciproken, wie $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, etc.; $\frac{c}{a}$ die Summe der reciproken Binionen, wie

$\frac{1}{pq}$, $\frac{1}{qr}$, etc.; $\frac{d}{a}$ die Summe der reciproken Ternionen, wie $\frac{1}{pqr}$, $\frac{1}{prs}$, $\frac{1}{qrs}$, etc. u. s. f.

Doppelte zurücklaufende Reihen.

52. Eine veränderliche Größe sey eine Function zweyer veränderlichen x, y, und werde mittelst einer Reihe durch diese folgendergestalt ausgedrückt:

$$\begin{array}{l} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} \\ + B'y + C'xy + D'x^2y + E'x^3y + \text{etc.} \\ + C''y^2 + D''xy^2 + E''x^2y^2 + F''x^3y^2 + \text{etc.} \\ + D'''y^3 + E'''xy^3 + F'''x^2y^3 + G'''x^3y^3 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} \end{array}$$

Die Reihe kann nach drey Gegenden fortgesetzt werden, nachdem man die Exponenten von x allein, oder von y allein, oder von beiden negativ nimmt.

53. Man bezeichne irgend ein Glied dieser Reihe durch $A_{m,n}$, wo A einen der Coefficienten, m den Exponenten von x, und n den von y bedeuten. Ein anderes Glied, worin die Exponenten von x und y sind m-1 und n, oder m-1 und n-1 werde auf ähnliche Weise bezeichnet durch $A_{m-1,n}$, und durch $A_{m-1,n-1}$. Es sey nun für irgend welche Glieder die Gleichung der Relation diese,

$$\begin{array}{rl} 0 = \alpha A_{m,n} & + \beta A_{m-1,n} + \gamma A_{m-2,n} \\ & + \beta' A_{m,n-1} + \gamma' A_{m-1,n-1} \\ & \qquad\qquad + \gamma'' A_{m,n-2}. \end{array}$$

wo α, β, β', γ, γ', γ'' gegebene Größen sind, so ist die Reihe, in welcher jedes Glied von dem vorhergehenden auf die in der Gleichung ausgesprochene Art abhängt, eine doppelte rücklaufende Reihe, oder eine series recurro-recurrens.

Man bemerke, daß in jeder Verticalreihe die Summe der Exponenten von x und y dieselbe ist, und

daß diese Summe von dem ersten Gliede an, je um 1 abnimmt. Die Reihe kann allerdings weiter fortlaufen als hier angegeben ist.

Diese Reihen kommen bey schwereren Fällen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor. Man sehe die oben (29. 30.) angeführten Abhandlungen von la Place und la Grange. Umständlich handelt auch davon Arbogast in dem Calcul des dérivations p. 183 — 229, wo neun Beyspiele zugefügt werden.

54. Eine dreyfache rücklaufende Reihe ist, wenn die Stelle jedes Gliedes durch dreyerley Stellenzahlen angegeben, und jedes Glied aus gewissen vorhergehenden durch eine Gleichung mit denselben Coefficienten bestimmt wird, wie in dieser:

$$0 = \alpha A_{m,n,r} + \beta A_{m-1,n,r} + \gamma A_{m-1,n-1,r}$$
$$+ \beta' A_{m,n-1,r} + \gamma' A_{m-1,n,r-1}$$
$$+ \beta'' A_{m,n,r-1} + \gamma'' A_{m,n-1,r-1}$$
$$+ \delta A_{m-1,n-1,r-1}.$$

Die Glieder einer doppelten rücklaufenden Reihe liegen in den Quadrat-Fächern eines Rechtecks von unbestimmter Länge und Breite, die Glieder einer dreyfachen rücklaufenden Reihe in den gleichen Zellen eines Parallelepipedum von unbestimmten Dimensionen; jene wie diese werden nach demselben Gesetze aus Gliedern zusammengesetzt, die immer einerley Lage gegen die daraus zusammengesetzten haben.

S.

Sagitta ist das Stück des Durchmessers eines Kreises von der Mitte eines Bogens bis an die Chorde desselben, von der Aehnlichkeit mit einem Pfeile so genannt. Der übrige Theil des Durchmessers ist die Sagitta der Ergänzung jenes Bogens zum Umfange. Die halbe Chorde eines Bogens ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Sagitten. Die Chorde des halben Bo-

gens ist die mittlere Proportionale zwischen der Sagitta des ganzen und dem Durchmesser. — Die Benennung kommt von den Arabern her, zufolge Otho in der Vorrede zu dem Canon des Rhäticus.

Die Sagitta heißt auch der Sinus versus des halben Bogens, die Lage dieses Abschnittes eines Halbmessers gegen den Sinus desselben Bogens anzudeuten. Als Sagitta bezieht sich der Abschnitt auf den ganzen Bogen, als Sinus versus auf den halben.

Man kann überhaupt die Abcisse eines Durchmessers einer krummen Linie, von dessen Endpuncte an, die Sagitta des Bogens zwischen den Endpuncten der beiden gleichen, entgegengesetzten, zugehörigen Ordinaten nennen, auch wenn der Ordinaten-Winkel ein schiefer ist.

Sandrechnung des Archimedes ist die von diesem Geometer angestellte Berechnung einer Zahl, welche größer ist als die Anzahl aller Sandkörner, welche der Weltraum nach seiner Annahme der Größe fassen kann. Er hat darüber eine kleine Schrift aufgesetzt; ψαμμιτης, arenarius, betitelt. Die Veranlassung war, daß einige Leute geäußert hatten, der Sand sey nicht zählbar. Archimedes widerlegt dieses, und zeigt, daß man durch Hülfe einer geometrischen Progression über jede noch so große Zahl hinausgehen, und eine größere auf eine faßliche Weise darstellen könne. S. Arithmetik, Th. I. S. 183. Die kleine Schrift ist auch zur Geschichte der alten Astronomie brauchbar.

Säulenzahl, Columnarzahl ist das Product aus einer Polygonalzahl in ihre Seite. Z. B. die Triangularzahlen sind 1, 3, 6, 10, 15, etc. so sind die zugehörigen Säulenzahlen 1, 6, 18, 40, 75, etc. Diese Formen von Zahlen heißen nach der Anzahl der Winkel in dem gleichnamigen Vielecke, dreyseitige, vierseitige, u. s. f. Säulenzahl. Die allgemeinen Formen erhält man aus den Formeln für die Polygonalzahlen (Th. III. S. 824.) in die Seite oder Wurzel r. Gegenwärtig

macht man keinen Gebrauch von diesen Formen der Zahlen. Man schreibt sie dem Maurolycus zu.

Scala relationis, s. rücklaufende Reihe.

Scalenum triangulum, ungleichseitiges Dreyeck, von σκαληνος, schief, ungerade, was ungleiche Schenkel hat.

Scenographia ist die perspectivische Abbildung eines Körpers auf einer ebenen Fläche, nach Vitruv, L. I. c. 2. frontis et laterum abscedentium adumbratio, ad circinique centrum omnium linearum responsus, im Gegensatze gegen Ichnographia, Grundriß, und Orthographia, Aufriß. Der Herleitung zufolge bedeutet Scenographie die Abbildung eines Zeltes oder einer Hütte, daher dann auch theatralische Mahlerey. Die ältesten Theater waren nur eine Art von Hütten.

Scenographum catholicum nennt Niceron in seinem Thaumaturgo optico, p. 191. ein Instrument, womit sich alle Arten perspectivischer Zeichnungen bewerkstelligen lassen. Es ist von einem Florentinischen Mahler, Lodovico Cigolo, erfunden.

Scheitelpunct (vertex) an einer geometrischen Linie ist der Endpunct eines Durchmessers. — An einem Dreyeck die Winkelspitze, welche einer als Grundlinie betrachteten Seite gegenüber liegt — an einem Kegel der fixe Punct, durch welchen die die Kegelfläche beschreibende gerade geht — an einem Konoide der Endpunct des Durchmessers, um welchen die dasselbe beschreibende Figur herum gedreht wird.

Schema irgend eine geometrische oder mathematische Zeichnung. Sonst auch Diagramma.

Schenkel eines Dreyecks (ebenen geradlinichten oder sphärischen) sind die beiden Seiten, welche von der

zur Grundlinie angenommenen Seite nach dem gegenüber liegenden Winkelpuncte gezogen sind.

Man gebraucht den Ausdruck auch von zwey Zweigen einer krummen Linie, die neben einem Durchmesser hinlaufen.

Schief ist eine gerade Linie gegen eine andere, wenn sie mit derselben keinen rechten Winkel macht, das entgegengesetzte von senkrecht.

Ein schiefer Winkel ist ein Winkel, der kein rechter ist, der spitze oder der stumpfe.

Schlangenpunct, s. Wendungspunct.

Schneckenlinie, s. Spirale.

Scholium, Anmerkung, ist ein Zusatz zu einer Erklärung, einem Lehrsatze oder der Auflösung einer Aufgabe, worin etwas zur Erläuterung vorgetragen wird, es bestehe in der Beseitigung einer Schwierigkeit, oder der Anzeige, wie man auf den Beweis oder die Auflösung gekommen sey, oder es abändern könne, oder der Mittheilung einer literarischen Nachricht, oder der Angabe des Gebrauchs, und der Verbindung einer Lehre mit andern. Wolf hat dergleichen Anmerkungen, die er durch die Benennung, Scholium, unterscheidet, in seinen Lehrbüchern viele. In der That sind dergleichen Anmerkungen, besonders für einen Anfänger, sehr nützlich und gewähren zugleich eine angenehme Abwechslung.

Scholien heißen auch in der alten Literatur die Anmerkungen, welche über einige classische Schriftsteller von den Commentatoren gemacht sind.

Schwerpunct in geometrischem Sinne ist für mehrere in einer Ebene liegende Puncte derjenige Punct, dessen Abstand von einer in der Ebene willkürlich gezogenen geraden Linie das arithmetische Mittel der Abstände der gegebenen Puncte von eben der Linie ist. Liegen die

gegebenen Puncte nicht alle in derselben Ebene, so werden statt der Abstände von irgend einer geraden Linie die Abstände von irgend einer Ebene genommen. Betrachtet man die gegebenen Puncte als vielfache, und legt ihnen in dieser Rücksicht einen numerischen Werth bey, so wird, um das arithmetische Mittel der Abstände zu finden, der Abstand jedes Puncts in den ihm zukommenden numerischen Werth multiplicirt, und die Summe (die algebraische nämlich) dieser Producte mit der Summe der numerischen Factoren dividirt.

In so fern es nun (nach der Methode des Untheilbaren) verstattet ist, Linien, Flächen und Körper als aus Puncten, Linien und Flächen zusammengesetzt anzusehn, kann man auch den Linien, Flächen und Körpern einen Schwerpunct in geometrischem Sinne zuschreiben.

Da dem Schwerpuncte im statischen Sinne mehrere merkwürdige rein geometrische Eigenschaften zukommen, worunter die in der obigen Erklärung aufgeführte eine der vorzüglichsten ist und sich zuerst darbietet, so ist die Betrachtung und der Gebrauch desselben in der Geometrie nicht nur nicht zulässig, sondern vielmehr nöthig. Man würde sonst die Sätze, welche jene Eigenschaften aussagen, nur auf eine höchst weitschweifige, beschwerliche und dunkle Art vortragen müssen. Carnot und L'Huilier haben daher, jener in der Géometrie de Position, dieser in den Elémens d'Analyse Géometrique et d'Analyse algebrique, Paris 1809. den Schwerpunct unter dem Namen des Mittelpuncts der mittleren Entfernungen in die Geometrie eingeführt.

Um das Gesagte über die Aufnahme des Schwerpuncts in die Geometrie zu rechtfertigen, bemerke ich nur, daß der Mittelpunct des Kreises, welcher der geometrische Ort der Puncte ist, für welche die Summe der Quadrate der Abstände irgend eines derselben von

so viel gegebenen Puncten (in einer Ebene) als man will, eine bestimmte Größe hat, der Schwerpunct der gegebenen Puncte ist. Auch in dem Falle, wo die Summe der Räume, welche zu den Quadraten der Abstände gegebene Verhältnisse haben, eine bestimmte Größe hat, ist der Schwerpunct der gegebenen Puncte für die Zahlwerthe, welche den Exponenten der gegebenen Verhältnisse gleich sind, der Mittelpunct des Kreises, welcher der gesuchte Ort ist.

Andere Sätze, welche leicht aus der geometrischen Betrachtung des Schwerpuncts fließen, in den Artikeln: Vieleck und Vieleckiger Körper.

Sciagraphie ist dasselbe, was Gnomonik. Diesen Ausdruck, oder den, Sciographie, findet man auch in einigen Ausgaben des Vitruv, statt Scenographie, aber unrichtig. Gesnerus in Thesauro schol. s. voce Sciagraphia. Perrault in seiner Uebersetzung des Vitruv, p. 10.

Secante ist erstlich eine gerade Linie, welche eine krumme Linie in zwey oder mehrern Puncten trifft. Durch die Drehung um einen bestimmten Punct, oder durch paralleles Fortrücken wird aus der schneidenden häufig eine berührende oder eine Asymptote, die auch als berührende an einem unendlich entfernten Puncte angesehen werden kann.

Wenn die krumme Linie ein Kreis ist, und die Secanten durch einen fixen Punct gezogen werden, so ist das Rechteck von den Abschnitten zwischen dem Puncte und dem Kreise unveränderlich, und gleich dem Quadrate der berührenden. (Kreis, 35. 37.) — Der Winkel zweyer Secanten hat zum Maße den halben Unterschied der zwischen ihnen enthaltenen beiden Bogen. (Kreis, 33. 19.).

Secante als trigonometrische, zu einem Kreisbogen gehörige gerade Linie, ist die aus dem Mittelpuncte eines Kreises durch den einen Endpunct des

Bogens bis an die berührende an dem andern Endpuncte gezogene gerade, wie CT (Fig. 56. Tab. XII. Th. II.) in Beziehung auf den Bogen AF. Die Secante durch den Halbmesser dividirt ist die eigentliche, numerische, Secante. s. Goniometrie, 10. 12. Es ist

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \sqrt{(1 + \tan A^2)}.$$

Die Secanten kommen zuerst in des Rhäticus und Otho großem trigonometrischen Canon vor. Hutton sagt in der Vorrede zu seinen trigonometrischen Tafeln, daß Maurolycus, aus Messina, die Secanten eingeführt, und die Tafel derselben die Tabula benefica genannt habe. Lansberg, fügt er hinzu, habe die Berechnung der Secanten irrig dem Rhäticus zugeschrieben. Das Jahr, in welchem jene Tafel der Secanten erschienen ist, weiß er nicht anzugeben. Allein Otho, der in der Vorrede zu dem Opere Palatino die Geschichte der von Rhäticus unternommenen Berechnung eines großen trigonometrischen Canons erzählt, berichtet hier ganz bestimmt, daß Rhäticus zuerst die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreyecks für die Hypotenuse 10000000 berechnet habe, dann die Katheten, wenn eine derselben 10000000 genommen wird, d. i. die Tangenten oder die von ihm genannte Tabula foecunda; darauf habe derselbe es noch für nützlich gehalten, die Hypotenuse für eine der Katheten = 10000000 gesetzt, zu berechnen. Man sieht, Rhäticus ist nicht von einem Kreise, sondern von einem rechtwinkligen Dreyecke ausgegangen, für welches er drey Canones lieferte, die er Series nannte, s. Th. I. S. 671. Er hat von des Maurolycus Arbeit nichts gewußt.

Von der Curve der Secanten s. abbildende Linie, Th. III. 480.

Sechseck, s. Vieleck.

Sechzigtheilige Brüche und Rechnung, s. Sexagesimale.

Sectio, s. Durchschnitt, Th. I. S. 940. Dazu setze man noch den Durchschnitt zweyer Körper, welchen man auch als den Durchschnitt der sie begränzenden Oberflächen betrachten kann, wovon in dem Artikel, krumme Fläche, 120 — 125 gehandelt ist. Von den Durchschnitten der Konoiden und der Flächen des zweyten Grades s. Konoid und krumme Fläche, 101 — 111.

Sectio bedeutet auch Eintheilung einer geraden Linie, oder auch Abschneidung eines Stückes auf zwey gegebenen nach gewissen Verhältnissen, worüber die Alten mehrerley Gattungen von Aufgaben vorgetragen haben, nämlich Sectio determinata, bestimmter Schnitt, (Th. I. S. 293.); sectio rationis; sectio spatii, (Th. I. S. 113. 115.). Die Aufgabe bey Euklides II. 11. oder VI. 30. ist sonst auch bisweilen sectio divina genannt, s. Th. I. S. 109.

Sector ist ein Theil einer Kreisfläche zwischen zwey Halbmessern und dem von diesen eingeschlossenen Bogen. Wenn der Halbmesser $= a$, und der Winkel der beiden Halbmesser $= \varphi$ ist ($180° = 3, 141 \ldots = \pi$ gesetzt), so ist der Inhalt des Sectors $= \frac{1}{2} aa\varphi$. Es ist nämlich φ der Bogen zu dem Winkel für den Halbmesser $= 1$; $a\varphi$ für den Halbmesser $= a$, des Kreises Fläche $= \pi aa$ (Quadratur, 13.), der Sector $= \frac{1}{2} aa\varphi$ (Kreis, 10.).

Secunde, der sechzigste Theil einer Minute, welche der sechzigste Theil eines Grades oder einer Stunde ist, eigentlich minutum secundum, so wie die Minuten eigentlich minuta prima heißen, indem Minute nur einen kleinen Theil eines ganzen anzeigt. Man hat gegenwärtig auch Decimal-Secunden oder vielmehr Centesimal-Secunden, deren 100 auf eine Minute gehen, so wie 100 Minuten auf einen Grad, den 100 Theil des Quadranten oder auf eine Stunde, den 10ten Theil eines Tages gehen. S. Maß, Th. III. 594. 599.

Die Bezeichnung für eine sechzigtheilige Secunde geschieht durch zwey Strichelchen, z. B. 16″. Für die Centesimalsecunden ist keine Bezeichnung nöthig, da sie durch die Stelle der Ziffern sich kenntlich machen.

Segment, Abschnitt einer Curve zwischen einem Bogen und dessen Chorde, auch wohl zwischen zwey parallelen Chorden.

Sehne, Chorde, eine gerade von einem Puncte einer krummen Linie zu einem andern.

Seite (latus) einer Figur ist die Begränzung derselben zwischen zwey nächsten Puncten.

Seite einer Polygonalzahl, oder ihre Wurzel ist die Anzahl der Glieder aus der zugehörigen Reihe, wovon sie das summatorische Glied ist.

Seite einer Potenz ist ihre Grundzahl oder Wurzel. Bey den Quadraten und Cubis sieht man gleich, woher die Benennung für die Grundzahl entstanden ist.

Semiordinate wird jetzt Ordinate genannt. Die Alten nannten die parallelen Chorden, welche von einem Durchmesser halbirt werden, Ordinaten zu dem Durchmesser. S. Ordinate.

Semiparabola ist von einigen eine parabolische Linie genannt, deren Gleichung ist $ax^{m-1} = y^m$, wo der Exponent der Absceisse um 1 kleiner ist als der Exponent der Ordinate. Die Benennung ist nicht mehr gewöhnlich, auch nicht schicklich.

Senkrecht ist eine gerade Linie auf eine andere, wenn sie mit derselben einen rechten Winkel macht. Auch eine krumme Linie ist auf eine gerade senkrecht, wenn ihre berührende in dem Durchschnittspuncte mit der geraden einen rechten Winkel macht. S. Winkel.

Senkstrich, eine gerade, auf eine andere senkrecht gezogene, Linie.

Series, s. Reihe.

Sesqui, ein lateinisches Wort, welches nur in Zusammensetzungen gebraucht wird, Verhältnisse anzugeben, als ratio sesquialtera das von $1 : 1\frac{1}{2}$ oder $2 : 3$; sesquitertia das von $1 : 1\frac{1}{3}$ oder $3 : 4$; sesquiquarta das von $1 : 1\frac{1}{4}$ oder $4 : 5$, u. s. f. Im Griechischen λογος ἡμιολιος = 2 : 3; λογος ἐπιτριτος = 3 : 4; λογος ἐπογδοος = 8 : 9. Dergleichen Benennungen kommen in der Theorie der Musik bey den Griechen vor. Die hier angegebenen Verhältnisse sind die der Quinte, der Quarte und des größern ganzen Tons.

Sexagesimal- oder Sexagenal-Bruch, ist ein Bruch, dessen Nenner 60, oder eine Potenz von 60 ist. Der Gebrauch dieser Brüche ist in der Astronomie, da bisher der Grad in 60 Minuten, dieser in 60 Secunden, diese in 60 Tertien getheilt sind. Die Rechnung mit denselben ist unbequem, besonders bey der Multiplication und Division. Zur Erleichterung derselben hat man eine Multiplicationstafel berechnet, wovon ein Stück hier zur Probe beygefügt ist.

	23	24	25	26	27	28
23	8. 49					
24	9. 12	9. 36				
25	9. 35	10. 0	10. 25			
26	9. 58	10. 24	10. 50	11. 16		
27	10. 21	10. 48	11. 15	11. 42	12. 9	
28	10. 44	11. 12	11. 40	12. 8	12. 36	13. 4
29	11. 7	11. 36	12. 5	12. 34	13. 3	13. 32
30	11. 30	12. 0	12. 30	13. 0	13. 30	14. 0

Die Zahlen in dieser Tafel sind die Quotienten der Producte aus den Ordnungszahlen der beiden Reihen, deren Winkelfach sie einnehmen, durch den Divisor 60, wo der Rest durch einen Punct abgesondert ist. So ist $12.8 = \frac{28 \cdot 26}{60} = \frac{728}{60} = 12 \frac{8}{60}$. Jede Columne (herabgehende Reihe) fängt mit dem Quadrate ihrer Ordnungszahl, durch 60 dividirt, an, weil kleinere Producte in der Columne zu dem kleinern Factor vorkommen; z. B. das Product $\frac{24 \times 27}{60}$ hat man in der Columne 24 und der Reihe 27, von oben herab gezählt, zu suchen.

Eine solche Tafel ist in dem nach Wolf genannten mathematischen Lexikon, II. Th. zu S. 485, anzutreffen. Ein Einmahl Eins für die Sexagesimalbrüche, worin jedes Product zweymahl vorkommt, findet man in Wucherers Beyträgen zum allgemeinen Gebrauch der Decimalbrüche, Carlsruhe, 1795. Die Vertheilung auf Octavblätter ist bequem, und brachte die Wiederholung mit sich.

Bedeutet der Zeiger der Reihen, nach der einen oder der andern Richtung, (von oben oder von der Seite her), genommen, Minuten (Secunden), nach der andern Richtung eine abstracte Zahl, so giebt ihr Winkelfach die Grade und Minuten (Minuten und Secunden) in dem Producte an. Z. B. $26 \times 28' = 12^\circ.\ 8'$, so wie $26'' \times 28 = 12'.\ 8''$.

Wenn beide Factoren benannte Sexagesimalgrößen sind, so muß man den einen Factor als einen abstracten Bruch ansehen, da zwey benannte Zahlen, als solche, nicht mit einander multiplicirt werden können. Man hat nur das Product, welches die Tafel zu dem Zähler dieses Factors angiebt, eben so zu erniedrigen, als es mit dem Factor geschehen ist. Z. B. $26' \times 28' = 12'\ 8''$,

oder $26' \times 28'' = 12'' 8'''$. Einer der Factoren bezieht sich immer auf eine gleichartige Größe, welche das erste Glied einer Proportion ist, worin die beiden Factoren das zweyte und dritte ausmachen, daher man jene und den darauf sich beziehenden Factor als bloße Zahlen ansehen darf. Macht man jene zur Einheit, so wird diese ein bloßer Bruch.

Sexagesimal-Rechnung ist das besondere Verfahren mit Sexagesimalbrüchen zu rechnen. Barlaam (ein Mönch aus Calabrien im 14ten Jahrh.) hat sie in seiner Logistik, einer theoretischen Arithmetik, vorgetragen. Er nannte sie die astronomische Logistik, wegen ihres großen Gebrauchs in der Astronomie. Lazarus Schoner hat seiner Ausgabe von der Arithmetik und Algebra des Ramus, Frankfurt 1586, eine Abhandlung über die Logistisa sexagenaria beygefügt.

Diese Rechnungsart ist der gemeinen Decimalrechnung ganz ähnlich. So wie hier zehn Einer einer Ordnung einen Einer der nächst höhern Ordnung ausmachen, so geben in der Sexagesimalrechnung sechzig Einer einer Ordnung einen Einer der nächst höhern. Die Ausführung der letztern ist nur oft beschwerlicher, wegen dieser Menge von Theilen, welche jede Gattung von Einern enthält.

Exempel der Multiplication. Es soll die vierte Proportionale zu $60' 0''$; $46' 12''$; und $8' 7''$ gefunden werden. Das Product des zweyten und dritten Gliedes besteht aus

$46' \times 8'$	=	$6'$	$8''$			
$12'' \times 8'$	=		1.	$36'''$		
$46' \times 7''$	=		5.	22		
$12'' \times 7''$	=			1.	$24''''$	
Product	=	$6'$	$14''$	$59'''$	$24''''$	

Dieses Product ist zugleich das gesuchte vierte Glied der Proportion, da die Multiplicatoren $46'$ und $12''$

zwey Brüche, $\frac{46}{60}$ und $\frac{12}{60.60}$, bezeichnen, indem das erste Glied, 60′, der Einheit, $\frac{60}{60}$, gleich ist. Die Einheit führt hier den Namen Grad.

Die logistischen Logarithmen (Th. III. S. 588.) dienen noch mehr als die Tafel zur Erleichterung der Rechnung. Das hier berechnete Exempel ist a. a. O. das erste. Jenes trifft mit diesem so nahe zusammen, als es bey der Rechnung mit abgekürzten Logarithmen nur zu erwarten ist.

Von den Rechenstäbchen zur Sexagesimal-Rechnung s. Th. II. S. 741.

Wenn das erste Glied der Proportion Minuten und Secunden enthält, das zweyte 60′ ist, so bringe man jenes auf Ganze und Sechzigtheile, dieses auf 60 Einer oder Ganze, und verfahre auf ähnliche Art wie bey der Division durch Einer mit anhängenden Zehntheilchen. So auch in ähnlichen Fällen. Hier sind die logistischen Logarithmen vortheilhaft zu gebrauchen.

Siebeneck, s. Vieleck.

Sinus eines Kreisbogens, oder des zugehörigen Winkels am Mittelpuncte, ist die Hälfte der Chorde des verdoppelten Bogens. Diese Erklärung ist in der Form von der in Goniometrie, 5, gegebenen verschieden. Sie giebt die Ansicht, wodurch diejenigen, welche die Sinus anstatt der Chorden in die Trigonometrie einführten, dazu veranlaßt wurden. In der alten Trigonometrie bediente man sich der Chorden, wo wir die Sinus gebrauchen, mußte aber deswegen die Winkel verdoppeln, um die Chorden zu ihnen zu suchen. Dieses erforderte Tafeln durch den ganzen Halbkreis. Kürzer war es, unmittelbar für die Winkel oder Bogen die zugehörigen halben Chorden ihres Doppelten anzuzeichnen, deren Tafel sich

auf

auf den Quadranten beschränkte, und auch dadurch bequemer ward. Diese Abänderung ist von arabischen Astronomen vorgenommen worden, man weiß nur nicht näher, wann und von wem. In Kästners geometrischen Abhandlungen, erster Sammlung, S. 530. ist aus der lateinischen Übersetzung einer Schrift des vorzüglichen arabischen Astronomen, Albategnius oder Al-Batani (9. Jahrh.), eine Stelle angeführt, worin dieser sagt, die Araber gebrauchten die Hälfte von der Chorde des Doppelten eines Bogens, welche sie in der Tafel neben diesem Bogen setzten. Dadurch erspare man sich die Verdoppelung des Bogens. Ein besonderes Kunstwort gebraucht er nicht.

Die Herleitung des lateinischen Kunstwortes, Sinus, ist schwierig. Godin hat eine witzige Muthmaßung darüber vorgetragen. Da die Chorden der Bogen im Lateinischen auch Inscriptae heißen, so habe man ihre Hälften, die Sinus, Semisses inscriptarum genannt, und dieses abgekürzt S. ins. geschrieben, woraus dann das Wort Sinus entstanden sey. Die Benennungen anderer goniometrischen Linien, Cosinus, Cotangens, Cosecans, sind wirklich Zusammenziehungen von Co Sinus d. i. Complementi Sinus, u. s. f.

Hutton führt in der Vorrede zu seiner Ausgabe der trigonometrischen Tafeln mancherley Erklärungen anderer, auch einige Muthmaßungen von ihm selbst an, schließt aber mit der Bemerkung, daß das Wort Sinus im Lateinischen demjenigen Worte entsprechen möge, welches die Araber für die dazu bezeichnete Linie eingeführt hätten, wie dann auch eine solche Übersetzung wirklich bey dem Worte Sagitta Statt gefunden habe, welches und Sinus versus, nach der Angabe des Otho in der Vorrede zu dem Canon des Rhäticus, von den Arabern herrühren.

Das arabische Kunstwort giebt Halley an, in einem Scholion zu dem ersten Satze des III. Buches der Sphaericorum des Menelaus, wovon dieser mit

der orientalischen Literatur der Mathematik sehr vertraute Gelehrte eine Ausgabe geliefert hat, bey welcher hebräische und arabische Manuscripte verglichen sind *). Er sagt, er habe das Kunstwort des hebräischen Übersetzers für die Chorde eines doppelt genommenen Bogens immer durch Sinus gegeben, zur Übereinstimmung mit den neuern Mathematikern, wie es auch der arabische Übersetzer gethan habe, dessen Kunstwort er dabey anführt. Mit lateinischen Buchstaben geschrieben, lautet es dschaib. Diesem legt Golius in seinem arabischen Wörterbuche, (nach der Angabe eines gelehrten Freundes), pag. 560, die Bedeutungen bey: sinus indusii vestisque, seu collare ad jugulum patens. Et sinus apud Geometras, i. e. semissis rectae circulo inscriptae, a diametro per medium sectae. Radix est dschaba **), secuit.

Man sieht, daß der arabische Geometer sein Kunstwort von einer Aehnlichkeit des Kreis-Einschnittes mit dem Einschnitte eines Hemdes hergenommen hat; allein eine Herleitung des lateinischen Kunstwortes erhalten wir hieraus noch nicht. Der Einschnitt eines Hemdes heißt im Lateinischen nicht sinus, wie Golius hier das Wort gebrauchen will. Bey einem Kleide angewandt bedeutet es die Höhlung, die man mit dem einen untern Ende eines weiten, vorn offenen Kleides (einer Toga) vor der Brust machen kann, um darin etwas zu verbergen, daher auch die Bedeutung, Meerbusen, entstanden ist. Derjenige, der das arabische Kunstwort lateinisch hat geben wollen, fand etwa keinen, ihm gefallenden Ausdruck, der das Eingeschnittene darstellte, und setzte das, was hinter dem Einschnitte des Hemdes ist, den Busen des Körpers, Sinus, für den Ausdruck des Arabers. Mit der zweyten Bedeutung des Worts, Sinus, ist es in der That eben so gegangen.

*) Pfleiderers ebene Trigonometrie, Tübingen, 1802. S. 16.

**) Der Buchstab der Araber, der hier durch dsch ausgedrückt ist, entspricht genauer dem französischen g vor e und i.

Wenn auch diese Etymologisirung fehlen sollte, so ist das Beste, daß die Frage nur eine literarische Ergötzlichkeit betrifft. Was Kästner in seiner Geschichte der Mathematik, Bd. I. S. 523, nur angedeutet hat, ist hier weiter ausgeführt worden.

Sinus naturalis ist die durch den Halbmesser als Einheit in der Gestalt einer gebrochnen Zahl dargestellte Linie; sinus artificialis ist der Logarithmus dieser Zahlgröße. So erscheinen die Sinus in unsern trigonometrischen Tafeln mit ihren Logarithmen verbunden. Mehreres in dem Artikel, Trigonometrie.

Sinus rectus ist eine Benennung dieser Linie in Beziehung auf den Abschnitt des einen Halbmessers zwischen dem Sinus und dem Kreisbogen, welcher Sinus versus heißt.

Sinus versus, Quersinus, als der Abschnitt, welchen der Sinus eines Kreisbogens auf dem einen Halbmesser von dem Endpuncte desselben an macht, ist der Unterschied zwischen dem Halbmesser und dem Cosinus, oder $\sin. \text{vers.}\ A = 1 - \cos A$. In einigen trigonometrischen Tafeln ist ein Canon der Quersinus enthalten.

Auch ist $\sin. \text{vers.}\ A = 2 (\sin \frac{1}{2} A)^2$. — Denn die Chorde eines Bogens A ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Durchmesser und dem Sinus versus (Sagitta). Auch ist sie $= 2 \sin \frac{1}{2} A$. Man nehme den Halbmesser zur Einheit, so ist $2 : 2 \sin \frac{1}{2} A = 2 \sin \frac{1}{2} A : \sin. \text{vers}\ A$.

Wie die Sinus aus den Bogen, (oder den Winkeln als Bogen für den Halbmesser $= 1$), gefunden werden, ist in dem Artikel, Cyklometrie, 9, angegeben. Doch zeigt diese Reihe, und die ihr entsprechende, in 1, nicht, wie das Verhältniß zweyer Bogen, oder ihrer Winkel, von dem Verhältnisse der zugehörigen Sinus verschieden ist.

Es seyn zwey Winkel φ und $\varphi + \alpha$, so ist $\sin\varphi : \sin(\varphi + \alpha) = 1 : \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\tang\varphi}$, da das Verhältniß der Winkel ist $1 : 1 + \frac{\alpha}{\varphi}$.

Das nachfolgende Glied in jenem Verhältnisse ist immer kleiner als in dem der Winkel: oder das Verhältniß der Sinus zweyer Winkel ist immer kleiner als dasjenige ihrer Winkel, und zwar in dem ersten Quadranten, den größern Winkel zum nachfolgenden Gliede genommen.

Denn es ist $\sin(\varphi + \alpha) = \sin\varphi.\ \cos\alpha + \cos\varphi.\ \sin\alpha$, Goniometrie, 24, woraus das angegebene Verhältniß sogleich folgt.

Bey demselben Winkel α entfernt sich das Verhältniß der Sinus mehr von demjenigen der Winkel, wann φ dem Quadranten näher genommen wird, und kommt für kleine Winkel φ demselben nahe, desto mehr, je kleiner auch der Unterschied der Winkel ist.

Sinusoide ist eine krumme Linie, auf welcher ein Gewicht, das mittelst eines Seiles oder einer Kette, welche über eine Rolle an einem Pfeiler gezogen ist, mit einem schweren Hebel in jeder Lage beider im Gleichgewichte sich befindet. Belidor, der in der Science des Ingénieurs. L. IV. ch. 6. die Anwendung auf die Erhebung der Zugbrücken zeigt, hat ihr diesen Namen gegeben, weil er zu ihrer Construction die Sinus der Erhebungswinkel der beweglichen Brücke gebraucht. Es bedurfte keines neuen Namens, da die krumme Linie eine Epicykloide ist, wie Joh. Bernoulli schon lange vorher in den Actis Erud. 1695 gezeigt hatte. Der Marquis L'Hopital hatte in diese gelehrte Monatsschrift die Auflösung der gedachten Aufgabe einrücken lassen (Febr. 1695). Sie war ihm von einem gelehrten Geometer (Sauveur) vorgelegt worden, der sie sehr schwierig gefunden hatte, da er 27 Proportionen dazu ge-

brauchte. L'Hopital fand die Gleichung für die krumme Linie leicht; sie ist eine algebraische vom vierten Grade, und hat dreyerley, aber verwandte Formen. Joh. Bernoulli fügte einen Aufsatz bey, worin er, wie gesagt, zeigte, daß die Curve zu den Epicykloiden gehört, und durch die Wälzung eines Kreises über einem ihm gleichen beschrieben wird, wobey der beschreibende Punct entweder auf dem Umfange des sich wälzenden Kreises, oder außerhalb oder innerhalb seyn mag. Er nannte sie die Curvam aequilibrationis, die Gleichgewichts-Linie, und trug die Aufgabe noch allgemeiner vor. S. auch Joh. Bernoullii Opera, T. I. nr. 23. Von Jac. Bernoulli ist a. a. O. auch eine Auflösung dieser Aufgabe in seinen Werken T. I. nr. 63. befindlich. Von Leibnitz ist auch eine Bemerkung über diese Untersuchung in den A. Er. 1695. Apr. eingerückt.

Belidor, der dieses bey der Ausarbeitung seines Werks über die Ingenieur-Wissenschaft (Zweyte Ausg. Haag, 1734) nicht wußte, zeigt es in seinem Dictionnaire portatif de l'Ingénieur, à Paris 1755, an.

In der zweyten Abtheilung dieses Werks wird die Gleichgewichts-Linie vorkommen.

Situs und Analysis situs, s. in dem Artikel, Lage.

Societäts-Rechnung s. Gesellschafts-Rechnung.

Solidum, das körperliche Ausgedehnte, s. Ausdehnung. Man mag es dadurch von dem geometrischen Körper unterscheiden, daß dieser mit einer gewissen Form gedacht werde, das Solidum nicht.

Solidus Angulus ist ein Winkel, der durch drey oder mehrere Ebenen gebildet wird, welche einen Punct gemeinschaftlich haben, s. Winkel, körperlicher.

Solidus locus, eine Linie vom zweyten Grade,

so fern sie zur Auflösung einer unbestimmten Aufgabe gebraucht wird, s. Ort.

Solidus numerus, eine Zahl, welche das Product dreyer Zahlen ist, eine veraltete Benennung.

Solidum problema, eine Aufgabe, die durch eine Linie vom zweyten Grade aufgelöset wird. — Theorema, ein Lehrsatz, der durch Hülfe einer solchen Linie bewiesen wird.

Species in der Arithmetik sind Verwandlungen einer Form einer Zahlgröße in eine andere. Eine Zahl, die aus mehrern gegebenen Theilen zusammen gesetzt ist, wird durch die Addition in eine eben so große, dekadisch, etwa auch dodekadisch oder dyadisch, geordnete, verwandelt. — Eine Zahl, die als der Theil eines gegebenen Ganzen zu dem andern gegebenen Theile desselben gedacht wird, wird durch die Subtraction unabhängig, gleichfalls auf vorige Art geordnet, dargestellt. — Eine Zahl, von welcher gefordert wird, daß sie ein gewisses Vielfaches einer gegebenen Zahl sey, wird in eine auf gleiche Weise geordnete durch die Multiplication verwandelt; so auch durch die Division eine Zahl, von welcher gesagt wird, daß sie ein gewisser Theil einer gegebenen Zahl seyn soll.

Zu den gewöhnlichen vier Speciebus der gemeinen Rechenkunst kann man noch füglich die Erhebung einer Zahl auf eine gegebene Potenz, und die Zerfällung einer Zahl in eine gegebene Anzahl gleicher Factoren setzen. Jene ist eine künstlichere Multiplication, diese eine künstlichere Division, so wie die Multiplication eine abgekürzte Addition, die Division eine abgekürzte Subtraction ist.

Species in der Geometrie bedeutet eine Übereinstimmung der Figuren in Absicht auf Anzahl und Größe ihrer Winkel, und die Verhältnisse der Seiten. So heißt triangulum specie datum ein Dreyeck, das in Absicht auf die Winkel und dadurch auch in Absicht der

Verhältnisse der Seiten gegeben wird, wobey die Größe unbestimmt bleibt. Bei einer Figur von mehr als drey Seiten müssen die Verhältnisse der Seiten besonders gegeben werden.

Sphaera, griech. σφαιρα, ist Kugel.

Sphärik,

Sphaerica, ist der Inbegriff von Lehrsätzen die Kugel betreffend, insbesondere über die Kreise, die auf ihrer Oberfläche gezogen werden. Die Berechnung der sphärischen Dreyecke gehört in die Trigonometrie.

In dem Artikel, Kugel, sind die Lehren der Sphärik vollständig genug vorgetragen.

Theodosius, ein griechischer Mathematiker, der ein Zeitgenosse von Cicero gewesen seyn mag, hat ein sehr gutes Werk über die Sphärik hinterlassen, worin sein besonderer Zweck war, die sphärische Astronomie geometrisch zu begründen, und die dazu gehörigen Sätze systematisch zu sammeln. Das dritte Buch enthält mehrere merkwürdige Sätze, die schon schwer genug sind, daß Pappus darüber Erläuterungen aufsetzte. Barrow hat eine lateinische Ausgabe dieses Werks 1675 geliefert, worin er neue und kürzere Beweise gegeben hat. Eine griechische und lateinische Ausgabe ist von Hunt, Oxford 1707 veranstaltet.

Sphärisches Dreyeck, s. Trigonometrie.

Sphärische Fläche, s. Kugel, 35—46.

Sphäroid, *) ist ein Körper, begränzt von einer krummen Oberfläche, deren Durchschnitt mit jeder Ebene, die durch eine von drey auf einander senkrechten Axen gelegt wird, eine Ellipse ist.

*) Der Ausdruck, Sphäroid, ist sprachrichtig, nicht der von einigen gebrauchte, auch in diesem Werke einigemal aufgenommene Ellipsoid oder Elliptoid. So auch parabolisches und hyperbolisches Konoid, nicht Paraboloid und Hyperboloid.

Wenn die durch eine der Axen gelegten Ellipsen alle einander gleich sind, so entsteht das Sphäroid durch die Umdrehung einer Ellipse um die eine Axe, und der Schnitt durch die beiden andern Axen ist ein Kreis. Archimedes, der die Gestalt der Durchschnitte der Konoiden und den körperlichen Inhalt ihrer Abschnitte bestimmt hat, (f. Konoid und Cubirung), hat dasselbe auch für diese Gattung von Sphäroiden geleistet.

1. Es ist in Fig. 31. A der Mittelpunct der gegenseitig senkrechten Coordinaten-Axen AX, AY, AZ, eines Sphäroids, welches da mit zwey halben auf einander senkrechten elliptischen Durchschnitten, BCE, BDE, und einem Quadranten, CAD, durch je zwey der Axen gezeichnet ist. Diese Ellipsen haben den Punct A zum gemeinschaftlichen Mittelpuncte. Die halben Axen derselben seyn $AB = a$; $AC = b$; $AD = c$. Durch die Axe BE und einen Punct F des elliptischen Quadranten CD sey die halbe Ellipse BFE gezogen, deren Ebene mit der Ellipse BCE den Winkel $FAC = \vartheta$ mache.

Es ist

$$(b^2 \sin\vartheta^2 + c^2 \cos\vartheta^2)\ AF^2 = b^2 c^2.$$

Denn man fälle von F auf die halbe Axe AC die senkrechte FG, so giebt die durch AC und AD gelegte Ellipse die Gleichung,

$$AC^2 \times GF^2 + AD^2 \times AG^2 = AC^2 \times AD^2.$$

Da $GF = AF \times \sin\vartheta$, und $AG = AF \times \cos\vartheta$ ist, so verwandelt sich diese Gleichung unmittelbar in die angegebene.

2. Von irgend einem Puncte R der Ellipse BFE fälle man auf die Ebene BCE die senkrechte RQ; von dem Puncte Q ziehe man auf AB die senkrechte QP, und setze $AP = x$; $PQ = y$; $QR = z$, so ist die Gleichung zwischen diesen drey zu dem Puncte R gehörigen Coordinaten,

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Man ziehe PR, so ist die Ebene des Dreyecks RPQ senkrecht auf die Ebene der Ellipse BCE, und die auf

PQ senkrechte AP ist senkrecht auf PR, so wie es EA auf AF in dem elliptischen Quadranten CFD ist. Daher sind AF und PR parallel. Folglich ist aus der Natur der Ellipse,

$$AB^2 \times PR^2 + AF^2 \times AP^2 = AB^2 \times AF^2;$$

oder, wenn PR = u gesetzt wird,

$$a^2 u^2 = (a^2 - x^2)\ AF^2.$$

Mit dieser Gleichung verbinde man die in (1.) gefundene,

$$(b^2 \sin\vartheta^2 + c^2 \cos\vartheta^2)\ AF^2 = b^2 c^2,$$

so ist

$$(b^2 \sin\vartheta^2 + c^2 \cos\vartheta^2)\ a^2 u^2 = b^2 c^2 (a^2 - x^2).$$

Da der Winkel RPQ = ϑ ist, so ist $u \sin\vartheta = z$, und $u \cos\Theta = y$. Die Substitution dieser Werthe liefert, nebst der Versetzung des Gliedes $b^2 c^2 x^2$, die angegebene Gleichung.

3. Für eine Ellipse, die durch die Axe AY oder AC gelegt wird, wird dieselbe Gleichung gefunden, indem nur a und b, x und y vertauscht zu werden brauchen. So wird erhalten

$$a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 + b^2 a^2 z^2 = b^2 a^2 c^2.$$

Eben so ist für eine Ellipse, die durch die Axe AZ oder AD gelegt wird, wobey a und c, x und z vertauscht werden,

$$b^2 a^2 z^2 + c^2 a^2 y^2 + c^2 b^2 x^2 = c^2 b^2 a^2.$$

Derselbe Punct auf der Oberfläche eines Sphäroids gehört also drey Ellipsen zu, die durch die drey Axen desselben gelegt sind.

4. Die Gleichung für das Sphäroid wird auch aus der Form hergeleitet, welche sie haben muß, damit sie, wenn eine der Coordinaten, x, y, z, Null gesetzt wird, in die Gleichung für eine der gegebenen Ellipsen übergehe, so, wenn z = o genommen wird, in die Gleichung zwischen AP und PM, den Coordinaten an der Ellipse BCE. Diese Form ist die,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 \doteq M.$$

Sie liefert auch für dieselben Werthe, (positive oder negative), zweyer der Coordinaten, zwey gleiche und ent-

gegengesetzte Werthe der dritten, wie es seyn muß, da das Sphäroid durch jede der drey Ellipsen, welche gleichsam die Grundlage davon ausmachen, in zwey gleiche und ähnliche Hälften und durch alle drey Ellipsen in acht gleiche Ausschnitte getheilt wird, welche den gemeinschaftlichen Scheitelpunct A haben, und wovon je zwey an einerley Seite einer der drey Ellipsen und einander gegenüberliegende auch ähnlich sind und ähnlich liegen.

Die Coefficienten und das unveränderliche Glied in der Gleichung werden durch die gegebenen Axen der Fundamental-Ellipsen bestimmt. Wenn y und z, jede $= o$ genommen werden, so ist $x = a$ und $Aa^2 = M$. Eben so ist $Bb^2 = M$, und $Cc^2 = M$. Daher sind in A, B, C, nach der Ordnung, die Factoren $b^2 c^2$; $a^2 c^2$; $a^2 b^2$. Also ist $A = b^2 c^2$; $B = a^2 c^2$; $C = a^2 b^2$. Sollte A noch einen Factor enthalten, so wäre dieser auch in M vorhanden, daher auch in B und C, wäre also ein ganz überflüssiger Factor der ganzen Gleichung. Die Gleichung für das Sphäroid ist also

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt unmittelbar, daß der dadurch bestimmte Körper in endliche Gränzen eingeschlossen ist. Wenn x größer als a, oder y größer als b, oder z größer als c genommen wird, so erhalten die beiden andern, jede oder eine, unmögliche Werthe.

Es ist nun noch zu zeigen, daß jeder Durchschnitt dieses Körpers, der durch eine der Axen der drey Fundamental-Ellipsen geführt wird, eine Ellipse ist.

5. Der Schnitt werde durch die Axe BE und den Punct R der Oberfläche geführt. Die Coordinaten des Punctes R sind, wie vorher, $AP = x$; $PQ = y$; $QR = z$. Man ziehe die gerade PR, so ist RPQ der Winkel, welchen die Ebene des Schnittes mit der Ebene der Ellipse BCE macht. Es sey $RP = u$, und der W. $RPQ = \Theta$, so ist $PQ = u \cos\Theta$; und $QR = u \sin\Theta$. Zur Abkürzung werde gesetzt, $\sin\Theta = m$; $\cos\Theta = n$,

Aus der Gleichung für den Punct R, auf der Oberfläche des Sphäroids, entsteht nun die Gleichung für denselben Punct, in der durch den W. RPQ bestimmten Ebene, zwischen den Coordinaten AP ($= x$) und PR ($= u$),

$$b^2 c^2 x^2 + (m^2 b^2 + n^2 c^2) a^2 u^2 = a^2 b^2 c^2,$$

oder

$$\frac{b^2 c^2}{m^2 b^2 + n^2 c^2} x^2 + a^2 u^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{m^2 b^2 + n^2 c^2}.$$

Dieses ist eine Gleichung für eine Ellipse, deren eine Axe, auf welcher die x genommen werden, 2a ist, und die conjugirte =

$$\frac{2bc}{\sqrt{(m^2 b^2 + n^2 c^2)}}.$$ Die halbe conjugirte Axe ist AF, die gerade von dem Mittelpuncte A zu dem Puncte F, worin die Ellipse BRE die durch die Endpuncte C, D der halben Axen AC, AD gezogene Ellipse trifft.

6. In der Gleichung für die Oberfläche des Sphäroids,

$$b^2 c^2 x + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2,$$

werde x unveränderlich genommen, so wird die Gleichung für den Schnitt durch MPN erhalten, der parallel mit dem durch AC und AD, in dem Abstande AP $= x$, geführt ist. In der Form,

$$a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = b^2 c^2 (a^2 - x^2),$$

giebt sie eine Ellipse, in welcher die halbe Axe in der Richtung der y, nämlich PM $= \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$, und die halbe Axe in der Richtung der z, nämlich

PN $= \frac{c}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ist.

7. Der Schnitt eines Sphäroids, der parallel mit einer der Coordinaten-Ebenen, YAZ geführt wird, ist dem Schnitte in dieser Ebene CFD, ähnlich. — Denn in dem Schnitte durch MPN, wo PM mit AC, und

PN mit AD parallel ist, ist PM : PN = b : c, oder PM : PN = AC : AD. Ellipsen, deren Axen dasselbe Verhältniß haben, sind ähnliche Figuren, s. Aehnlichkeit. — In dem Artikel, krumme Fläche, ist der Satz allgemein erwiesen.

Wenn der Schnitt durch CAD ein Kreis ist, so sind alle mit demselben parallelen Schnitte auch Kreise.

8 Jeder Schnitt eines Sphäroids ist eine Ellipse. — Denn die Oberfläche dieses Körpers ist eine krumme Fläche vom zweyten Grade, deren Schnitte immer Kegelschnitte sind, s. krumme Fläche, 63. Für das Sphäroid, als einen endlich begränzten Körper, bleibt nur die Ellipse zur Durchschnittslinie übrig. Sie begreift auch den Kreis.

Archimedes beweiset diese Eigenschaft der Sphäroiden, für die von ihm betrachtete Gattung, in seiner Abhandlung) S. 15.

9. Jeder endliche, von einer krummen Fläche des zweyten Grades begränzte Körper enthält einen Punct, welcher der Mittelpunct aller dadurch gelegten elliptischen Durchschnitte ist, oder, dieser Körper ist ein Sphäroid.

Denn man nehme irgend einen Punct O, innerhalb oder ausserhalb eines Sphäroids, zum Mittelpuncte der Coordinaten-Axen, und bestimme dessen Lage, in Beziehung auf den Mittelpunct des Sphäroids, durch die Coordinaten α, β, γ, nach der Richtung der x, y, z, die für das Sphäroid gebraucht sind. Die Axen der neuen Coordinaten seyn ebenfalls senkrecht auf einander, wie sie es auch in der allgemeinsten Gleichung genommen werden. Die Lage einer von ihnen wird bestimmt durch den Punct, in welchem sie eine der drey Coordinaten-Ebenen für das Sphäroid treffen soll, das ist, durch die beiden zu diesem Puncte gehörigen Coordinaten, δ, ε, in dieser Ebene. Für die Lage der zweyten Coordinaten-Axe, die senkrecht auf die erste seyn soll,

bleibt nur eine Bestimmung, durch eine einzelne Coordinate, ζ, willkürlich. Die Lage der dritten Axe ist durch die Lage jener beiden gegeben. Zu den drey Bestimmungen, a, b, c, in der einfachsten Gleichung für ein Sphäroid, kommen also noch sechs willkürliche. Führt man diese in die Gleichung ein, so entsteht eine Gleichung vom zweyten Grade, in welcher zu den Coefficienten, das unveränderliche Glied mit gerechnet, neun Größen nach Willkür angenommen werden können. In der allgemeinsten Gleichung des zweyten Grades sind zehn Coefficienten mit Einschluß des unveränderlichen Gliedes vorhanden. Diese zu bestimmen reichen neun gegebene Größen hin, da mittelst der Division aller Coefficienten durch einen derselben, bey der Zusammenstellung der allgemeinen Gleichung mit der verwandelten, nicht mehr als neun Gleichungen hervorgehen. — So wie nun die einfachste Gleichung für ein Sphäroid sich in die allgemeinste verwandeln läßt, so muß sich jede Gleichung für eine Fläche vom zweyten Grade, wofern sie nur einem begränzten Körper zugehört, in die einfachste für ein Sphäroid verwandeln lassen. Der Körper oder dessen Oberfläche hat also einen Mittelpunct.

10. Zur Erläuterung des hier, von der Bestimmung der Coefficienten in einer allgemeinen Gleichung, angeführten bemerke man, daß die einfachste Gleichuug für ein Sphäroid,

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2,$$

vier Glieder hat, deren Coefficienten durch drey Größen, die Axen dreyer Ellipsen bestimmt werden. Die Division der Glieder durch den Coefficienten von x^2 giebt ihr die Form,

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 + \frac{a^2}{c^2} z^2 = a^2.$$

Die Multiplication aller Glieder mit einer gegebenen Größe, als $b^2 c^2$, ändert die Gleichung nicht.

Zu vergleichen Euleri Introd. in Anal. Infin.

T. II. Append. de Superficiebus secundi ordinis, 113 ff. Auch in diesem Wörterbuche, Artik. Krumme Fläche, 74—90.

11. Den Inhalt eines Sphäroids zu finden. — Man setze das zwischen den ganzen Ellipsen, wovon in (Fig. 31) nur die Quadranten DAC, NPM gezeichnet sind, enthaltene Segment des Sphäroids = Z, so ist dZ = 4NPM. dx (M. s. die Anm. in dem Art. Hufförmiger Abschnitt. Th. II. S. 701)

d. i. $= \frac{\pi bc}{aa} \partial x\ (aa - xx)$. (6) und daraus

$$Z = \frac{\pi bc}{aa}\ (a^2x - \tfrac{1}{3} x^3)$$

ohne Constans, weil Z und x zugleich verschwinden.

Für x = a wird Z dem halben Sphäroid gleich. Dieses ist also $\frac{2}{3}\ \pi abc$, folglich das ganze $= \frac{4}{3} \pi abc$.

12. Eine Ellipse, deren größere Axe = 2a, kleinere = 2b, drehe sich einmahl ganz um diese kleinere Axe herum, so entsteht ein gedrucktes oder abgeplattetes Sphäroid (sphaeroides compressum, s. latum), dessen Inhalt $= \frac{4}{3}\ \pi aab$. Geschieht die Drehung um die größere Axe, so entsteht ein längliches oder ablanges Sphäroid (sphaer. oblongum), dessen Inhalt $= \frac{4}{3}\ \pi abb$.

13. Das gedruckte Sphäroid verhält sich zu dem ablangen wie a : b.

14. Um jedes Sphäroid läßt sich ein gerader Cylinder (dieses Wort in weiterem Sinne genommen) beschreiben, dessen Grundflächen einem der Hauptdurchschnitte des Sphäroids gleich sind, die Höhe aber der auf

diesem Durchschnitte senkrechte Durchmesser des Sphäroids ist. Dieses erhellt daraus, daß die berührenden aller Ellipsen wie EFB in den Scheitelpuncten F der EB parallel sind, die berührenden aber an den Scheiteln E und B dieser Ellipsen in einer mit DCA parallelen Ebene liegen. Da der Inhalt eines solchen umschriebenen Cylinders $= 2\pi abc$, so ist das Sphäroid $\frac{2}{3}$ desselben.

15. Der Halbmesser einer Kugel r, welche mit dem Sphäroid gleichen Inhalt hat, ist $= \sqrt[3]{abc}$. Ist $a = c$, also das Sphäroid durch Drehung um die Axe 2b entstanden, so ist $r = \sqrt[3]{aab}$ oder $= a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, folglich die erste zweyer Mittelproportionalen zwischen dem Halbmesser des Äquators des Sphäroids und der halben Axe desselben.

16. Die Oberfläche eines Sphäroids zu finden. — In dem Viertel des Sphäroids ABCD, welches (Fig. 32.) darstellt, seyn BED, und BeD zwey einander unendlich nahe Schnitte durch die Axe BD, HGL und hgl aber ein Paar dem durch die Axen AO, OC gehenden Hauptschnitte AOC parallele, einander gleichfalls unendlich nahe Schnitte, so entsteht, indem die durch die Axe BD gelegten Ellipsen BED, BeD die dem Hauptschnitte AOC parallelen GNL, gnl in N, R, n, r durchschneiden, auf der Oberfläche des Sphäroids das Viereck NnrR, welches, insofern man die Fläche des Sphäroids von B und dem Quadranten BLA aus entstehen läßt, das Differential des Sectors BNn ist, welcher selbst wiederum das Differential des Sectors BNL ist. Es ist also hier, wie bey Erfindung des Inhalts eines sphärischen Dreyecks durch Rechnung in dem Art. Kugel, 37. eine doppelte Integration nöthig.

Man ziehe an N die berührende der Ellipse BED, welche der verlängerten OB in T begegne, und denke sich nun durch alle Puncte der Ellipse GNL

solche Ellipsen wie BED gelegt, und an ihre Durchschnitte mit GNL Berührungslinien gezogen: diese werden sämmtlich der verlängerten OB in T begegnen, weil OH : OB = OB : OT (Ellipse, 30) und OH die gemeinschaftliche Abscisse der Berührungspuncte aller jener Ellipsen ist. Das Viereck NnrR ist also als ein unendlich kleines Stück einer unendlich schmalen Zone der Seitenfläche eines Kegels, dessen Spitze in T, Axe TO, und wovon die Ellipse GNL ein auf die Axe senkrechter Schnitt ist, anzusehen, folglich ein Trapez mit zwey parallelen Seiten Nn, Rr, das sich aber, weil der Unterschied von Rr und Nn gegen Nn unendlich klein ist, mit einem Parallelogramm verwechseln läßt. Sein Inhalt ist also = RN × Nn × sin RNn.

Um diesen Inhalt auf die für die Integration bequemste Weise auszudrucken, erinnere man sich, daß die Rectification der Ellipse sehr vereinfacht wird, wenn man den Bogen, dessen Sinus in dem über der großen Axe beschriebenen Kreise die mit der Ordinate der Ellipse zu einerley Abscisse gehörige Ordinate des Kreises ist (M. s. Rectification, 12.) als die veränderliche Größe einführt. Diese Substitution leistet auch hier gute Dienste.

Es sey OA = a, OB = b, OC = c. Von N sey NM auf die Ebene AOC senkrecht, so fällt M in den Durchschnitt OE der auf AOB senkrechten Ebene BED mit dieser. Von M sey MP in der Ebene AOC senkrecht auf OA und NQ ihr in der Ebene GHL parallel, so ist auch HQN ein rechter Winkel. Man setze OP = HQ = x, PM = NQ = y und MN = OH = z, so daß x, y, z die drey rechtwinkligen Coordinaten des Punctes N sind. Ferner nenne man noch die in den Ellipsen AOC, LHG an die Puncte E, N gezogenen halben Durchmesser OE, t, HN, s, und denke sich nun in der Ebene des Schnitts BED über Bd als Durchmesser an derselben Seite mit der Ellipse BED einen Halbkreis beschrieben, die Ordinate HN der

El-

Ellipse BED bis an den Halbkreis verlängert, und an den Endpunct der Ordinate des Kreises einen Halbmesser desselben gezogen. Heiß nun φ der Winkel dieses Halbmessers mit dem OB, so ist $OH = z = b\cos\varphi$, $HN = s = t\sin\varphi$, wobey man bedenken muß, daß OE die andere Halbaxe der Ellipse BED ist. Man wird sich dieses durch Fig. 5. Tab. IX. des zweyten Theils deutlich machen können. Denn wenn dort $CA = CO = b$, $CD = CR = t$, $ACQ = \varphi = CRN$ so ist $CP\,(z) = CQ.\cos PCQ = b\cos\varphi$, und $CN = PM\,(s) = CR\ \sin CRN = t\sin\varphi$. Da wegen der gleichen Winkel NHL, EOA die Durchmesser HN, OE, ähnlich liegende Linien in den ähnlichen Ellipsen GNL, CEA sind, so ist $OE : HN = AO : HL = CO : GH$, folglich $HL = a\sin\varphi$, und $GH = c\ \sin\varphi$. Man denke sich nun innerhalb des rechten Winkels GHL mit HL den Quadranten eines Kreises beschrieben, und die Ordinate desselben zu der Abeisse HQ durch Verlängerung der QN gezogen, und setze den Winkel am Mittelpuncte H, welchem diese Ordinate als Sinus entspricht, ψ, so ist $HQ = x = OP = a\sin\varphi\cos\psi$, $QN = y = PM = c\sin\varphi\sin\psi$, und $s = HN = \sin\varphi\sqrt{(a^2\cos\psi^2 + c^2\sin\psi^2)}$, t oder OE aber $= \sqrt{(a^2\cos\psi^2 + c^2\sin\psi^2)}$.

Es ist nun in der Ellipse BED das Bogenelement $NR = \sqrt{(\partial z^2 + \partial s^2)}$, wo die Differentiale von z und s bloß in Beziehung auf φ zu nehmen sind, weil für eine bestimmte Ellipse BED der Winkel ψ derselbe bleibt, indem solcher bloß den Winkel AOE oder LHN (dessen $\text{tang.} = \frac{c}{a}\ \text{tang}\psi$) bestimmt. Man erhält hiernach

$NR = \partial\varphi\sqrt{(b^2\sin\varphi^2 + (a^2\cos\psi^2 + c^2\sin\psi^2)\cos\varphi^2)}$.

Das Differential ist positiv, weil der Bogen BN mit φ zugleich wächst.

Ferner ist in der Ellipse GNL das Bogenelement $Nn = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, wo aber bey der Differentiirung von x und y bloß ψ als veränderlich zu nehmen ist, weil

φ für eine bestimmte Ellipse GNL sich nicht ändert, indem es bloß den Abstand derselben OH von O nebst den Axen 2HL, 2HG bestimmt. Hiernach wird Nn = $\partial\psi \sin\varphi \surd (a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2)$, positiv, weil der Bogen LN und Winkel ψ zugleich wachsen.

Noch ist sin RNn durch φ und ψ auszudrucken übrig. An N werde eine Berührungslinie der Ellipse GNL, welche der verlängerten HL in X begegne, gezogen, so ist der Winkel RNn dem Winkel TNX der beiden Berührenden TN, NX gleich. Wenn nun noch HS auf NX senkrecht gezogen und TS verbunden wird, so ist auch TS auf NX senkrecht, und sinRNn = sin TNX

$= \sin TNS = \frac{TS}{TN}$.

Da OH : OB = OB : OT (Ellipse, 30) und auf gleiche Weise HQ : HL = HL : HX, so wird OT = $b \sec\varphi$, HX = $a \sin\varphi \sec\psi$. Also ist HT = $b (\sec\varphi - \cos\varphi) = b \sin\varphi \operatorname{tang}\varphi$, QX =

$a \sin\varphi \sin\psi \operatorname{tang}\psi$ und $\operatorname{tang} HXS = \frac{QN}{QX} = \frac{c \cos\psi}{a \sin\psi}$

Hieraus ergiebt sich

$\sin HXS = \frac{c \cos\psi}{\surd (a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2)}$, und HS =

$HX.\sin HXS = \frac{ac \sin\varphi}{\surd (a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2)}$. Ferner ist $TS = \surd (HT^2 + HS^2) =$

$\operatorname{tang}\varphi \surd \frac{a^2 c^2 \cos\varphi^2 + b^2 (a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2) \sin\varphi^2}{a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2}$

$TN = \surd (HT^2 + HN^2) =$
$\operatorname{tang}\varphi \surd (b^2 \sin\varphi^2 + (a^2 \cos\psi^2 + c^2 \sin\psi^2) \cos\varphi^2)$, mithin

$\sin RNn = \surd (M : N)$, wo M =
$a^2 c^2 \cos\varphi^2 + b^2 (a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2) \sin\varphi^2$, und N =
$(a^2 s\psi^2 + c^2 cs\psi^2)(b^2 s\varphi^2 + (a^2 cs\psi^2 + c^2 s\psi^2) cs\varphi^2)$

Dadurch wird endlich $RN \times Nn \times \sin RNn = \partial\psi\partial\varphi \sin\varphi \sqrt{(a^2 c^2 \cos\varphi^2 + b^2 (a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2) \sin\varphi^2)}$. Dieses Differential giebt in Beziehung auf φ so integrirt, daß das Integral für $\varphi = 0$ verschwindet, den unendlich kleinen Sector BNn. Integrirt man alsdann den für diesen erhaltenen Ausdruck noch einmal in Beziehung auf ψ so, daß das Integral für $\psi = 0$ verschwindet, so erhält man den Sector BNL. Die Größen φ und ψ sind hierbey von einander ganz unabhängig, so daß man nach der ersten Integration, um das Segment der Oberfläche BEDeB zu erhalten, nur $\varphi = \pi$, nicht etwa einer Function von ψ gleich zu setzen hat. Um das Doppelintegral alsdann über die ganze Oberfläche zu erstrekken, darf man nur $\psi = 2\pi$ setzen. Setzt man in dem Ausdrucke für den Sector BNL $\varphi = \pi$, so erhält man das Segment BEDAB, setzt man darin aber $\psi = 2\pi$, so bekommt man die Fläche der von der ganzen Ellipse GNL begränzten Haube oder Kuppel, deren Spitze B ist; setzt man zugleich $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi$, so bekommt man die ganze Oberfläche als Sphäroids.

17. Nimmt man das vorige Differential negativ, und integrirt alsdann nach φ so, daß das Integral für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ verschwindet, so erhält man das unendlich kleine Zonenstück ENne. Dies nimmt nämlich ab, wenn φ wächst. Eine zweyte Integration nach ψ, wobey das Integral von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ genommen wird, giebt alsdann die zwischen dem Hauptschnitte AOC und dem ihm parallele Schnitte LHG (um das ganze Sphäroid herumgehende) sphäroidische Zone. Es ist demnach, wenn das Zonenstück ALNE = S gesetzt wird,

$$\partial S = -\partial\psi \int \partial\varphi \sin\varphi \sqrt{(a^2 c^2 \cos\varphi^2 + b^2 (a^2 \sin\psi^2 + c^2 \cos\psi^2) \sin\varphi^2)}.$$

18. Es sey $a = c$, also das Sphäroid durch Drehung einer Ellipse, deren Achsen $2a = 2AO$ und $2b = BD$ sind, um die Axe BD entstanden, so wird

$$\partial S = -a\partial\psi \int \partial\varphi \sin\varphi \sqrt{(c^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2)}$$

wo um der größern Allgemeinheit und um des folgenden willen c unter dem Wurzelzeichen beybehalten, und nicht durch das ihm gleiche a ersetzt ist.

Man setze $\cos\varphi = w$, so ist $\sin\varphi\partial\varphi = -\partial w$,
$$\sqrt{(c^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2)} = \sqrt{(c^2 w^2 + b^2 (1 - w^2))}$$
$$= \sqrt{(b^2 + (c^2 - b^2) w^2)} = b \sqrt{(1 + n^2 w^2)}$$
wenn zur Abkürzung $\frac{c^2 - b^2}{b^2}$ oder $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = n^2$ gesetzt wird, wo also zur Realität von n erforderlich ist, daß $a > b$, also das Sphäroid durch Umdrehung der Ellipse BAD um ihre kleinere Axe BD entstanden oder ein gedrucktes sey.

Es wird nun nach (Integralformel, 57. 50.)
$$-\int\partial\varphi \sin\varphi \sqrt{(c^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2)} =$$
$$b\int\partial w \sqrt{(1 + n^2 w^2)} = \tfrac{1}{2}bw \sqrt{(1 + n^2 w^2)}$$
$$+ \frac{b}{2n} \log(\sqrt{(1 + n^2 w^2)} + nw).$$

Da dies Integral für $w = 0$ d. i. für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ verschwindet, so kommt keine Constante hinzu, und man hat
$$\partial S = \tfrac{1}{2} abw\partial\psi \sqrt{(1 + n^2 w^2)} +$$
$$\frac{ab\partial\psi}{2n} \log(\sqrt{(1 + n^2 w^2)} + nw).$$

Hiervon ist das Integral nach ψ und so genommen, daß es für $\psi = 0$ verschwindet
$$S = \tfrac{1}{2}abw\psi \sqrt{(1 + n^2 w^2)}$$
$$+ \frac{ab\psi}{2n} \log(\sqrt{(1 + n^2 w^2)} + nw).$$

19. Da $\sqrt{(1 + n^2 w^2)} + nw = \frac{1}{\sqrt{(1 + n^2 w^2)} - nw}$

also $(\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw)^2 = \frac{\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}-nw}$,

so ist $\log(\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw)$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}-nw}$$

und

$$S = \tfrac{1}{2}abw\psi\sqrt{(1+n^2w^2)}$$
$$+\frac{ab\psi}{4n}\log\frac{\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}-nw}.$$

20. Für die ganze zwischen dem Kreise vom Halbmesser AO (dem Aequator in Bezug auf das Erdsphäroid) und dem ihm parallelen Kreise vom Halbmesser LH = $a\sin\varphi$ enthaltene Zone Z ist $\psi = 2\pi$, daher

$$Z = \pi abw\sqrt{(1+n^2w^2)}$$
$$+\frac{\pi ab}{2n}\log\frac{\sqrt{(1+n^2w^2)}+nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}-nw}$$

auch ist $S = \frac{\psi}{2\pi}.\ Z.$

Der zum Cosinus w gehörige Winkel φ ist das Complement desjenigen, den Dü Sejour die verbesserte Breite nennt.

21. Man setze $\frac{nw}{\sqrt{(1+n^2w^2)}} = u$, so wird

$n^2w^2 = \frac{u^2}{1-u^2}$, $1+n^2.w^2. = \frac{1}{1-u^2}$, und w

$\sqrt{(1+n^2w^2)} = \frac{u}{n(1-u^2)}$. Durch diese Substitutionen wird $Z = \frac{\pi ab}{n}\left(\frac{u}{1-u^2}+\tfrac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}\right)$

wo $u = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)\cos\varphi^2}{b^2+(a^2-b^2)\cos\varphi^2}}$, und wenn die

Abcisse OH auf der kleinen Axe der erzeugenden Ellipse vom Mittelpuncte O an genommen wieder x genannt wird, so ist $\cos\varphi = \frac{x}{b}$, also $u = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)x^2}{b^4 + (a^2 - b^2)x^2}}$.

22. Da $\frac{u}{1 - u^2} = u + u^3 + u^5 + u^7 + \text{etc.}$

und $\frac{1}{2} \log \frac{1 + u}{1 - u} = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + \text{etc.}$

(Logarithmus, 57) so wird

$$Z = \frac{2\pi ab}{n} (u + \tfrac{2}{3} u^3 + \tfrac{3}{5} u^5 + \tfrac{4}{7} u^7 + \text{etc.}).$$

23. Wenn b = a genommen wird, so verwandelt sich das Sphäroid in eine Kugel vom Halbmesser a, und es wird $n = 0$, $u = 0$; aber $\frac{u}{n} \left(= \frac{w}{\sqrt{(1 + n^2w^2)}} \right) = w$, und die von LA beschriebene Kugelzone $= 2\pi aaw = 2\pi ax$ (Complanation, Th. I. S. 515.)

24. Für die halbe Oberfläche des gedruckten Sphäroids ist $\varphi = 0$, also $w = 1$, $nw = n = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{b}$, $\sqrt{(1 + n^2 w^2)} = \frac{a}{b}$, und die ganze Oberfläche =

$$2\pi aa + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \log \frac{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

25. Da $\int \frac{\partial w^2}{\sqrt{1 + n^2w^2}} = \frac{1}{n} \int \frac{n\partial w}{\sqrt{(1 + n^2w^2)}} = \frac{1}{n} \log \tang (45^\circ + \frac{1}{2}\chi)$, wenn $nw = \tang \chi$ genommen wird, so ist die Fläche der elliptischen Zone

$$Z = \frac{\pi ab}{n} (\tang \chi \cdot \sec \chi + \log \tang (45^\circ + \tfrac{1}{2}\chi)).$$

26. Es ist MAm (Fig. 33) die Hälfte einer Hyperbel, deren Mittelpunct C, halbe Zwerchaxe CA. Durch den Mittelpunct C ist DD senkrecht auf CA. Die Hyperbel MAm mache eine volle Umdrehung um DD, so entsteht ein cylinderartiger Köper, Wren's und Parent's Cylindroid, dessen äußere Fläche hohl ist. Man sucht die Oberfläche dieses Körpers.

Wenn die Abcissen x vom Mittelpuncte C an auf der DD genommen werden, und ein unbestimmtes Stück der Fläche, nämlich dasjenige, welches der Bogen AM = s bey der Drehung beschreibt Z heißt, so ist $\partial Z = 2\pi y \partial s$.

Nun ist $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$, also $y\partial y = \frac{a^2}{b^2} x\partial x$,

$$\partial y^2 = \frac{a^4 x^2 \partial x^2}{b^4 y^2}, \partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \frac{(b^4 y^2 + a^4 x^2)\partial x^2}{b^4 y^2}$$

$$= \frac{a^2((a^2 + b^2)x^2 + b^4)\partial x^2}{b^4 y^2}, \text{ und } \partial s$$

$$= \frac{a\partial x \sqrt{((a^2 + b^2)x^2 + b^4)}}{b^2 y}.$$

Dadurch wird

$$\partial Z = \frac{2\pi a \partial x}{b^2} \sqrt{((a^2 + b^2)x^2 + b^4)}.$$

Setzt man hier $\frac{x}{b} = w$, und $\frac{a^2 + b^2}{b^2} = n^2$, so wird

$$\partial Z = 2\pi ab\, \partial w \sqrt{(1 + n^2 w^2)}$$

also $Z = 2\pi ab \int \partial w \sqrt{(1 + n^2 w^2)}$
wo das Integral so zu nehmen ist, daß es für $w = 0$ verschwindet. Dieses führt auf denselben Ausdruck, wie in (19) für die sphäroidische Zone. Man sehe den Artikel Cylindroid.

27. Wird die Oberfläche des länglichten Sphäroids verlangt, so muß man, wofern man nicht unter b in (18) die halbe größere Axe der erzeugenden Ellipse verstehen will, daselbst a und b gegenseitig vertauschen. Dadurch wird das dortige $n^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$. Will man also $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = n^2$ setzen, wie es die Realität von n erfordert, so kommt $-n^2$ statt n^2 in (18) oder $n\sqrt{-1}$ statt n, und es wird

$$S = \tfrac{1}{2}\, abw\,\psi\, \sqrt{(1 - n^2 w^2)}$$
$$+ \frac{ab\psi}{2n\sqrt{-1}} \log(\sqrt{(1 - n^2 w^2)} + nw.\sqrt{-1}).$$

Da die Logarithmen unmöglicher Größen sich auf mögliche Kreisbogen zurückführen lassen, indem

$$\frac{\log(\cos v + \sqrt{-1}.\sin v)}{\sqrt{-1}} = v$$

wie sich leicht aus Goniometr. 153 herleiten läßt, so wird, wenn man $\sin v = nw$ nimmt,

$$\frac{\log(\sqrt{(1 - n^2 w^2)} + nw\sqrt{-1}.)}{\sqrt{-1}} = \text{Ang.}\sin nw$$

und dadurch

$$S = \tfrac{1}{2}\, abw\,\psi\,\sqrt{(1 - n^2 w^2)} + \frac{ab\psi}{2n}\,\text{Ang.}\sin nw$$

$$Z = \pi abw\,\sqrt{(1 - n^2 w^2)} + \frac{\pi ab}{n}\,\text{Ang.}\sin nw.$$

28. Für die halbe Oberfläche des Sphäroids ist $w = 1$, $\sqrt{(1 - n^2 w^2)} = \frac{b}{a}$, also die Oberfläche des ablangen Sphäroids =

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\,\text{Ang.}\sin\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$$
$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\,\text{Ang.}\cos\frac{b}{a}.$$

29. Wenn b = a genommen wird, so ist n = o. In dem Ausdrucke $\frac{\pi ab}{n}$ Ang. sin nw wird also der erste Factor unendlich, der zweyte ist o. Um den Werth des Products zu haben braucht man die Reihe für den Bogen aus dem Sinus. Da nämlich Ang. sin nw

$= nw + \frac{1}{6} n^3 w^3 + \frac{3}{40} n^5 w^5 +$ etc. so ist

$\frac{1}{n}$ Ang. f $nw = w + \frac{1}{6} n^2 w^3 + \frac{3}{40} n^4 w^5 +$ etc.,

welches, für n = o, = w ist. Daher ist die Fläche der von LA (Fig. 31) beschriebenen Kugelzone $= 2\pi a^2 w = 2\pi ax$, wie in (22).

30. Setzt man $nw = \sin\sigma$, so wird in (27)

$$Z = \frac{\pi ab}{n} \sin\sigma \cos\sigma + \frac{\pi ab}{n} \sigma$$

$$= \frac{\pi ab}{2n} (\sin 2\sigma + 2\sigma)$$

wo $\sin\sigma = \frac{\cos\varphi \sqrt{(aa - bb)}}{a.} = \frac{x \sqrt{(aa - bb)}}{a^2}$.

31. Um die Oberflächen des gedruckten und länglichten Sphäroids mit einander zu vergleichen, setze man $a^2 - b^2 = a^2 e^2$, so daß e die Excentricität der erzeugenden Ellipse ist, so wird die Oberfläche des gedruckten Sphäroids =

$2\pi aa \left\{1 + \frac{1 - e^2}{2e} \log \frac{1 + e}{1 - e}\right\}$, die des ablangen,

$= 2\pi aa \left\{1 - e^2 + \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{e}. \text{ Ang sin } e\right\}$, jene verhält sich also zu dieser wie $(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}$

$+ \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{2e} \log \frac{1 + e}{1 - e}$ zu $(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$

ABE ist. Wird dieser also $\frac{1}{2}W$ genannt, so daß W das Segment BADEB bezeichnet, so ist

$$\partial W = ac\partial\psi + \frac{ab^2\,\Psi^2\,\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}.$$

Das Integral des zweyten Theils dieser Formel läßt sich durch keinen endlichen Ausdruck angeben. In dem Falle, wo a und c wenig von einander verschieden sind, läßt es sich durch Näherung folgendergestalt erhalten.

Da

$$\Psi^2 = \frac{a^2\sin\psi^2 + a^2\cos\psi^2 - a^2\cos\psi^2 + c^2\cos\psi^2}{a^2}$$

$$= 1 + \frac{c^2-a^2}{a^2}\cos\psi^2$$

$$= 1 + i\cos\psi^2$$

wenn $\frac{c^2-a^2}{a^2} = i$ gemacht wird, so wird

$$\frac{ab^2\,\Psi^2\,\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2\Psi^2)}} =$$

$$\frac{a(b^2+b^2 i\cos\psi^2)\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2-b^2 i\cos\psi^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2-b^2 i\cos\psi^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2-b^2 i\cos\psi^2)}}.$$

Nimmt man nun

$$\frac{ab^2}{2\sqrt{(c^2-b^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2)}} = f(b^2)$$

so wird

$$\frac{a(b^2+b^2 i\cos\psi^2)\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2-b^2 i\cos\psi^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2-b^2 i\cos\psi^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2-b^2 i\cos\psi^2)}}$$

$$= \partial\psi . f(b^2 + b^2 i\cos\psi^2)$$

also nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$= \frac{ab^2\,\partial\psi}{2\sqrt{(c^2-b^2)}}\log\frac{c+\sqrt{(c^2-b^2)}}{c-\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

$$+ f'(b^2) b^2 i \cos\psi^2 \partial\psi + \tfrac{1}{2} f''(b^2) b^4 i^2 \cos\psi^4 \partial\psi$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(b^2) . b^6 i^3 \cos\psi^6 \partial\psi + \text{etc.}$$

wo $f'(b^2)$, $f''(b^2)$, $f'''(b^2)$ u. s. w. die successiven Differentialquotienten $\frac{\partial . f(b^2)}{\partial . b^2}$, $\frac{\partial^2 . f(b^2)}{(\partial . b^2)^2}$, $\frac{\partial^3 f(b^2)}{(\partial . b^2)^3}$ u. s. w., b^2 als Functionalgröße genommen, anzeigen. Hiernach wird

$$W = ab\psi + \frac{a^2 b \psi}{2\sqrt{(c^2 - b^2)}} \log \frac{c + \sqrt{(c^2 - b^2)}}{c - \sqrt{(c^2 - b^2)}}$$
$$+ f'(b^2) . b^2 i \int \partial\psi \cos\psi^2 + \frac{1}{2} f''(b^2) . b^4 i^2 \int \partial\psi \cos\psi^4$$
$$+ \frac{1}{2 . 3} f'''(b^2) . b^6 i^3 \int \partial\psi \cos\psi^6 + \ldots .$$

wo die Integrale $\int \partial\psi \cos\psi^2$, $\int \partial\psi \cos\psi^4$ u. s. w. so zu nehmen sind, daß sie für $\psi = 0$ verschwinden.

34. Um die Oberfläche des Sphäroids zu haben, muß man $\psi = 2\pi$ setzen. Nun ist (Integralformel, 114. 62)

$$\int \partial\psi \cos\psi^{2\lambda} = \frac{1 . 3 . 5 \ldots . 2\lambda - 1}{2 . 4 . 6 \ldots . 2\lambda} . 2\pi$$

wenn das Integral von $\psi = 0$, bis $\psi = 2\pi$ genommen wird, daher ist die Oberfläche des Sphäroids =

$$2\pi \left\{ ab + \frac{a^2 b}{2\sqrt{(c^2 - b^2)}} \log \frac{c + \sqrt{(c^2 - b^2)}}{c - \sqrt{(c^2 - b^2)}} \right.$$
$$\left. + \Sigma . \frac{1}{2\lambda} . \frac{1 . 3 . 5 \ldots . 2\lambda - 1}{1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots . \lambda^2} . f^{(\lambda)}(b^2) . b^{2\lambda} i^\lambda \right\}$$

wo $\Sigma \frac{1}{2\lambda} . \frac{1 . 3 . 5 \ldots 2\lambda - 1}{1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots \lambda^2} f^{(\lambda)}(b^2) . b^{2\lambda} i^\lambda$ den ganzen Complexus der Glieder anzeigt, welche entstehen, wenn in dem unter dem Zeichen Σ stehenden Ausdrucke λ nach und nach = 1, 2, 3, 4... u. s. w. gesetzt wird.

$$Z = 2\pi a^2 \Big[\left(1 - n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{8}n^4 - \text{etc.}\right)\sin\omega$$

$$- \left(\frac{1}{3}n - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{6}n^4 + \text{etc.}\right)\sin 3\omega$$

$$+ \left(\frac{3}{20}n^2 - \frac{1}{10}n^3 + \frac{1}{10}n^4 - \text{etc.}\right)\sin 5\omega$$

$$- \left(\frac{1}{14}n^3 - \frac{5}{112}n^4 + \text{etc}\right)\sin 7\omega$$

$$+ \left(\frac{5}{144}n^4 - \text{etc.}\right)\sin 9\omega$$

$$- \text{etc.} \Big].$$

37. Die Coefficienten zu den Sinus der Vielfachen von ω lassen sich auch durch endliche Ausdrücke folgendergestalt darstellen.

Es ist, wenn zur Abkürzung $a^2 - b^2 = e^2$ gesetzt wird

$$\partial Z = \frac{2\pi a^4 b^2 \cdot \partial . \sin\omega}{(a^2 - e^2 \sin\omega^2)^2}.$$

Man setze noch $\sin\omega = u$, so ist

$$\partial Z = 2\pi a^4 b^2 . \frac{\partial u}{(a^2 - e^2 u^2)^2}.$$

Es ist (Integralformel, 21.)

$$\int \frac{\partial u}{(a^2 - e^2 u^2)^2} = \frac{1}{2a^2} . \frac{u}{a^2 - e^2 u^2} + \frac{1}{2a^2} . \int \frac{\partial u}{a^2 - e^2}.$$

Dadurch wird statt u und e^2 ihre Werthe wiederhergestellt

$$\partial Z = \pi a^2 b^2 \times$$

$$\left\{ \frac{\sin\omega}{a^2 - (a^2 - b^2)\sin\omega^2} + \int \frac{\cos\omega \, \partial\omega}{a^2 - (a^2 - b^2)\sin\omega^2} \right\}$$

$$=$$

$$= 2\pi a^2 b^2 \left\{ \frac{\sin\omega}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\omega} + \int \frac{\cos\omega\,\partial\omega}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\omega} \right\}$$

$$= \frac{2\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ \frac{\sin\omega}{1 + n\cos 2\omega} + \int \frac{\cos\omega\,\partial\omega}{1 + n\cos 2\omega} \right\}.$$

Es sey $\frac{1}{1 + n\cos 2\omega} = A - B\cos 2\omega + C\cos 4\omega - D\cos 6\omega + \text{etc.}$

so wird

$$\partial Z = \frac{2\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ A\sin\omega - B\cos 2\omega\sin\omega + C\cos 4\omega\sin\omega - D\cos 6\omega\sin\omega + \text{etc.} + \int \partial\omega\,(A\cos\omega - B\cos 2\omega\cos\omega + C\cos 4\omega\cos\omega - D\cos 6\omega\cos\omega + \text{etc.}) \right\}$$

und

$$Z = \frac{2\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ 2A\sin\omega - \frac{1}{3}(C + 2B)\sin 3\omega + \frac{1}{5}(2D + 3C)\sin 5\omega - \frac{1}{7}(3E + 4D)\sin 7\omega + \text{etc.} \right\}$$

wo das Gesetz des Fortgangs in dem eingeklammerten Factor klar ist.

In dem Artikel Integralformel, 126. ist bemerkt, daß

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}},\quad B = \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right).$$

Man setze also $\frac{1 - \sqrt{(1 - nn)}}{n}$ d. i. $\frac{(a-b)^2}{a^2 - b^2}$ oder $\frac{a-b}{a+b} = m$, so wird $n = \frac{2m}{1+m^2}$, $\sqrt{(1 - nn)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$, $A = \frac{1 + m^2}{1 - m^2}$, und $B = 2mA$.

Ferner ist nach den dort gefundenen Relationen

$C = 2\left(\frac{B}{n} - A\right) = 2\left((1 + m^2)A - A\right) = 2m^2 A = mB$, $D = \frac{2C}{n} - B = (1 + m^2)B - B = m^2 B = mC$, $E = \frac{2D}{n} - C = (1 + m^2)C - C = m^2 C = mD$ u. s. w. Die Coefficienten B, C, D, E u. s. w. bilden also eine geometrische Reihe mit dem Exponenten m, und es ist der erste unter ihnen das 2m fache des ersten Gliedes A in der für $\frac{1}{1 + n \cos 2\omega}$ entwickelten Reihe.

Da nun auch $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n = \frac{2m}{1 + m^2}$, so ist $\frac{2b^2}{a^2 + b^2} = 1 - n = \frac{(1 - m)^2}{1 + m^2}$, und es wird nach gehöriger Reduction

$$Z = 2\pi a^2 \left(\frac{1 - m}{1 + m}\right)\Big[\sin\omega - \frac{1}{3}m(2 + m)\sin 3\omega + \frac{1}{5}m^2(3 + 2m)\sin 5\omega - \frac{1}{7}m^3(4 + 3m)\sin 7\omega - \text{etc.}\Big]$$

wo statt $2\pi a^2 \left(\frac{1-m}{1+m}\right)$ auch gesetzt werden kann $2\pi ab$ und das allgemeine Glied der eingeschlossenen Reihe $\frac{1}{2\lambda+1} \cdot (-m)^\lambda \cdot (\lambda+1+\lambda m) \sin(2\lambda+1)\omega$ ist, o für die Stellenzahl des ersten Gliedes genommen.

Henry hat diesen Ausdruck für eine sphäroidische Zone gegeben in dem Mémoire sur la projection des cartes géographiques adoptée au dépôt général de la guerre. Paris 1810.

38. Exempel. Für $\frac{b}{a} = \frac{1-m}{1+m} = \frac{309}{310}$ ist $m = \frac{1}{619}$, $2+m = \frac{1239}{619}$, $3+m = \frac{1859}{619}$ u. s. w. und

$$Z = 2\pi a^2 [0,9967741935 \sin\omega - 0,0010743988 \sin 3\omega + 0,0000015625 \sin 5\omega - 0,0000000240 \sin 7\omega + \text{etc.}]$$

Für $\omega = 90°$ erhält man hieraus die halbe Oberfläche des Sphäroids. Die ganze ist $= 4\pi a^2 \times 0,9978501573$, übereinstimmig mit dem, was man nach (32) dafür findet. Diese Oberfläche ist so groß, als die einer Kugel vom Halbmesser $a \times 0,9989245$.

39. Ein andrer Parallelkreis habe die Breite oder den Abstand ω' vom Äquator, dem Kreise vom Halbmesser CB (Fig. 33*), so ist die Zone zwischen diesem Kreise und dem in dem Abstande ω, der Unterschied der Werthe von Z für ω' und ω. Da $\sin\omega' - \sin\omega = 2 \sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega) \cos\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$ ist, (Goniometrie, 28.), so braucht man in den Formeln für Z (36 und 37) nur zu setzen

denen und von demselben ihm mitgetheilten Sätzen bekannt, in einem Briefe an Huygens, welcher seinem Tractat von der Cycloide angehängt ist. Wallisii Opp. Tom. I. pag. 558 et 559.

Loxodromische Linie auf einem Sphäroid.

43. Es stelle Fig. 34. einen Sector auf der Oberfläche eines gedruckten Sphäroids vor; A sey der eine Pol; CB ein Bogen des Äquators, oder des von der großen Axe beschriebenen Kreises; AMB und AND zwey elliptische Quadranten; CMm eine auf der Oberfläche gezogene Curve, welche alle elliptische Meridiane, wie wir die durch A laufenden Ellipsen kurz nennen wollen, unter demselben Winkel schneidet. Es ist eine Gleichung für diese Curve zu finden, und zwar eine zwischen dem Winkel, welchen der Meridian AMB mit einem gegebenen AC macht und dem Winkel der durch einen Punct M gehenden Normale mit dem Äquator, das ist, der geographischen Breite des Punctes M.

44. Die halbe größere Axe der beschreibenden Ellipse sey $= a$; die halbe kleinere $= b$; der Winkel der Normale in M mit der Ebene des Äquators $= \omega$; der Winkel der beiden Meridiane oder der Quadranten AC, AB sey $= \varphi$, der Winkel, unter welchem die Curve jeden Meridian schneidet, oder CMB $= \alpha$; der elliptische Bogen BM $= s$. Man lege durch M eine mit dem Äquator parallele Ebene, welche die Fläche des Sectors ABD zwischen den beiden Quadranten AB, AD in MN schneidet. Dieser Bogen MN ist ein Kreisbogen, welchen der Punct M bey der Drehung der Ellipse beschreibt. Der Halbmesser dieses Bogens ist die auf die Drehungsaxe senkrechte zu M gehörige Ordinate, wie QM in Fig. 33*, daher DN $=$ BM ist. Die Curve schneide den Quadranten AD in m, so ist Nm die zu der Veränderung des Winkels ω gehörige Veränderung des Bogens

BM oder DN. Die Ordinate zu dem Puncte M. sey $= y$, so ist $MN = y\Delta\varphi$, und $y\partial\varphi = \text{tang}\,\alpha\,.\,\partial s$.

Nun ist y was x in (35) war, also

$$= \frac{a^2 \cos\omega}{\sqrt{(a^2 \cos\omega^2 + b^2 \sin\omega^2)}}$$

oder $y = \dfrac{a^2 \cos\omega}{\sqrt{(a^2 - (a^2 - b^2)\sin\omega^2)}}$,

oder, wenn $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ gesetzt wird,

$$y = \frac{a \cos\omega}{\sqrt{(1 - e^2 \sin\omega^2)}}.$$ Ferner ist

$$\partial s = \frac{a\,(1 - e^2)\,\partial \sin\omega}{\cos\omega\,(1 - e^2 \sin\omega^2)^{3:2}}$$ (Rectification, 20.).

Dadurch ist

$$\partial\varphi = \text{tang}\,\alpha\,\frac{(1 - e^2)\,\partial \sin\omega}{\cos\omega^2\,(1 - e^2 \sin\omega^2)},$$

Man setze zur Abkürzung $\sin\omega = z$, so ist

$$\partial\varphi = \text{tang}\,\alpha.\,\frac{(1 - e^2)\,\partial z}{(1 - z^2)(1 - e^2 z^2)}.$$

Diese gebrochne Function werde in zwey, mit den Nennern $1 - z^2$ und $1 - e^2 z^2$ zerlegt (Function, 20), so ist

$$\partial\varphi = \text{tang}\,\alpha\left(\frac{\partial z}{1 - z^2} - \frac{e^2\,\partial z}{1 - e^2 z^2}\right),$$

und daraus (Integralformel, 12)

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\alpha\left(\log\frac{1 + z}{1 - z} - e\log\frac{1 + ez}{1 - ez}\right) + C,$$

das ist

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\alpha\left(\log\frac{1 + \sin\omega}{1 - \sin\omega} - e\log\frac{1 + e\sin\omega}{1 - e\sin\omega}\right) + C.$$

Die Constante ist Null, wenn man die loxodromische Linie im Äquator bey C anfangen läßt.

45. Es ist $\frac{1 + \sin\omega}{1 - \sin\omega} = \text{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\omega\right)^2$,

und $\log \frac{1 + e\sin\omega}{1 - e\sin\omega} = 2\left(e\sin\omega + \frac{1}{3}e^3\sin\omega^3 + \frac{1}{5}e^5\sin\omega^5 + \text{etc.}\right)$ nach Logarithmus (57.), also

$$\varphi = \text{tang}\,\alpha\,\log.\text{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\omega\right)$$

$$-\text{tang}\,\alpha\left(e^2\sin\omega + \frac{1}{3}e^4\sin\omega^3 + \frac{1}{5}e^6\sin\omega + \text{etc.}\right).$$

46. Für die Kugel ist $e = 0$, und

$\varphi = \text{tang}\,\alpha.\log.\text{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\omega\right)$, wie in dem Artikel, krumme Linien von gedoppelter Krümmung, 17. gefunden ist. Der zweyte Theil von φ giebt daher die Abweichung dieses Winkels von dem an, der auf der Kugel gefunden werden würde.

47. Die Länge der loxodromischen Linie hängt von der Rectification der Ellipse ab. Das Differential jener ist $\frac{\partial s}{\cos\alpha}$.

48. Die loxodromische Linie auf einem Sphäroid haben untersucht: Murdoch, der dazu Tafeln berechnet hat; Walz in den Actis Erud. Maj. 1741; Maupertuis in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1744. Caluso in den Mém. de Turin. pour 1788. 89. Vol. IV.

49. Wie an einem durch Umdrehung entstandenen Sphäroid der Halbmesser der Krümmung

an jedem Puncte eines Schnittes gefunden wird, ist in dem Artikel, Krümmungskreis, 85. angegeben, das. 89. auch, wie der größte und kleinste Krümmungshalbmesser in einem Puncte bestimmt wird.

Die kürzeste Linie auf einem Sphäroid zu finden, wird in dem Artikel, Variationsrechnung, gezeigt.

Sphenische Zahl ist ein Product aus drey ungleichen Zahl, eine veralterte Benennung. Das griechische Wort σφην bedeutet einen Keil.

Spinnenlinie ist eine aus geraden und krummen Linien zusammengesetzte Linie, die einige Ähnlichkeit mit einem Spinnengewebe hat. Albrecht Dürer zeigt ihre Construction in seiner Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheid; auch Schwenter in seiner Geometrie. Sie ist ganz entbehrlich, und ist dazu keine echt geometrische Linie.

Spirale (Spiralis, Helix, Schneckenlinie) ist eine krumme Linie, welche in einer Ebene unendlich viele, sich immer vergrößernde Umläufe um einen festen Punct macht, es sey daß sie in diesem ihren Anfang nimmt, oder diesem sich in unendlich vielen, sich immer verengernden, Umläufen immer mehr nähert.

Spiralen können auch auf einer Kegelfläche oder der Fläche eines Konoids beschrieben werden, wo der Scheitelpunct der fixe Punct ist. Auch auf Kugelflächen und Sphäroiden lassen sich Spiralen ziehen, wo aber der Abstand von dem Pole des Körpers oder von dessen Mittelpuncte beschränkt ist.

Man beschreibe mit einem willkürlichen Halbmesser einen Kreis, und nehme auf diesem von einem Puncte aus Bogen, welche auch den ganzen Umfang unbestimmt oft enthalten mögen, als Abscissen für eine krumme Linie an. Auf die durch den andern, veränderlichen Endpunct aus dem Mittelpuncte gezogenen ge-

raden trage man die nach irgend einem Gesetze aus jenen bestimmten Ordinaten, so wird die Beschaffenheit der Spirale durch die Gleichung zwischen diesen Coordinaten dargestellt, auf dieselbe Art wie für geradlinige Abscissen und die darauf unter einem gewissen Winkel gesetzten Ordinaten. Solchergestalt lassen sich alle analytische Linien, welche aus Gleichungen zwischen geradlinigen Coordinaten verzeichnet werden, umbilden, wodurch bisweilen sonderbare Gestalten entstehen mögen. Allein für Spiralen ist die Einschränkung zu machen, daß zu jeder Abscisse nur eine einzige Ordinate gehöre, mit der nähern Bestimmung, daß für unendlich große Abscissen eine mögliche Ordinate, sey sie auch unendlich klein, Statt habe. Daher haben die Gleichungen für Spiralen die Form, $ax = by$, oder $a^2x = by^2$, und allgemeiner, $ax^m = by^n$, wo a und b gegebene Größen von den gehörigen Dimensionen bedeuten; ferner $aa = xy$; und die besonders merkwürdige, $e^x a = y$.

Man kann auch die Ordinaten von dem Kreisumfange aus, es sey von dem Mittelpuncte ab hinauswärts, oder nach demselben hinwärts nehmen. Doch ist das erstere Verfahren bey weitem das gewöhnlichste.

Anstatt der Kreisbogen werden in der folgenden Abhandlung die zugehörigen Winkel, das ist, die Quotienten des Bogens durch den Halbmesser, gebraucht werden, oder, wenn die Linien als Zahlen in Beziehung auf eine Einheit gedacht werden, der zur Abscissenlinie genommene Kreis hat zum Halbmesser die Einheit. — Übrigens verdient diese Gattung von krummen Linien, wegen ihrer Eigenschaften und der Anwendungen der Analysis, eine etwas ausführliche Behandlung.

Die archimedische Spirale.

1. Die einfachste Spirale wird auf folgende Art gezeichnet. Es ist APBQA (Fig. 35.) ein

Kreis mit dem Halbmesser CA beschrieben. Indem dieser um den unbewegten Mittelpunct C herumgeführt wird, bewege sich auf demselben ein Punct von C aus nach dem Umfange hin, so daß die beschriebenen Wege immer den von dem Halbmesser beschriebenen Winkeln proportional seyn, und daß derselbe in die Peripherie in A treffe, wenn der Halbmesser CA seinen ganzen Umlauf vollendet hat. Um also einen Punct dieser Spirale, M, auf dem Halbmesser CP anzugeben, suche man die vierte Proportionale zu dem Umfange, dem Bogen AP, und dem Halbmesser CP.

Nach dem ersten Umlaufe muß der Halbmesser immer mehrere machen, indem der die Spirale beschreibende Punct auf jenem, so wie bey dem ersten Umlaufe, fortrückt, daß die Wege den beschriebenen Winkeln proportional sind. So ist AND der zweyte Umlauf nach dem ersten CMA, und ein Punct N desselben wird gefunden, wenn man zu dem Kreisumfange, der Summe des Umfanges und des Bogens AP, und zu AC die vierte Proportionale CN sucht, welche auf dem verlängerten Halbmesser CP des Kreises APBA nach N hin getragen wird.

Conon, ein Zeitgenosse des Archimedes, der ihn sehr rühmt, hat diese Spirale erdacht, allein Archimedes hat ihre Eigenschaften erforscht. Seine Schrift über diese Curve gehört unter die scharfsinnigsten des Alterthums. Er quadrirte den Flächenraum zwischen zwey Radiis der Spirale. Er hat gezeigt, wie groß die Subtangente an derselben ist, das ist diejenige Länge, welche auf der, in dem Anfangspuncte der Spirale auf dem Radius Vector senkrecht gezogenen, von der berührenden abgeschnitten wird. Dieses Letztere besonders erregte die Bewunderung der Geometer vor der Erfindung der neuen Analysis. Bouillaud (Bullialdus), der selbst über die Spirallinien eine Schrift (Paris, 1658) herausgegeben hat, gesteht in der Vorrede, daß er mit aller Anstrengung den Beweis des

Archimedes von dem Verhältnisse der Subtangente zu dem Kreisumfange nicht völlig gefaßt habe, und unbefriedigt geblieben sey. In der That scheint dabey eine Schwierigkeit zu seyn, da Archimedes ein paarmahl etwas als möglich annimmt, wo er, wie es sonst gewöhnlich ist, hätte zeigen sollen, wie die gegebene Linie zwischen dem Kreise und einer geraden zu legen ist. Von Bouillaud sagt Montucla, daß seine Beweise, die einfacher seyn sollten als die von Archimedes gegebenen, sehr verworren und schwerer als diese sind. (Histoire des Mathématiques. T. I. p. 226.). Die Analysis der Neuern bestimmt an der Spirale alles sehr leicht.

Die Alten gebrauchten diese Spirale als ein geometrisches Mittel, einen Winkel oder Kreisbogen nach einem gegebenen Verhältnisse einzutheilen. Pappus in Collect. mathem. L. IV. prop. 35. Da die Spirale nicht durch eine zusammenhangende Bewegung beschrieben werden kann, sondern nur durch eine Folge einzelner Puncte angegeben wird, so ist diese Auflösung unvollkommen, nur eine praktische.

2. Es sey der Radius des angenommenen Kreises $AC = a$; der Radius der Spirale $CM = y$; der beschriebene Winkel $ACM = \varphi$, und vier Rechte $= 2\pi$, wo 2π und φ auch als der Kreisumfang und ein Kreisbogen für einen Halbmesser $= 1$ angesehen werden können. Es ist nun $a : y = 2\pi : \varphi$, und die Gleichung für die archimedische Spirale, $a\varphi = 2\pi y$. Der Winkel φ kann vier Rechte oder 2π unbestimmt oft enthalten.

3. Mit jedem Umlaufe nimmt der Radius Vector, wenn er wieder in dieselbe Lage gekommen ist, um die Länge a zu. Denn es seyn y und y' zwey Radii, von welchen y' einen Umlauf mehr gemacht hat, als y, so ist $a\varphi = 2\pi y$ und $a(2\pi + \varphi) = 2\pi y'$, also $2\pi a = 2\pi(y' - y)$, das ist, $a = y' - y$.

4. Die Gleichung für diese Spirale ist dieselbe wie für die gerade Linie, $ax = y$, (Liniegerade, 13.), wenn bey dieser die Abscissen von ihrem Durchschnitte mit der Abscissenlinie an genommen werden. In jener sind die Kreisbogen $a\varphi$ und der Quotient $\frac{1}{2\pi}$, was die Abscissen x und der Coefficient a in dieser. — So wie die Coordinaten, x, y, auch negativ genommen werden, für den Theil der geraden Linie, der auf der entgegengesetzten Seite der Abscissenlinie liegt, so muß auch bey der Spirale der Winkel φ negativ, d. i. in der Richtung von A nach Q hin, genommen werden, wodurch der Radius y negativ wird, oder eine der für positive y entgegengesetzte Lage erhält, und von C aus, in einer umgekehrten Lage, dieselbe Spirale entsteht. Diese Hälfte der vollständigen Spirale scheint man nicht beachtet zu haben. Keine krumme Linie hat einen bestimmten Punct, bey dem sie sich anfinge oder endigte.

5. Es wachse y um das Stück Δy, und der zugehörige Winkel φ um $\Delta\varphi$, so ist $y\Delta\varphi = \varphi\Delta y$. Aus den Gleichungen für die Spirale, $a\varphi = 2\pi y$, und $a(\varphi + \Delta\varphi) = 2\pi(y + \Delta y)$, folgt $a\Delta\varphi = 2\pi\Delta y$, und durch Division der Glieder dieser und der ersten, $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta y}{y}$, das ist $y\Delta\varphi = \varphi\Delta y$.

6. Auf dieselbe Art wird die Differentialgleichung für die Spirale erhalten, nämlich $y\partial\varphi = \varphi\partial y$. Diese kommt mit der Gleichung für die endlichen Differenzen der Coordinaten gänzlich überein. Es ist auch $a\partial\varphi = 2\pi\partial y$.

7. In M sey MT die berührende, welche die in dem Anfangspuncte der Spirale C auf den Radius CM senkrechte CT in T schneidet; es ist tang CMT $= \varphi$, und die Subtangente CT $= \varphi y$, dem mit

CM als Radius innerhalb des Winkels ACM beschriebenen Kreisbogen. — Denn es ist tang CMT

$= \frac{y\partial\varphi}{\partial y}$ (berührende Linie, 27.), das ist, aus (5),

tang CMT $= \varphi$. Die trigonometrischen Linien beziehen sich, als bloße Zahlen, auf die Einheit als Halbmesser, wie die Kreisbogen. Die Länge CT selbst ist $= \varphi y$, wo y ein linearischer Radius in der Spirale ist.

8. Auch ist $CT = \frac{2\pi yy}{a}$.

9. Nach dem ersten Umlaufe in A ist die Subtangente $= 1.\ 2\pi a$; nach dem zweyten in D $= 4.\ 2\pi a$; nach dem dritten $= 9.\ 2\pi a$; nach dem vierten $= 16.\ 2\pi a$, u. s. w.

10. Die Fläche eines spiralischen Sectors LCN, zwischen den Radiis z und y, (Fig. 35.),

ist $= \frac{1}{3} . \frac{\pi}{a} (y^3 - z^3)$.

Der Sector LCN sey $= Z$, und CL $= z$; CN $= y$. Es ist, (Quadratur, 11.), an einer Curve, welche durch Ordinaten oder Radios y aus einem Puncte, und die Winkel φ derselben mit einer gegebenen Ordinate, bestimmt wird, das Differential eines Sectors $= \frac{1}{2} yy\partial\varphi$. Da in der Spirale, wenn φ größer als vier Rechte wird, die innern Sectoren in den folgenden Umläufen wiederholt werden, so müssen wir die Winkel der beiden Radiorum kleiner als vier Rechte nehmen, oder ihn $\varphi - \omega$ setzen, wo ω der zu einem gegebenen, doch willkürlichen, Radius z gehörige Winkel in der Spirale ist, so daß $a\omega = 2\pi z$ ist, wie $a\varphi = 2\pi y$. Übrigens mögen φ und ω gegen vier Rechte jedes Verhältniß haben. — In der Differentialgleichung, $\partial Z = \frac{1}{2} yy\partial\varphi$, setze man nun

für $\partial\varphi$ dessen Werth, $\frac{2\pi}{a}\partial y$, so ist $\partial Z = \frac{\pi yy\partial y}{a}$.

Daraus ist $Z = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi y^3}{a} + C. = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{a}(y^3 - z^3)$, welches mit $y = z$ anfängt, wie angenommen wird.

11. Da $y^3 - z^3 = (y - z)(y^2 + yz + z^2)$ ist, so ist

$$Z = \tfrac{1}{6}(\varphi - \omega)(y^2 + yz + z^2)$$
$$= \tfrac{1}{6}(\varphi - \omega)(3yz + (y - z)^2).$$

12. Der Kreissector mit dem Halbmesser y innerhalb des Winkels $\varphi - \omega$ beschrieben, ist $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega)y^2$. Der spiralische Sector verhält sich zu diesem Kreissector wie $yz + \frac{1}{3}(y - z)^2 : y^2$. Archimedes im 26. Satze.

13. Man setze $\omega = 0$, so wie $z = 0$, und nehme φ kleiner als vier Rechte, so ist in dem ersten Umlaufe die spiralische Fläche $= \frac{1}{6}\varphi y^2 =$ dem dritten Theile des Kreissectors mit dem Radius y für den Winkel φ.

14. Die Fläche des ersten Umlaufes ist $= \frac{1}{6} . 2\pi aa = \frac{1}{3}\pi aa$, das ist dem dritten Theile des mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreises. Archimedes im 24. Satze.

15. Durch die nach dem ersten Umlaufe des Radius folgenden Umläufe entstehen ringförmige Flächen. Ein Sector eines solchen Ringes zwischen zwey nächsten Umläufen, wie KLMN in dem ersten, ist $= \pi(y - z)(y + z - a)$, wo y und z die aus dem Mittelpuncte durch die Endpuncte des Sectors gezogenen Radii, CN, CL, sind.

Den es ist der Sector LCN $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{a}(y^3 - z^3)$ (10). Eben so ist der Sector KLM in dem nächst vorher-

gehenden Umlaufe $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{a} \left((y - a)^3 - (z - a^3) \right)$ da hier die Radii von jenen um a unterschieden sind (2). Der Unterschied beider Sectoren ist der Sector des Ringes $= \pi (y^2 - z^2 - ay + az) = \pi (y - z)(y + z - a)$.

16. Die Ringfläche gehöre zu dem nten Umlaufe, und es sey $z = (n - 1) a$, oder der Sector fange mit dem Umlaufe an, so ist der Sector des Ringes $= \pi (y (y - a) - (n - 1)(n - 2) aa)$.

17. Die Fläche des ganzen Ringes, zwischen dem $(n - 1)$ten und nten Umlaufe, und den beiden geraden a, zwischen den Endpuncten des $(n - 1)$ten und nten Umlaufes, ist $= 2 (n - 1) \pi aa$. Für den ersten Ring ist $n = 2$. Archimedes, 27. Satz.

18. Die ganze spiralische Fläche, welche die bey dem ersten Umlaufe beschriebene ($\frac{1}{3} \pi aa$), und $(n - 1)$ Ringe enthält, ist $= \frac{1}{3} \pi aa + 2 \pi aa + 4 \pi aa + \ldots + 2(n - 1) \pi aa = \frac{1}{3} \pi aa + (n - 1) n \pi aa$.

19. In der Formel (10) für einen jeden spiralischen Sector LCN $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{a} (y^3 - z^3)$, setze man $y = na$, und $z = (n - 1) a$, so erhält man die Fläche zwischen dem nten Umlaufe und der geraden a zwischen den Endpuncten dieses Umlaufes $= (nn - n + \frac{1}{3}) \pi aa$, wie in (18). Diese begreift nämlich die Fläche des ersten Umlaufs nebst $(n - 1)$ Ringen. Archimedes, 25. Satz.

20. Es sey LCN (Fig. 35.) ein Sector der Spirale in irgend einem Umlaufe, mit einem Winkel unter vier Rechten am Mittelpuncte. Die Radii CN, CL seyn y, z; die zugehörigen Winkel φ, ω. Die Fläche des Sectors ist $= \frac{1}{6} (\varphi - \omega)(yy + yz + zz)$, vermöge (11).

Ein

Ein Kreissector mit dem Radius y innerhalb des Winkels $\varphi - \omega$ beschrieben ist $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega) y^2$; mit dem Radius z ist der Kreissector $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega) z^2$. Die Unterschiede dieser Kreissectoren von dem spiralischen verhalten sich wie $2y + z : y + 2z$, weil ihre Werthe den gemeinschaftlichen Factor $y - z$ haben, oder wie $z + \frac{2}{3}(y - z) : z + \frac{1}{3}(y - z)$. Auf die letzte Art giebt Archimedes das Verhältniß an, im 28. Satze.

21. **Die Rectification** der archimedischen Spirale wird durch dieselbe Formel bewerkstelligt, wie für die Parabel. Die Gleichung für jene ist $a\varphi = 2\pi y$; ihre Differentialgleichung ist $a\partial\varphi = 2\pi\partial y$. Der Bogen der Spirale, von dem Mittelpuncte an, sey $= s$, so ist $\partial s = \sqrt{(y^2 \partial\varphi^2 + \partial y^2)}$, (Rectification, 5[b].), das ist hier $\partial s = \partial y \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 y^2}{a^2} + 1\right)}$, oder auch $\partial s = \frac{a\partial\varphi}{2\pi} \sqrt{(\varphi^2 + 1)}$. Der Parameter einer Parabel sey $= p$, ihre Gleichung, $px = yy$, der zu den Coordinaten gehörige Bogen vom Scheitel an $= s$, so ist $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial y \sqrt{\left(\frac{4yy}{pp} + 1\right)}$.

Man nehme $p = \frac{a}{\pi}$, d. i. der vierten Proportionale zu dem halben Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser und zu a, so ist der parabolische Bogen dem spiralischen gleich, wenn die Ordinaten y an beiden Linien gleich sind.

Eine zweyte Differentialformel für die Parabel ist, $\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{p}{4x}\right)}$, für die Spirale, $\partial s = \frac{a\varphi\,\partial\varphi}{2\pi} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varphi^2}\right)}$. Setzt man $\varphi^2 = \frac{4x}{p}$, so ist

$\varphi\partial\varphi = \frac{2\partial x}{p}$, und $\frac{a\varphi\partial\varphi}{2\pi} = \frac{a}{\pi}\cdot\frac{\partial z}{p}$. Nimmt man $p = \frac{a}{\pi}$, wie vorher, so wird der spiralische Bogen dem parabolischen gleich. — Die Integrale beider Formeln sind in dem Artikel, Rectification, 31. 32. angegeben.

Fermats Spirale.

22. Anstatt die Radios der Spirale den beschriebenen Winkeln proportional zu nehmen, kann man sie auch wie Potenzen oder Wurzeln der den Winkeln gleichmäßigen Zahlen sich verhalten lassen. Fermat hat eine solche betrachtet, worin die Winkel sich wie die Quadrate der Radiorum verhalten. Ihre Gleichung ist, $a^2\varphi = 2\pi y^2$. Die Differentialgleichung ist, $a^2\partial\varphi = 4\pi y\partial y$.

23. Die Quadrate der Radiorum nehmen gleichförmig zu, wenn die Winkel gleichförmig wachsen, die Radii selbst immer weniger. Z. B. wenn die Werthe von y^2 sind 10; 20; 30; 40; 50, u. s. f. so sind die von y folgende: 3, 16..; 4, 27..; 5, 477..; 6, 32..; 7, 07.. Die spiralischen Ringe verengern sich immer mehr. Mit jedem Umlaufe, in jeder Lage, nimmt das Quadrat des Radius um aa zu.

24. Die innerste von dem Mittelpuncte aus, in dem ersten Umlaufe, beschriebene muschelförmige Fläche ist $= \frac{1}{2}\pi aa$, halb so groß als die Kreisfläche mit dem Halbmesser a.

Denn es sey ein unbestimmter Sector $= Z$, so ist $\partial Z = \frac{1}{2} yy\partial\varphi = \frac{aa}{4\pi}\varphi\partial\varphi$, und $Z = \frac{aa}{8\pi}\varphi^2 = \frac{1}{4}\varphi y^2$, wenn die Area im Mittelpuncte anfängt. Für den ersten Umlauf ist $\varphi = 2\pi$, und die Area $= \frac{1}{2}\pi aa$.

25. Der Sector einer ringförmigen Fläche zwischen den Bogen zweyer nächsten Umläufe, innerhalb des Centriwinkels $\varphi - \omega$, ist $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega) aa$, so groß als ein Kreissector mit dem Radius a für denselben Winkel $\varphi - \omega$.

Ein solcher Sector ist der Unterschied zweyer Sectoren der Spirale, Z, Z′, deren begränzende Radii zu den Winkeln φ und ω in dem größern Sector, und zu den Winkeln $\varphi - 2\pi$ und $\omega - 2\pi$ in dem kleinern oder dem innern gehören, wie KLNM in Fig. 35. von den Sectoren LCN, KCM. Es ist $\partial Z = \frac{aa}{4\pi} \varphi \partial \varphi$ (wie in 24.), daraus $Z = \frac{aa}{8\pi}(\varphi^2 - \omega^2)$, da der Sector für den Winkel ω anfängt. Eben so ist

$$Z' = \frac{aa}{8\pi}(\varphi^2 - 2\pi)^2 - \frac{aa}{8\pi}(\omega - 2\pi)^2 =$$

$\frac{aa}{8\pi}(\varphi^2 - \omega^2 - 4\pi\varphi + 4\pi\omega)$. Folglich $Z - Z' = \frac{1}{2} aa (\varphi - \omega)$.

Oder: Es ist $\partial Z = \frac{aa}{4\pi} \varphi \partial \varphi$, und $\partial Z' = \frac{aa}{4\pi}(\varphi - 2\pi) \partial \varphi$. Der Unterschied beider Differentiale, nämlich $\frac{aa}{4\pi} . 2\pi \partial \varphi$, ist das Differential des Sectors der ringförmigen Fläche, welcher also ist $\frac{1}{2} \varphi aa$ — Const. $= \frac{1}{2}(\varphi - \omega) aa$, da der Sector mit dem Winkel ω anfängt.

Auch ist der Sector eines Ringes $= \pi(yy - zz)$, wenn y und z die Radii der Spirale zu den Winkeln φ und ω sind.

Zu gleichen Centriwinkeln gehören gleich große Sectoren der Ringe, in allen Ringen so groß als ein Kreissector zu demselben Winkel mit dem Radius a. Man erinnere sich, daß φ und ω Kreisbogen bedeuten,

deren Halbmesser die Einheit ist, daher $a\varphi$ und $a\omega$ Kreisbogen mit dem Halbmesser a.

26. Die Fläche eines jeden ganzen Ringes dieser Spirale ist $= \pi aa$. Denn für einen ganzen Ring ist $\varphi - \omega = 2\pi$. Eine solche Ringfläche ist so groß als die Fläche eines mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreises.

27. Die Flächenräume dieser Spirale zwischen den nächsten Umläufen, von dem Radius a an, nehmen gleichförmig zu, wenn die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte gleichförmig zunehmen. Dieses wird durch die (23) bemerkte Verengerung der Ringe begreiflich.

Vergleichung der archimedischen Spirale mit der Parabel.

28. Zwey gerade Linien Aa, Bb (Fig. 36.) sind der Lage nach gegeben, ihr Durchschnitt ist C. Parallel mit Bb werde eine gerade Mm von A aus bewegt, da zugleich eine andere gerade An von AC aus um den Punct A gedreht wird. Jene sey in Mm, wenn diese in An ist. Das Verhältniß der von jener auf AC und der von dieser auf CB beschriebenen Wege, AL : CN, sey ein gegebenes, AC : CD. Der Ort des Durchschnittspunctes beider, P, ist eine Parabel.

Denn es ist, zufolge der Annahme, AL : CN = AC : CD, oder AL : AC = CN : CD, und wegen der sich parallelen, ML, BC, ist AL : AC = LP : CN; also durch Zusammensetzung der Verhältnisse, $AL^2 : AC^2 = LP : CD$. Die Längen LP verhalten sich also wie die Quadrate der zugehörigen AL. Dieses ist eine Eigenschaft der Parabel, an welcher Bb die Axe oder derselben parallel ist, und AC die in A berührende (Parabel, 25.). Der Punct D gehört zu der Parabel, da LP der CD gleich ist, wenn AL der AC gleich genommen wird.

Die Längen (oder Abscissen) AL sind auch negativ (in einer entgegengesetzten Richtung) zu nehmen, wobey die Längen (oder Ordinaten) LP positiv bleiben, oder ihre Richtung (herabwärts) behalten.

Diese Erzeugung der Parabel ist der Entstehungsart der Archimedischen Spirale ähnlich. Anstatt des Kreises ist hier eine gerade Linie Bb, und statt des Punctes, der dort auf der sich drehenden geraden fortrückt, hier eine gerade Linie, die sich einer gegebenen parallel bewegt. Das Verhältniß der gleichzeitigen Bewegungen ist beiderseits ein gegebenes. An der Parabel ist die Drehung ungleichförmig, für die Spirale gleichförmig.

Sollte das Verhältniß AP : CN ein gegebenes seyn, so wäre der Ort des Punctes P eine Linie vom vierten Grade.

29. Ein parabolisches Segment APA (Fig. 36.) verhält sich wie der Cubus der zu P gehörigen Abscisse AL, auf der in A berührenden AC.

Es sey BD die Axe und AB darauf senkrecht. Die in A berührende AC schneidet auf der Bb ein Stück BC = 2 BD ab. Man setze BD = a; AB = b; AC = c; AL = t; LP = u. Die Natur der Parabel giebt $a : u = c^2 : t^2$, oder die Gleichung $at^2 = c^2u$. Der parabolische Flächenraum ALP sey Z, so ist $\partial Z = u\partial t . \sin C$, da hier die Coordinaten den Winkel C mit einander machen. (Quadratur. 10.). In dieser Formel setze man für u seinen Werth durch t, so wird $\partial Z = \frac{a \sin C}{c^2} t^2 \partial t$, und daraus $Z = \frac{a \sin C}{3c^2} t^3$.

Das geradlinige Dreyeck ALP ist $= \frac{1}{2} tu . \sin C$, da die Höhe desselben = LP. sin C ist, wenn AL zur Grundlinie genommen wird, d. i. es ist ΔALP =

$\frac{a \sin C}{2 c^2} t^3$. Daher ist das parabolische Segment APA $=$ $\frac{a \sin C}{6 c^2} t^3$.

30. Die Ordinate LP verlängert treffe die AB in M, so ist AM $=$ t sin C; auch ist AB $=$ b $=$ c sin C. Multiplicirt man in dem Werthe des Segments Zähler und Nenner durch $(\sin C)^2$, so erhält man durch diese Substitutionen, AM $=$ z gesetzt, das Segment APA $= \frac{a}{6 b^2} z^3$.

31. Eine andere Chorde sey AS. Die aus S auf die Chorde ABE senkrechte SR schneide auf derselben das Stück AR $=$ y ab, so ist das parabolische Segment ADSA $= \frac{a}{6 b^2} y^3$.

32. Es ist der parabolische Sector PAS $= \frac{a}{6 b^2}(y^3 - z^3)$, nämlich als der Unterschied der beiden Segmente. — Man bemerke, daß $\frac{b^2}{a}$ der Parameter der Parabel ist.

33. Diese Form eines Sectors an der Parabel ist mit der für einen spiralischen (10) übereinstimmig. Der Parameter der Parabel ist was $\frac{a}{2\pi}$ an der Spirale ist. Die Abscissen AM, AR zu den Endpuncten des parabolischen Sectors treten an die Stelle der begränzenden Radiorum in der Spirale.

34. Durch den Scheitelpunct D der Parabel und einen Punct S ziehe man die Chorde DS, und durch S die senkrechte SQ auf die Axe, so ist das Seg-

ment über der Chorde $= \frac{a}{6b^2} SQ^3$. Der Parameter der Parabel sey $p = \frac{b^2}{a}$, so ist $p \times DQ = QS^2$, also das Segment $= \frac{1}{6} DQ \times QS = \frac{1}{3} \Delta DQS$.

35. In dem ersten Umlaufe der Spirale, von dem Anfangspuncte bis zu dem Radius y für den Winkel φ ist die Area $= \frac{1}{6} \varphi yy$. Dieses stimmt mit dem Ausdrucke für das parabolische Segment überein, wenn statt des Bogens φy die Abscisse DQ, und statt des Radius y die Ordinate QS genommen wird. Das Dreyeck DQS kommt statt des Kreissectors.

Dieses und die in (21) bemerkte Übereinstimmung in den Ausdrücken für die Länge der Bogen der Archimedischen Spirale und der Parabel werden die wichtigsten Stücke bey ihrer analytischen Vergleichung ausmachen.

Gregorius von St. Vincent hat die Analogie zwischen beiden Linien umständlich ausgeführt in einer besondern Abhandlung: Spiralis et Parabolae symbolizatio, in dem Opere geometrico, p. 664 — 702. Die Verworrenheit des Vortrags und der Figuren ermüdet bald. Cavaleri gebraucht in seiner Geometria indivisibilium L. VI. die Vergleichung der Parabel mit der Spirale zu den Quadraturen an der letztern. Es wird aber auch dazu nicht wenig Geduld gehören. Gregorius scheint zuerst auf diese Vergleichung gekommen zu seyn. In der Vorrede zu jener Abhandlung sagt er, daß er sie im Jahre 1625 dem P. Grienberger mitgetheilt habe, um ihm dadurch zu zeigen, wie Archimedes auf die so schwer zu entdeckende Gleichheit der zu dem Endpuncte des ersten Umlaufes gehörigen Subtangente und des Kreisumfanges gekommen seyn möge. Sein Ordensgenosse fand aber die Entdeckung so schön, daß er behauptete,

Archimedes würde sie nicht zurückgehalten haben, wenn er darauf gerathen wäre. Gregorius selbst legt einen großen Werth darauf.

Brendel, ehedem Professor der Medicin in Göttingen, hat 1741 zu seinen mathematischen Vorlesungen ein Programm geschrieben: de analogia lineae spiralis et parabolae, welches auch wegen der darin erwiesenen Eigenschaften der Parabel lehrreich ist. Einiger Abkürzungen oder Verfeinerungen möchten die Beweise inzwischen noch bedürfen. Das dritte Theorem ist für die Parabel unrichtig, da am Ende der mühsamen Vergleichungen eine sehr übereilte Folgerung gemacht ist.

Die Übereinstimmung der spiralischen Bogen mit den parabolischen haben Roberval und Hobbes gefunden. Beide haben sich die Entdeckung streitig gemacht, wie Wallis erzählt, Opp. T. I. p. 560. Er giebt einen Beweis des Satzes (21), der darauf beruht, daß die Chorden an der Spirale denen an der Parabel unendlich nahe kommen.

logarithmische Spirale.

36. Die Radii einer Curve seyn geometrisch proportional, wenn die zugehörigen Winkel, von einen gegebenen Radius an genommen, arithmetisch proportional sind, so heißt die Curve eine logarithmische Spirale. Sie heißt bisweilen Loxodromica plana, s. unten (71).

Es sey nämlich an dieser Spirale (Fig. 37.) C der Mittelpunct, aus welchem die zunehmenden Radii, CA, CP, CQ, CR, CS, u. s. gezogen sind, unter den sich gleichen Winkeln, ACP, PCQ, QCR, RCS; u. f. so sind AC : CP : CQ : CR : CS u. f. in geometrischer Progression, so weit man die Reihe der gleichen Winkel, auch nach vollendeten einem oder mehrern Umläufen des Radius um C, fortsetzt. — Die

Reihe der Winkel und der Radiorum kann auch rückwärts genommen werden, wobey die Curve unendlich viele Umläufe um C macht, da die Glieder einer abnehmenden geometrischen Reihe nicht Null werden können.

37. Es sey die Anfangsordinate CA = a, der Exponent der geometrischen Progression = e, also die Reihe,

$$a : ea : e^2a : e^3a : e^4a \ldots e^xa \ldots$$

Die arithmetische Reihe der zugehörigen Winkel sey

$$0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ 4\delta \ldots x\delta \ldots$$

Der Radius CM, welcher mit dem Anfangsradius CA den Winkel $x\delta = \varphi$ macht, worin auch mehrere Umläufe enthalten seyn mögen, werde durch y bezeichnet, so ist

$e^xa = y$, oder $e^x = \frac{y}{a}$. Nun ist $x \log e = \log \frac{y}{a}$,

(Logarithmus, 11.), das ist, $\frac{\varphi}{\delta} \log e = \log \frac{y}{a}$.

Durch die Einschaltung in den beiden zu einander geordneten Reihen kann φ zu δ jedes Verhältniß bekommen. — Die Logarithmen können aus jedem System genommen werden, da die Logarithmen derselben Zahl in verschiedenen Systemen sich wie die Moduli der Systeme verhalten. (Logarithmus, 27).

38. Der Radius CB liege mit CA in gerader Linie, und sey = b, so ist $\frac{\pi}{\delta} \log e = \log \frac{b}{a}$. Aus dieser Gleichung und der vorhergehenden folgt die bequemere Gleichung für die logarithmische Spirale,

$$\frac{\varphi}{\pi} = \frac{\log (y : a)}{\log (b : a)}.$$

Zur Abkürzung sey $\frac{\pi}{\log (b : a)} = m$, so ist $\varphi = m \log (y : a)$. — Man nehme in der Folge zu dem Werthe von m den natürlichen Logarithmen von

(b : a) so wie den von (y : a), und jedem andern Verhältnisse.

Diese Form der Gleichung bringt mit sich, daß die Ordinaten y so wie die positiven Winkel φ zunehmen, da ein positiver Logarithme zu einer Zahl gehört, die größer als die Einheit ist. Nehmen die Ordinaten ab, wenn die positiven Winkel zunehmen, so ist m negativ, und $\varphi = - m \log (y:a) = m \log (a:y)$.

39. Eine logarithmische Spirale wird durch den Werth des Factors m, das ist, das Quotienten $\frac{b}{a}$, bestimmt.

40. Zu dem Winkel $\varphi + \beta$, wo β ein beständiger Winkel ist, gehöre der Radius z, so ist $\varphi + \beta = m \log (z : a)$. Da $\varphi = m \log (y:a)$ ist, so ist $\beta = m \log (z:y)$. Es ist also das Verhältniß zweyer Radiorum, die irgend einen gegebenen Winkel mit einander machen, an der logarithmischen Spirale ein bestimmtes. — Solche Radii stehen nämlich, in Beziehung auf die arithmetische Reihe der Winkel, gleich weit von einander ab, und haben daher gleiches geometrisches Verhältniß.

Daher sind die Radii, welche in derselben Richtung liegen, nach ihrer Folge von C an, in geometrischer Progression. Je zwey nächste machen einen Winkel von vier Rechten. Ihr Verhältniß ist das aa:bb, nämlich doppelt so groß als das der Linien CA:CB, die einen Winkel von zwey Rechten machen.

Oder, man nehme $\beta = 2\pi$, so ist $2\pi = m \log (z:y)$, das ist $2 \log (b:a) = \log (z:y)$, oder $\log (bb:aa) = \log (z:y)$, folglich $y:z = aa:bb$. — Wird z an den nächsten innern Umlauf genommen, so ist $y:z = bb:aa$.

41. Aus dem Werthe von φ entsteht die Differentialgleichung, $\partial\varphi = \frac{m\partial y}{y}$, (Differentialformeln, 14).

42. Der Winkel CMT eines Radius CM ($= y$) mit der berührenden MT ist an der ganzen Curve derselbe, und die Tangente dieses Winkels $= m$. Denn da überhaupt die Tangente des Winkels einer berührenden mit der aus einem Mittelpuncte oder Pole einer Curve gezogenen geraden ist $\frac{y\partial\varphi}{\partial y}$, (berührende Linie, 27.), so ist diese hier $= m = \frac{\pi}{\log. nat. (b:a)}$. — Dieser Winkel werde immer durch α bezeichnet, so daß $m = \tang \alpha$ sey.

43. Die Spirale, an welcher der Winkel der berührenden mit dem Radius 45° hält, heißt die natürliche, auch semirectangula. Für diese ist log. nat. (b:a) $= \pi = 3,14159265..$ Dieser Logarithme mit dem Modulus des Briggischen Systems $M = 0,43429448..$ multiplicirt, wird der log. Brigg. (b:a) $= 1,3643763..$ und $\frac{b}{a} = 23,14069$. S. Logarithmus, 36.

44. Alle Sectoren einer logarithmischen Spirale, die gleiche Winkel am Mittelpuncte enthalten, sind sich ähnlich. Denn alle Radii, welche in diesen Sectoren dieselben Winkel mit den äußersten gleichnamigen machen, haben dasselbe Verhältniß zu diesen, (40.), und machen auch mit der Curve denselben Winkel. Aller Unterschied betrifft bloß die Größe.

45. Der Bogen AM sey $= s$, es ist $s = (y - a) \sqrt{(1 + m^2)}$.

Denn es ist $\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + y^2 \partial\varphi^2)} = \partial y \sqrt{(1 + m^2)}$. Daraus ist $s = y \sqrt{(1 + m^2)} + Const.$ Da der Bogen bey A, wo $y = a$ ist, anfängt, so ist $Const. = - a \sqrt{(1 + m^2)}$.

Es ist $\sqrt{(1 + m^2)} = \sec. CMT = \frac{1}{\cos CMT}$, (Goniometrie, 13.).

46. Der Bogen AN, von A an rückwärts genommen, ist negativ. Eines solchen Bogens Differential ist, so wie das Differential seines Radii, negativ, das ist, $= -\partial s = -\partial y \sqrt{(1+m^2)}$; daher $-s = -y\sqrt{(1+m^2)} + Const.$ oder $-s = (a-y)\sqrt{(1+m^2)}$, wie es auch die Formel in (45) ergiebt. Das Minuszeichen vor s zeigt bloß die Lage des Bogens an. Der ganze Bogen von A an bis in den Mittelpunct C, durch alle unendlich vielen Windungen ist $= a\sqrt{(1+m^2)}$.

Daß die unendlich vielen Windungen doch nur eine endliche Länge geben, ist nicht wunderbarer, als daß die Summe aller Glieder einer abnehmenden geometrischen Progression eine endliche Größe giebt. (Geometrische Reihe, 5.).

47. Der ganze Bogen s von dem Mittelpuncte an bis zu einem Puncte M, dessen Ordinate CM $= y$ ist, ist $s = y\sqrt{(1+m^2)}$. Es ist der Werth, den die Integration in (45) giebt, wenn die Const. $= 0$ genommen wird.

48. Man ziehe auf den Radius CM in C die senkrechte CT, welche die berührende MT in T schneidet, so ist CT $= my$; MT $= y\sqrt{(1+m^2)}$; und der ganze Bogen von dem Mittelpuncte bis an den Punct M $=$ MT.

49. Der Flächenraum des Sectors ACMA zwischen dem Bogen AM und den Radiis CA, CM, ist $= \frac{1}{4}m(y^2-a^2)$. — Denn das Differential dieses Flächenraums ist $= \frac{1}{2}y^2\partial\varphi$ (Quadratur, 11.). Es ist also $= \frac{1}{2}my\partial y$. Davon ist das Integral $= \frac{1}{4}my^2 + Const.$ $= \frac{1}{4}m(y^2-a^2)$, damit es bey $y = a$ anfange.

50. Das Differential des Flächenraums ACN, wo der Bogen AN in Absicht auf den Bogen AM negativ ist, ist $= -\frac{1}{2}my\partial y$, und dieser Flächenraum $= C - \frac{1}{4}my^2 = \frac{1}{4}m(a^2-y^2)$. Für $y = 0$ ist der Flächenraum, der alle auf einander liegenden, un-

endlich vielen Windungen, bis in den Mittelpunct, begreift, $= \frac{1}{4} ma^2$. Bis an irgend eine Ordinate $CM = y$ ist der gesammte Flächenraum, von dem Mittelpuncte aus, $= \frac{1}{4} my^2$. Die Constante in (49) ist der Flächenraum von CA an bis in den Mittelpunct, subtractiv genommen.

51. Der Flächenraum eines spiralichen Ringes zwischen den nächsten Umläufen AQBD und aqNA, und den Segmenten AD, Aa der Radiorum CD, CA ist $= \frac{1}{4} m \left(\frac{c^2 - a^2}{c}\right)^2$, wo c der Radius CD ist.

Der Anfangsradius des äußern Umlaufes ist $= a$, also der Schlußradius $CD = \frac{bb}{aa} a$. Da $CD = c$ gesetzt ist, so ist $ac = bb$. Der Anfangsradius Ca des innern Umlaufes ist $= \frac{aa}{bb} a = \frac{aa}{c}$. Auf einem Radius $CQ = y$ des äussern Umlaufes nehme man den Radius $Cq = z$ des innern, so ist dieser $= \frac{aa}{bb} y = \frac{a}{c} y$. Der Sector ACQ des äussern Umlaufes ist $= \frac{1}{4} m (y^2 - a^2)$; der Sector ACq des innern $= \frac{1}{4} m \left(z^2 - \frac{a^4}{c^2}\right) = \frac{1}{4} m . \frac{a^2}{c^2} (y^2 - a^2)$. Der Abschnitt AQqa des Ringes ist daher $= \frac{1}{4} m . \frac{c^2 - a^2}{c^2} (y^2 - a^2)$. Für den ganzen Ring zwischen beiden Umläufen ist $y = c$, also der Flächenraum dieses Ringes $= \frac{1}{4} m \left(\frac{c^2 - a^2}{c}\right)^2$. — Es ist $\frac{c^2 - a^2}{c}$ die vierte Proportionale zu $c; c + a; c - a$.

52. Der Halbmesser der Krümmung, r, in einem Puncte M der logarithmischen Spirale ist $= \frac{y\sqrt{(1+mm)}}{m}$, oder, da der Winkel der Curve mit dem Radius CML $= \alpha$ gesetzt ist, $r = \frac{y}{\sin\alpha}$.

Denn es sey LMN (Fig. 38.) ein Bogen der Spirale, C ihr Mittelpunct, CA der Anfangsradius, CM $= y$, der Radius zu dem Winkel ACM oder φ; TMt die berührende in M, und MR der Halbmesser der Krümmung in M. Der Winkel CMT $= \alpha$, ist unveränderlich, so wie dessen Ergänzung zum Rechten, CMR. Daher ist in der Formel, $r = \frac{\partial s}{\partial\varphi - \partial\omega}$, (Krümmungskreis, 46.), wo ω hier der Winkel CMR ist, $\partial\omega = 0$, und der Halbmesser der Krümmung $r = \frac{\partial s}{\partial\varphi}$.
Nun ist $\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + y^2\partial\varphi^2)} = y\partial\varphi\sqrt{\left(\frac{1}{mm}+1\right)} = \frac{y\partial\varphi}{m}\sqrt{(1+mm)}$, also der Radius der Krümmung $r = \frac{y}{m}\sqrt{(1+mm)}$. Da $m = \tang\alpha$ ist (43), so ist $\sqrt{(1+mm)} = \sec\alpha$, und $r = y \cdot \frac{\sec\alpha}{\tang\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$.

53. Die gerade CR, von dem Mittelpuncte der Spirale bis in den Mittelpunct der Krümmung, steht auf dem zugehörigen Radius der Spirale, CM, senkrecht. — Denn es ist $CR^2 = CM^2 + MR^2 -$

$2\,CM \times MR.\ \cos CMR$. (Trigonometrie). Da $CM = MR.\sin\alpha$, und W. $CMR = R - \alpha$, also $\cos CMR = \sin\alpha$ ist, so ist $CR = MR.\cos\alpha$.

Ferner ist $CM^2 + CR^2 = MR^2 (\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2) = MR^2$, welches nur einem rechtwinkligen Dreyeck zukommt. Euklides, I. 48.

54. Alle Dreyecke, wie MCR, zwischen dem Mittelpuncte der Spirale, einem Puncte derselben und dem zugehörigen Mittelpuncte der Krümmung, sind sich ähnlich; daher ist das Verhältniß der zusammengehörigen Radiorum CM an der Spirale und CR an dem Orte PRp der Krümmungs-Mittelpuncte ein gegebenes. Es ist $CM : CR = \text{tang}\ CRM : 1 = \text{tang}\ CMT : 1 = m : 1$.

55. Der Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreise an der logarithmischen Spirale ist dieselbe Spirale, um denselben Mittelpunct, aber in einer andern Lage.

Es sey PRp (Fig. 38.) ein Bogen des Orts dieser Mittelpuncte, und darauf R ein zu dem Puncte M der Spirale LMN gehöriger Punct. Man nehme an der Spirale eine Reihe von Radiis unter gleichen Winkeln neben einander. Diese bilden eine geometrische Progression. Die Radii CR an PRp, dem Orte der Krümmungs-Mittelpuncte, machen mit dem zugehörigen CM an der Spirale einen rechten Winkel, also unter einander denselben Winkel, welchen die zugehörigen Radii an der Spirale machen. Man nehme aus der Progression der Radiorum CM zwey Glieder, y und y', so wie aus der Progression der CR zwey zugehörige, z und z', so ist, da das Verhältniß $y:z$ überhaupt ein gegebenes ist, $y:z = y':z'$, und daraus $y:y' = z:z'$. Die Radii CR (oder z), welche unter denselben Winkeln auf einander folgen wie die zugehörigen y an der Spirale, bilden also eine geometrische Progression. Dieses ist eine Eigenschaft der logarithmischen Spirale, (36). Der Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreise ist auch dieselbe Spirale, weil die logarithmische Spirale durch den Win-

kel zweyer Radiorum und das Verhältniß derselben bestimmt wird, (39), da diese Stücke den Factor m in der Gleichung für die Spirale bestimmen.

56. Die Lage der Spirale PRp wird folgendermaßen bestimmt.

Da das Verhältniß y:z ein gegebenes ist, so machen die Radii y und z an der Spirale LMN allenthalben denselben Winkeln β mit einander, und es ist $\beta = m \log \frac{y}{z} = m \log m$ (54). Ferner ist $\varphi - \beta = m \log \frac{y}{a} - m \log \frac{y}{z} = m \log \frac{z}{a}$, das ist, $\varphi = \beta$ ist der Winkel des Radius z mit der Anfangslinie CA. Hier ist z kleiner als y angenommen. Wäre es größer, so würde β negativ und $\log \frac{y}{z}$ auch, und in beiden Theilen der Gleichung ist die Subtraction einer negativen Größe eine Vergrößerung. Oder man setze für diesen Fall, um Winkel und Logarithmen absolut zu nehmen, $\beta = m \log \frac{z}{y}$, so wird $\varphi + \beta = m \log \frac{y}{a} + m \log \frac{z}{y} = m \log \frac{z}{a}$, wie vorher. Man drehe die ganze Spirale in ihrer Ebene um den Mittelpunct C, so daß jeder Radius den Winkel γ beschreibe, wobey die gerade CA ihre Lage behält, um von derselben an die Winkel rechnen zu können. Dadurch wird der Winkel des Radius y mit CA $= \varphi + \gamma$; des Radius z mit CA, nämlich ACR $= \varphi - \beta + \gamma$. Man setze $\gamma = m \log \frac{a}{c}$, so wird $\varphi - \beta + \gamma = m \log \frac{z}{a} + m \log \frac{a}{c} = m \log \frac{z}{c}$. Es ist nun c der Anfangsradius, welcher in die Linie CA fällt, mit welcher, bey

bey der veränderten Lage der Spirale der Radius a den Winkel γ macht, welches auch die Gleichung, $\gamma = m \log \frac{a}{c}$ besagt. Der Winkel $\varphi - \beta + \gamma$ ist in dem gegenwärtigen Falle $ACR = \varphi + \frac{1}{2}\pi$, da π zwey Rechte bedeutet, indem alle Winkel durch Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, ausgedruckt werden. Also ist $\gamma - \beta = \frac{1}{2}\pi$, und der Winkel γ, um welchen die Lage der Spirale verändert wird, ist $= \frac{1}{2}\pi + \beta$. — An der natürlichen Spirale ist $m = 1$, also $\beta = 0$, und $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, so daß die Spirale um einen rechten Winkel gedreht werden muß, damit sie mit ihrer Evolute zusammenfalle.

57. Der Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreise zu einer logarithmischen Spirale wird von den Halbmessern der Krümmung an dieser berührt (Evolution, 3.). Nun macht der Radius CR mit dem Krümmungshalbmesser MR den beständigen Winkel α; die Curve PRp ist also eine logarithmische Spirale, da es dieser ausschließlich zukommt, daß die Radii mit der Curve, d. i. den sie berührenden geraden, einen unveränderlichen Winkel machen; und zwar ist sie dieselbe mit der erzeugenden LMN, weil an dieser der Winkel der Radiorum mit der Curve derselbe α ist.

58. Durch die Abwickelung der logarithmischen Spirale wird um ihren Mittelpunct eine ihr gleiche Spirale beschrieben.

Denn man nehme (Fig. 37.) auf der in einem Puncte M die Spirale berührenden die Länge $MT = y\sqrt{(1 + mm)}$, wo $m = \text{tang } CMT$ ist, so ist diese gleich dem ganzen spiralischen Bogen von dem Mittelpuncte C an (47), und T ist ein Punct der erzeugten VTv. Man ziehe CT, so ist, wegen des gegebenen Verhältnisses $CM : MT$, nämlich des $1 : \sqrt{(1 + mm)}$, und wegen des eingeschlossenen unveränderlichen Winkels CMT das Dreyeck MCT der Art nach gegeben. Daher ist, wie in (56) erwiesen ist, die durch Abwicklung einer logarithmischen Spirale erzeugte Curve dieselbe

Spirale mit dieser, nur in einer andern Lage, um denselben Mittelpunct *).

59. Der Winkel CMT der sich zugeordneten Radiorum beider Curven ist ein Rechter. — Denn da tang CMT oder tang $\alpha = m$ ist, so ist sec CMT $= \sqrt{(1 + mm)}$. Nun ist $MT = CM \sqrt{(1 + mm)}$, also ist $CM : MT = 1 : \sec CMT$. Dieses Verhältniß findet nur an einem bey C rechtwinkligen Dreyeck Statt.

60. Oder es wird auf dieselbe Art wie in (53) gezeigt, daß $CT^2 + CM^2 = MT^2$, also das Dreyeck MCT bey C rechtwinklig ist.

61. Die gerade MS (Fig. 38.) an der logarithmischen Spirale LMN mache mit der Normale MR in M den Winkel RMS = CMR, man sucht die Curve Qsq, welche von dieser MS und jeder andern, auf ähnliche Art an die LMN gezogenen, berührt wird, das ist, die Brennlinie oder Catacaustica der logarithmischen Spirale.

In der Formel, $u = \frac{rz \cos \omega}{2z - r \cos \omega}$, (Catacaustica, 13. V) ist z was hier CM = y ist; r der Radius der Krümmung, hier $\frac{y}{\sin \alpha}$; ferner ω, der Winkel CMR hier $90° - \alpha$, daher $\cos \omega = \sin \alpha$, und u hier MS. Die Substitution dieser Werthe giebt MS = y, das ist, MS = CM. Man ziehe die gerade CS, so ist in dem gleichschenkligen Dreyeck CMS, worin der W. CMS $= 2 (90° - \alpha)$ ist, von den beiden andern jeder $= \alpha$, und das Verhältniß $CM : CS = \sin \alpha : \sin 2\alpha = 1 : 2 \cos \alpha = \sec \alpha : 2$. Daher ist zufolge (57) die Brennlinie QSq dieselbe Spirale mit der vorgegebenen, um denselben Mittelpunct C, nur in einer andern Lage.

62. Der Winkel γ, um welchen die Spirale ihre

*) Diesemnach ist die Einschränkung in dem Artikel, Evolution, 17, aufzuheben.

Lage geändert hat, ist $= \alpha + m \log \frac{1}{2} \sec \alpha$. — Denn es ist aus (56) überhaupt der Winkel ACS $= \varphi - \beta + \gamma$; und hier ACS $= \varphi + \alpha$, also der Drehungswinkel $\gamma = \alpha + \beta$. Ferner ist $\beta = m \log \frac{y}{z} = m \log \frac{CM}{CS} = m \log \frac{1}{2} \sec \alpha$; folglich $\gamma = \alpha + m \log \frac{1}{2} \sec \alpha$.

63. Wenn $\alpha = 60°$ genommen wird, so ist CM $=$ CS, und $\beta = 0$, weil der Logarithmus der Einheit $= 0$ ist. Auch ist $\sec 60° = 2$, da $\cos 60° = \frac{1}{2}$ ist.

64. Es sey LMN (Fig. 39.) ein Bogen einer logarithmischen Spirale, deren Mittelpunct C ist. An die Ordinate CM werde durch M die gerade MP unter einem gegebenen Winkel CMP gezogen, und dasselbe werde für jeden andern Punct gedacht: der Ort OPQ der Durchschnittspuncte jeder MP mit der an einen unendlich nahen Punct m auf gleiche Art gezogenen mP ist eine der LMN gleiche Spirale.

An den beiden Curven seyn M, P zusammengehörige Puncte; CM $= y$; CP $= z$; der Winkel ACM $= \varphi$; ACP $= \omega$; also MCP $= \omega - \varphi$. Die gerade CA ist der Lage nach gegeben. Der gegebene Winkel CMP sey $= \beta$. Man verlängere CP nach p hin, so ist der Winkel MPp $= \beta + \omega - \varphi$. In dem Dreyecke MCP ist $y : z = \sin(\beta + \omega - \varphi) : \sin \beta$. Man nehme auf LMN einen von M endlich entfernten Punct, so ist der Durchschnittspunct der MP mit der durch m auf gleiche Art gelegten zwar kein Punct des Ortes; allein, was in diesem Falle unveränderlich bleibt, bleibt es auch für unendlich nahe Puncte. Läßt man den Punct m immer näher dem M rücken, so bleiben CM und der Winkel MCP nebst der Lage der MP unverändert; läßt man den Punct M immer näher dem m rücken, so bleiben Cm und der Winkel mCP nebst der Lage der mP unverändert. Das letztere macht die Rechnung etwas leichter. Es seyn also y und φ die veränderlichen Größen.

Das Gränzverhältniß ihrer Veränderungen erhält man durch die Differentiation der Gleichung,

$$y = \frac{\sin(\beta + \omega - \varphi)}{\sin\beta} z,$$

wenn dabey die sonst veränderlichen Größen, z und ω, als constante behandelt werden. So ist

$$\partial y = -\frac{z\partial\varphi}{\sin\beta}\cos(\beta + \omega - \varphi),$$

woraus in Verbindung mit jener Gleichung folgt

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial\varphi}{\operatorname{tang}(\beta + \omega - \varphi)}.$$

Die Differentialgleichung für die Spirale ist $\partial\varphi = \frac{m\partial y}{y}$, also ist $m = -\operatorname{tang}(\beta + \omega - \varphi)$, wo die Negation nur anzeigt, daß der Winkel $\beta + \omega - \varphi$, nämlich der W. MPp, stumpf ist, dessen Tagente, die negativ ist, negativ genommen einen positiven Werth für m giebt. — Oder es ist $m = \operatorname{tang}(\pi - \beta - \omega + \varphi)$, wo der Winkel zu der Tangente der Nebenwinkel zu $\beta + \omega - \varphi$ ist.

Da der Winkel $\beta + \omega - \varphi$ einen gegebenen Werth hat, so ist $\omega - \varphi$ (= MCP) ein unveränderlicher Winkel. Auch ist das Verhältniß $y:z$ für alle zusammengehörige Puncte, wie M und P, dasselbe. Die Curve OPQ ist daher dieselbe Spirale mit LMN, aus (56), aber in einer andern Lage.

65. Man setze zur Abkürzung, $\beta + \omega - \varphi = \delta$, so ist $y = \frac{\sin\delta}{\sin\beta} z$. Diesen Werth trage man in die Gleichung für die gegebene Spirale, $\varphi = m\log\frac{y}{a}$, so ist $\varphi = m\log\frac{\sin\delta}{\sin\beta}\cdot\frac{z}{a}$. Da $\varphi = \omega + \beta - \delta$ ist, so ist

$$\omega = \delta - \beta + m \log \frac{\sin\delta}{\sin\beta} \cdot \frac{z}{a}.$$

Man verwandle den Winkel $\delta - \beta$ in eine logarithmische Größe, $\delta - \beta = m \log \frac{a}{f}$, so ist $\omega =$

$m \log \frac{\sin\delta}{\sin\beta} \cdot \frac{z}{f}$. Noch setze man $\frac{f \sin\beta}{\sin\delta} = c$,

so ist $\omega = m \log \frac{z}{c}$, die Gleichung für die Curve OPQ. Die Anfangslinie für die Winkel ist CA, der Radius in derselben ist c. Wegen des Factors m ist die Curve dieselbe mit der Spirale LMN. Für diese ist die Gleichung, $\varphi = m \log \frac{y}{a}$, also der Winkel γ des Radius c mit dem Anfangsradius CA ist $\gamma = m \log \frac{c}{a}$. Um diesen hat die Spirale OPQ ihre Lage geändert.

66. Die unter dem beständigen Winkel β an CM gelegte gerade MP berührt die Curve OPQ. — Denn an der Spirale LMN ist $m = \operatorname{tang} \alpha$, der Tangente des beständigen Winkels CMT des Radius CM mit der Spirale oder ihrer berührenden MT, (43). Vorher ist gefunden $m = \operatorname{tang} (\pi - \beta - \omega + \varphi)$, also ist $\alpha = \pi - \beta - \omega + \varphi$, das ist, es ist CMT = CPM. Die berührenden machen aber an der Spirale OPQ in jedem Puncte mit dem Radius denselben Winkel, wie an der ihr gleichen LMN; folglich ist MP die in P an OPQ berührende.

67. Wird die gerade MP auf die andere Seite von CM gelegt, so ist β negativ, und es ist nun $y : z = \sin(\beta - \omega + \varphi) : \sin\beta$, wenn β, wie φ und ω, absolut, bloß nach der Quantität genommen wird. Es ist nun φ größer als ω, welcher Umstand für die Rechnung

gleichgültig ist. Für diesen Fall ist $m = \text{tang}(\beta - \omega + \varphi)$. Auch ist $\delta = \beta - \omega + \varphi$, und $\beta - \delta = m \log \frac{a}{f}$. Die Verwandlungen werden ganz klar, wenn die Rechnung auf diesen Fall besonders eingerichtet wird.

68. Die Curve OPQ ist die Diacaustica der Spirale LMN, oder ihre Brennlinie durch Brechung, wenn bey dem Übergange der Lichtstrahlen aus einem Mittel in ein anderes die Curve LMN die begränzende Linie der Mittel in der Brechungs-Ebene, und ihr Mittelpunct C der strahlende Punct ist. In dem betrachteten Falle geschieht die Brechung nach dem Einfallslothe, der Normale MR, hin. Die Linie MP ist der rückwärts verlängerte gebrochene Strahl. An der Spirale ist der Einfallswinkel CMR ein gegebener, daher auch der Brechungswinkel PMR und ihr Unterschied CMP. S. Diacaustica.

69. Die logarithmische Spirale hat schon Descartes betrachtet, aber als eine Curve, welche mit den aus einem Mittelpuncte gezogenen geraden einen unveränderlichen Winkel macht. Er kam darauf bey der Bemerkung, daß die Fläche, auf welcher ein schwerer Körper allenthalben dasselbe relative Gewicht behalten soll, gekrümmt seyn müsse, so daß die nicht parallelen Richtungen der Schwere mit ihr immer gleiche Winkel machen. Die Linie, nach welcher sie gekrümmt seyn muß, sey eine Spirale, deren Mittelpunct derjenige der Erde ist, (Cartesii epist. P. I. epist. 73. 74.). Er behauptete (Ep. 91. P. II.), daß sie bis zu dem Mittelpuncte der Erde reiche. Ob er dabey unendlich viele Windungen gedacht habe, erhellt nicht. Die Figur in dem 74sten Briefe zeigt nur eine Windung von dem Mittelpuncte aus. Doch sagt er daselbst ganz richtig, daß die Bogen von dem Mittelpuncte an sich wie die zugehörigen Radii durch die Endpuncte verhalten. Andere Geometer aber, welche von dieser Untersuchung

benachrichtigt wurden, fanden, daß die Curve unendlich viele Windungen um ihren Mittelpunct macht, und daß die Radii in geometrischer Progression sind, wenn die Winkel in arithmetischer stehen. Montucla rühmt zwey Schriften eines Jesuiten, Nicolas, de novis spiralibus exercitatio geometrica. Tolosae 1693; de lineis spiralibus logarithmicis, ibid. 169... Etwas weniges über die logarithmische Spirale findet man bey Wallis, Opp. T. I. p. 560, und bey Barrow, Lectt. geometricae, p. 124.

70. Durch Hülfe der neuen Analysis bestimmte Jakob Bernoulli die Längen der Bogen und die Flächenräume, zeigte auch den Zusammenhang dieser Curve mit der loxodromischen Linie auf der Kugel, Opp. T. I. Nr. 42. Vorzüglich ist, was er bemerkt, daß die Evolute und die Caustica dieser Spirale dieselben Linien mit ihr sind. Dieses hatte auch Joh. Bernoulli für sich gefunden. (Jac. Bernoulli Opp. T. I. Nr. 50.) Ferner fand Jakob Bernoulli, daß die logarithmische Spirale noch auf viererley Art sich selbst erzeugt: wenn der Halbmesser der Krümmung in entgegengesetzter Richtung genommen wird, wenn eben dieses mit dem zurückgeworfenen MS (Fig. 38.) geschieht, wenn eben dieser in der Richtung von CM jenseits M getragen wird, und viertens, wenn man die Spirale auf sich selbst sich wälzen läßt, so daß die auf gleiche Art liegenden Puncte auf einander treffen, wobey der Mittelpunct der sich wälzenden Spirale der beschreibende Punct ist. Diese erzeugten Linien nannte er die Ant-evoluta, die Anticaustica, die Pericaustica und Cycloidalis. Die vierte fällt in die Anticaustica. (Acta Erud. 1692. Opp. T. I. Nr. 49.). Auch fand er, daß ihre Brennlinie durch Brechung sie selbst ist. (Acta Erud. 1693, Opp. Nr. 56.). Bernoulli ergötzte sich sehr über diese verschiedenen Arten der Wiedererzeugung, so daß er diese Spira mirabilis, wie er sie nennt, zum Sinnbilde für mehrere Vorstellungen und Verhältnisse vorschlägt, un-

ter andern, doch mit Schüchternheit, zu einer Abbildung der ewigen Zeugung des göttlichen Sohnes vom Vater, am liebsten zum Denkmahl auf seinem Grabsteine, mit der Beyschrift: Eadem mutata resurgo.

71. Die logarithmische Spirale hat verschiedene feine Anwendungen. — Sie ist die Projection der loxodromischen Linie der Seefahrer auf die Ebene des Äquators nach der stereographischen Entwerfungsart, wobey auch der loxodromische Winkel derjenige ist, unter welchem die Radii die Spirale schneiden. Sie heißt daher auch Loxodromica plana. Siehe stereographische Projection. Die Erde wird dabey für eine Kugel genommen.

Sie ist im leeren Raum die Bahn eines Körpers, der nach einem Mittelpuncte der Kraft getrieben wird, die sich umgekehrt wie der Cubus des Abstandes von jenem Mittelpuncte verhält. Das Verhältniß der Geschwindigkeiten nach der Richtung des Radius und der darauf senkrechten ist ein unveränderliches, da das Verhältniß $\partial y : y\partial\varphi$ ein bestimmtes, $1 : m$, ist.

Durch welche Ursache aber auch ein Körper eine logarithmische Spirale beschreibt, so ist jenes Verhältniß unveränderlich. Daher mag sie zu den Rinnen (Hauschlägen) auf den Mühlsteinen, besonders dem untern, dienen. Hier nimmt die Geschwindigkeit nach der auf den Radius senkrechten mit dem Radius (dem Abstand von der Axe) zu. Nimmt man $\alpha = 45°$ so ist die Bewegung in der Richtung des Radius allenthalben so groß als die kreisförmige.

Die Flügel (Schaufeln) eines Ankers werden zum Widerstande auf das vortheilhafteste nach einer logarithmischen Spirale gekrümmt, so daß der Neigungswinkel gegen die Linien aus dem Mittelpuncte $67\frac{1}{2}$ Gr. beträgt. Chapman von der tüchtigen Form der Schiffsanker in Gilberts Annalen der Physik. VI. Bd. S. 81.

Hyperbolische oder reciproke Spirale.

72. Die Spirale, an welcher die nach einem gegebenen Puncte gezogenen Radii sich umgekehrt verhalten wie die zugehörigen Bogen eines um denselben Punct beschriebenen Kreises, heißt eine *hyperbolische* oder *reciproke*. Der Halbmesser des Kreises sey $= a$, ein Bogen desselben $= x$, die zugehörige Ordinate aus dem Mittelpuncte oder der Radius der Curve $= y$, so ist die Gleichung, $aa = xy$, wie für die Hyperbel, woran die Asymptoten die Axen der Coordinaten sind (Hyperbel, 8.). Oder man setze $x = \varphi a$, wo φ der zum Bogen x gehörige Winkel ist, so ist $\varphi y = a$. Die Curve mag man die *umgekehrte Archimedische* nennen.

73. Sie macht unendlich viele Windungen um einen Mittelpunct zu ihm hin, da φ unendlich groß genommen werden muß, wenn $y = 0$ seyn soll. Hingegen ist y unendlich groß, für $\varphi = 0$. Sie hat eine Asymptote parallel mit der Anfangslinie, von welcher an die Winkel φ genommen werden, in dem Abstande a. Denn der Abstand eines Punctes der Curve von der Anfangslinie ist $= y \sin\varphi = \frac{a \sin\varphi}{\varphi}$, kleiner als a. Die Gränze dieses Werthes ist $= a$, da die Gränze des Verhältnisses $\varphi : \sin\varphi$ das $1 : 1$ ist. Für diese Gränze ist φ unendlich klein und y unendlich groß. Die Curve schneidet jene Anfangslinie zum erstenmahle, wenn $\varphi = \pi$, dem halben Kreisumfange ist. Es ist dann $y = \frac{a}{\pi}$.

74. Zur Übung in der Integralrechnung nehme man die Rectification dieser Curve. Aus ihrer Gleichung, $\varphi y = a$, folgt $y\partial\varphi = -\varphi\partial y$, und das Differential des Bogens $\partial s = \sqrt{(y^2\partial\varphi^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial y}{y}\sqrt{(a^2 + y^2)}$.

In dem Artikel, Integralformel, 59. sind statt der dortigen unbestimmten Größen,

$$a, \quad b, \quad m, \quad n, \quad p,$$

hier zu setzen

$$a^2, \quad 1, \quad 0, \quad 2, \quad \tfrac{1}{2},$$

und x ist mit y zu vertauschen. Durch die Formel V. wird der involutorische Theil auf die Formel, 53, daselbst gebracht. Folglich ist

$$s = \sqrt{(a^2 + y^2)} + a \log. \frac{\sqrt{(a^2 + y^2)} - a}{y} - \text{Const.}$$

Der Bogen fange bey einer gegebenen Ordinate b an, so ist

$$\text{Const.} = \sqrt{(a^2 + b^2)} + a \log. \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)} - a}{b}.$$

Ist diese Ordinate die ursprünglich gegebene a, so ist

$$\text{Const.} = a\sqrt{2} + a \log. (\sqrt{2} - 1).$$

75. Joh. Bernoulli hat diese Curve zuerst betrachtet. Er fand, daß sie unter diejenigen Linien gehört, welche durch eine Kraft beschrieben werden, die sich umgekehrt wie der Cubus des Abstandes von dem Mittelpuncte der Kraft verhält, und gebraucht sie als Beyspiel zu zeigen, daß man von dem Gesetze der Kraft nicht auf die Natur der beschriebenen Linie schließen dürfe, wie es Newton scheine gethan zu haben in dem Falle, da die Kraft sich umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes verhält. Operum T. I, p. 480. 552. — Es mag noch als eine Eigenthümlichkeit der hyperbolischen Spirale angemerkt werden, daß sie eine unveränderliche Subtangente hat.

Parabolische Spirale.

76. Eine andere Gattung von Spiralen, als die bisher betrachtete, entsteht, wenn man den Umfang eines Kreises zur Abscissenlinie nimmt, und auf diesen die

Ordinaten senkrecht setzt, wie sonst auf eine gerade Abscissenlinie, das ist, sie nach dem Mittelpuncte des Kreises laufen läßt.

77. Von dieser Gattung ist die parabolische Spirale, oder die Parabola helicoides, welche Jakob Bernoulli zu einem Beyspiele der Leibnitzischen Differentialrechnung in den Actis Erudit. 1691 (Opp. T. I. Nr. 41.) genommen hat. Ihre Gleichung ist $ax = uu$, wie für die gewöhnliche Parabel, nur daß an jener die Abscisse ein Kreisbogen ist, oder daß die Axe in einen solchen Bogen gekrümmt wird. Bernoulli nimmt die Ordinaten nach dem Mittelpuncte des Kreises hin; die Curve hat aber auch entgegengesetzte Ordinaten, von dem Umfange des Kreises auswärts hin. Diese erwähnt Bernoulli nicht. Er läßt sie in der von ihm gezeichneten Figur sich nur bis zu dem Mittelpuncte des Kreises erstrecken, bemerkt auch nicht, daß sie weiter fortlaufe; allein sie macht unzählig viele Umläufe, da der Bogen x nicht auf den einfachen Umfang des Kreises eingeschränkt werden darf. Die Ordinate u wächst dabey ohne Ende fort.

78. In Fig. 40. ist der Anfang einer parabolischen Spirale, AMBC, für positive Ordinaten, vorgestellt. Der dazu angenommene Kreis ist APDA, dessen Mittelpunct C; auf demselben ist AP ein Bogen als Abscisse, dazu die nach C gerichtete PM die Ordinate. Es sey $AP = x$; $PM = u$; der Parameter $= a$, so ist die Gleichung für die Curve, $ax = uu$. Oder besser: man setze den Radius $CA = r$; den W. ACP oder ACM $= \varphi$, so ist der Bogen $AP = r\varphi$, und die Gleichung wird, $ar\varphi = uu$. Auch wird es dienlich seyn, den Radius der Curve, $CM = y$, einzuführen. So ist die Gleichung, $ar\varphi = (r - y)^2$. Dieser Radius y wird negativ, wenn u größer als r genommen wird. — Wenn $y = 0$ ist, so ist $\varphi = \frac{r}{a}$, und umgekehrt, wenn $\varphi = \frac{r}{a}$

genommen wird, geht die Curve durch den Mittelpunct, den Werth $y = 2r$ bey Seite gesetzt. Nimmt man $\frac{r}{a} = 2\pi$, so geht die Curve nach einem Umlaufe des Radius durch den Mittelpunct.

Bey dieser Annahme ist $a = \frac{r}{2\pi}$, und $\frac{\varphi}{2\pi} = \left(\frac{r-y}{r}\right)^2$.

Man nehme $r = 10000$, so ist für

$\varphi =$	0;	$u =$ 0	$y =$ 10000
$=$	10°;	$u =$ 1667	$y =$ 8333
$=$	30°;	$u =$ 2887	$y =$ 7113
$=$	90°;	$u =$ 5000	$y =$ 5000
$=$	120°;	$u =$ 5773	$y =$ 4227
$=$	180°;	$u =$ 7071	$y =$ 2929
$=$	240°;	$u =$ 8165	$y =$ 1835
$=$	270°;	$u =$ 8660	$y =$ 1340
$=$	330°;	$u =$ 9574	$y =$ 426
$=$	360°;	$u =$ 10000	$y =$ 0
$=$	370°;	$u =$ 10138	$y =$ −138
$=$	390°;	$u =$ 10408	$y =$ −408 etc.

79. Ein Abschnitt des Flächenraums AMPA (Fig. 40.) zwischen einem Bogen dieser Spirale, dem zugehörigen Kreisbogen und der Ordinate u ist $= \frac{2}{3}ux - \frac{u}{4r}ux$.

Denn ein solcher Abschnitt ist der Unterschied zwischen dem zugehörigen Kreissector ACP und dem spiralischen Sector ACM. So verhält es sich auch mit ihren Differentialen. Aus der Gleichung für die Curve, $ar\varphi = uu$, folgt ihre Differentialgleichung, $ar\partial\varphi = 2u\partial u$. Der parabelförmige Abschnitt sey Z, so ist

$$\partial Z = \tfrac{1}{2} rr\partial\varphi - \tfrac{1}{2}(r-u)^2\partial\varphi$$
$$= ru\partial\varphi - \tfrac{1}{2}uu\partial\varphi;\ \text{oder}\ \partial Z =$$

$\frac{2uu}{a} \partial u - \frac{u^3}{ar} \partial u$. Daher ist $Z = \frac{2u^3}{3a} - \frac{u^4}{4ar}$, oder

$Z = \frac{2}{3} ux - \frac{u}{4r} ux$.

Die Constante fällt weg, weil Z mit x und u anfangen soll. — Der erste Theil von Z ist $= \frac{2}{3} ux$, auf ähnliche Art wie für die eigentliche Parabel (Quadratur, 70.). An der parabolischen Spirale ist die Area kleiner als Zweydrittheile des Rechtecks von Abscisse und Ordinate, weil die Ordinaten convergiren.

80. Die Area zwischen der Curve von ihrem Anfangspuncte (für $u=0$) bis zu dem Mittelpuncte ($u=r$), dem zugehörigen Kreisbogen x, und der Ordinate r zum Mittelpuncte ist $= \frac{5}{12} rx$. Ist dabey x der ganze Kreisumfang, so ist $x = 2\pi r$, und die Area $= \frac{5}{6} \pi rr$. Sie verhält sich zu der Kreisfläche πrr wie 5:6. Dieses ist der Fall, wenn $\frac{r}{a} = 2\pi$ genommen wird.

81. Die Tangente des Winkels einer berührenden an der parabolischen Spirale mit dem Radius ist $= \frac{2(r-y)y}{ar}$, den Winkel an der Seite genommen, an welcher die Ordinaten abnehmen.

Es sey (Fig. 40.) AMBC ein Bogen dieser Spirale von dem Anfangspuncte A bis zu dem Mittelpuncte C; auf demselben M ein Punct, durch welchen die berührende TMt gezogen ist. Diese schneidet die verlängerte Anfangslinie CA in T. Der Winkel CMt des Radius mit der berührenden sey $= \omega$, nach der Gegend, nach welcher hin die Ordinaten CM abnehmen. Es ist $\tang \omega = -\frac{y\partial\varphi}{\partial y}$ (berührende Linie, 27.), wo das Vorzeichen — gesetzt ist, weil der Winkel ω hier einen

Nebenwinkel von dem Winkel des Radius mit der berührenden a. a. O. bedeutet. Da aber die Differentiale ∂y und $\partial \varphi$ hier entgegengesetzte Beziehung haben, nämlich für positive y, so erhält tang ω doch einen positiven Werth, und ω ist ein spitzer Winkel, wie es seyn muß, wenn die Ordinaten aus dem Mittelpuncte absolut abnehmen.

Man setze nun aus der Differentialgleichung für die krumme Linie, $ar\partial\varphi = -2(r-y)\partial y$, den Werth des Differentialquotienten in die Formel für tang ω, so wird erhalten, $\tan\omega = \frac{2(r-y)y}{ar}$.

Diese Tangente hat eine Gränze des Wachsthums für positive Werthe von y. Sie ist am größten, wenn $y = \frac{1}{2}r$ ist. (Größtes und Kleinstes, 45.). — Für $y = r$, und $y = 0$, ist $\tan\omega = 0$, oder die berührende fällt in den Radius; für negative y ist tang ω negativ, daher ω negativ, und CMt stumpf, da nun die Radii mit φ zugleich zunehmen. Ein negativer Winkel hat dieselbe negative Tangente mit dem stumpfen, der seine Ergänzung zu zwey Rechten ist. (Goniometrie, 8.).

82. Die berührende MT schneidet die (wenn nöthig verlängerte) CA in T unter dem Winkel $\omega - \varphi$. Es ist

$$\tan CTM = \frac{tg\,\omega - tg\,\varphi}{1 + tg\,\omega . tg\,\varphi}. \quad \text{(Goniometrie, 33.).}$$

In dem Mittelpuncte, wo $\omega = 0$ ist, wird tang CTM $= - \tan\varphi$. Eine krumme Linie schneidet nämlich eine gerade unter dem Winkel der sie in dem Durchschnittspuncte berührenden, und in dem Mittelpuncte C fällt die berührende in den Radius. Die Negation rührt daher, daß der Winkel φ von CA an rings um den Mittelpunct C genommen wird, der W. CTM aber zunächst von der Anfangslinie CA an, nach der einen oder andern Seite. Zwey Winkel, die zusammen vier oder zwey Rechte ausmachen, haben gleiche und entgegengesetzte

Tangenten; der zu dem Mittelpuncte gehörige Radius wird, ungeachtet er ein Punct ist, doch zugleich als eine gerade Linie betrachtet, nämlich als diejenige, die sich von allen benachbarten Radiis unterscheidet.

83. Von dem Wendungspuncte der parabolischen Spirale in dem dahin einschlagenden Artikel.

Spiralen auf den Oberflächen runder Körper.

Man lasse auf der Oberfläche eines Cylinders eine der Axe parallele gerade Linie sich, unbestimmt oft, herum bewegen, indem auf derselben ein Punct gleichmäßig mit ihr (nach einem bestimmten Verhältnisse ihrer gleichzeitigen Wege) fortrückt: dieser Punct beschreibt durch die zusammengesetzte Bewegung eine cylindrische Spirale. Die bekannten Schraubengänge bilden solche.

Nimmt man anstatt des Cylinders einen Kegel, und läßt auf dessen Oberfläche eine Seite sich herumbewegen, indem ein Punct auf dieser gleichmäßig mit ihr fortrückt, so wird von diesem eine konische Spirale beschrieben.

Auf einer Kugel lasse man einen großen Kreis um einen Durchmesser, als Axe der Kugel, sich drehen, und auf dessen Umfange einen Punct sich gleichmäßig mit demselben fortbewegen; dieser beschreibt eine sphärische Spirale, welche noch eine Betrachtung verdient. Pappus hat die Area zwischen derselben und dem Kreisquadranten bestimmt. Collect. mathem. L. IV. prop. 30.

Es sey (Fig. 41.) APB der Halbkreis, durch dessen Umdrehung um den zu dem Puncte P gehörigen Halbmesser eine Halbkugel beschrieben ist. Auf dem Quadranten PA bewege sich von P her ein Punct M, und habe den Bogen PM vollendet, wenn der Quadrant sich um den Winkel APN gedreht hat, oder auf dem Kreise AB

um den Bogen AN fortgerückt ist. So habe der Punct bis dahin den spiralischen Bogen PQM beschrieben. Die Fläche zwischen diesem Bogen und dem Kreisbogen PM ist nun anzugeben.

Man ziehe einen benachbarten Quadranten Pn, und durch M den Parallelbogen Mm mit dem Kreise AB. Das Verhältniß des Sectors der halben Kugelfläche, NPn, zu dem Sector MPm des Abschnittes derselben ist dasjenige des Radius der Kugel zu dem Sinus versus des Bogens PM in Beziehung auf diesen Radius, aus Complanation, Exemp. I. Th. I. S. 515, weil die ganzen von PN und PM beschriebenen Oberflächen sich wie ihre gleichwinkligen Sectoren verhalten. Dieses Verhältniß ist das Verhältniß der Differentiale für den Sector APN und die spiralische Area PQMP, weil bey diesem das Dreyeck $Mm\mu$, das in dem Sector $PM\mu$ der spiralischen Area noch zu dem Sector PMm hinzukommt, verschwindet, eben so wie bey einer ebenen krummen Figur das Dreyeck zwischen den Differenzen der Coordinaten und des Bogens, wenn von den letzten Verhältnissen die Frage ist.

Es sey nun der Radius der Kugel $= a$, der Winkel zu dem Bogen AN $= \varphi$, der zu dem Bogen PM $= \omega$; das gegebene Verhältniß beider Winkel $= m:1$, das ist, das Verhältniß der Wege, welche die Puncte N und M, jener auf dem Kreise AB, dieser auf dem Quadranten PN zugleich beschreiben. Die spiralische Area PQMP sey $= Z$. Die Oberfläche der Halbkugel ist $= 2\pi aa$, also der Sector APN $= aa\varphi$, und das Differential desselben $= aa\partial\varphi$. Dieses verhält sich zu dem Differential der spiralischen Area wie $1 : 1 - \cos\omega$. Also ist $\partial Z = aa(1 - \cos\omega)\partial\varphi$. Da $\varphi : \omega = m : 1$ gesetzt ist, so ist $\partial\varphi = m\partial\omega$ und $\partial Z = maa(1 - \cos\omega)\partial\omega$. Daraus ist, (Differentialformeln, 38.)

$$Z' = maa(\omega - \sin\omega),$$

ohne Constante, weil die Area mit ω zugleich anfängt.

Es

Es ist $\frac{1}{2}aa.\omega$ der Sector zu dem Winkel ω in dem Kreise mit dem Radius a; und $\frac{1}{2}aa.\sin\omega = a\sin\frac{1}{2}\omega.a\cos\frac{1}{2}\omega$ = dem Dreyeck über der Chorde Bogens $a\omega$ in diesem Sector, also $\frac{1}{2}aa(\omega - \sin\omega)$ = dem Kreisabschnitte zwischen dem Bogen $a\omega$, und dessen Chorde, und die spiralische Area PQMP,

$$Z = 2m.\ \text{Segm. arc. } a\omega.$$

Die Spirale treffe den Kreis AB in D, wo nämlich der Bogen AD zu dem Quadranten PD = m : 1 ist, so ist $\omega = \frac{1}{2}\pi$, und $\sin\omega = 1$, also die

$$\text{Area PMDP} = m\,aa\left(\tfrac{1}{2}\pi - 1\right)$$

$$= 2m\left(\tfrac{1}{4}\pi aa - \tfrac{1}{2}aa\right),$$

das ist dem 2mfachen des Kreisabschnittes über der Chorde des Quadranten in dem Kreise mit dem Halbmesser a.

Die Oberfläche des Sectors APD auf der Kugel verhält sich zu der Oberfläche der Halbkugel wie m : 4, da AD : 4PD = m : 4 ist. Sie ist also = $\frac{1}{2}m\pi aa$. Daher ist die Oberfläche zwischen dem Quadranten AP, der Spirale PMD und dem Bogen AD des Grundkreises = m aa.

Pappus läßt den Quadranten PD sich um einen Winkel von vier Rechten drehen, oder einen ganzen Umlauf längs des Grundkreises vollenden, bis daß der sich bewegende Punct den Quadranten beschrieben hat. Bey ihm ist also der Bogen AD dem Umfange gleich, und PD fällt in PA, von wo er ausgegangen ist. Ihm ist also m = 4, und die spiralische Area = $8\left(\frac{1}{4}\pi aa - \frac{1}{2}aa\right)$, das ist das achtfache des Kreisabschnittes über der Chorde des Quadranten.

Die Methode, welche Pappus anwendet, den von der sphärischen Spirale und dem Quadranten durch ihren Endpunct beschlossenen Flächenraum zu finden, ist ungemein sinnreich, und eine Einschließung dieser Größe zwischen zwey sich ohne Ende nähernde Gränzen. Sie ist dem Verfahren ähnlich, welches er gebraucht,

den von der archimedischen Spirale in ihrem ersten Umlaufe und dem Halbmesser zu dem Endpuncte dieses Umlaufs eingeschlossenen Flächenraum zu bestimmen. Allein sein Vortrag ist mehr eine kurze Andeutung als eine ordentliche Ausführung des Verfahrens. Daher mag die folgende Darstellung demselben zu einiger Erläuterung dienen.

Man denke sich den Umfang des Grundkreises ABA (Fig. 41) in n gleiche Theile getheilt, wo n willkürlich ist, und einer dieser gleichen Theile sey Nn, so daß der zu Nn am Mittelpuncte gehörige Winkel $= \frac{2\pi}{n}$ ist. Durch die Theilungspuncte wie N, n lege man Quadranten PN, Pn, welche die Spirale in M und μ schneiden, und beschreibe aus dem Pole P zwischen je zwey nächsten Quadranten PN, Pn mit den Sehnen der Bogen PM, Pμ Kreisbogen Mm, μr, so fällt jeder spiralische Sector wie PMμ zwischen die beiden sphärischen Sectoren PMm und Prμ, davon der erste in ihm, der andere um ihn beschrieben ist. Von diesen Sectoren ist der λte eingeschriebene jedesmahl dem $(\lambda - 1)$ten umschriebenen gleich: daher der erste eingeschriebene $= 0$ ist.

Dieses vorausgesetzt, so ist mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnungen Sect. sphaer. PNn:

$$\text{Sect. sphaer. PMm} = \frac{2\pi aa}{n} : \frac{2\pi aa}{n}(1 - \cos\omega)$$

$$= \frac{2\pi aa}{n} : \frac{4\pi aa}{n}\sin\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{\pi aa}{2n} : \frac{\pi aa}{n}\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2aa \cdot \frac{\pi}{2n} : \frac{1}{2} \cdot \left(2a\sin\frac{1}{2}\omega\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2n}.$$

Die Glieder dieses letzten Verhältnisses sind ähnliche Kreissectoren mit dem Winkel $\frac{\pi}{2n}$ am Mittelpuncte in

Kreisen, deren Halbmesser $a\sqrt{2} = 2a \sin \frac{\pi}{4}$ und $2a \sin \frac{1}{2}\omega$ oder die Chorde des Quadranten und die des Bogens $a\omega$ in dem größten Kreise der Kugel sind. In einer sehr einfachen Verzeichnung weiß Pappus diese Kreisausschnitte darzustellen. Er zieht nämlich an den einen Endpunct des Quadranten des größten Kugelkreises eine berührende, und beschreibt aus dem Berührungspuncte als Mittelpuncte innerhalb des von der berührenden und der Chorde des Quadranten eingeschlossenen halben rechten Winkels mit der Chorde des Quadranten als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher in n gleiche Theile getheilt wird, so geben diejenigen Stücke der an die Theilpuncte gezogenen Halbmesser, welche in den Abschnitt über der Chorde des Quadranten fallen, und Sehnen in demselben sind, die Halbmesser $2a \sin \frac{1}{2}\omega$; mit welchen nun die Sectoren $\frac{\pi aa}{n} \sin \frac{1}{2}\omega^2$ um und in den gedachten Abschnitt beschrieben werden. Weil nun in der vorhergehenden Proportion das erste und dritte Glied immer einerley bleiben, während die beiden andern mit dem Winkel ω sich ändern, so verhält sich die Summe aller Kugelsectoren PNn zu der Summe aller Sectoren PMm, wie die Summe aller Kreissectoren $\frac{\pi aa}{2n}$ zu der Summe aller den sphärischen Sectoren PMm correspondirenden circulären Sectoren $\frac{\pi aa}{n} \sin \frac{1}{2}\omega^2$, d. i., die halbe Kugelfläche verhält sich zu der Summe der in den spiralischen Raum beschriebenen Kugelsectoren, wie der Quadrant des größten Kugelkreises zu der Summe der

in den Abschnitt über der Chorde des Quadranten beschriebenen Kreissectoren. Eben so verhält sich die halbe Kugelfläche zu der Summe aller um den spiralischen Raum beschriebenen Kugelsectoren wie der Quadrant des größten Kreises der Kugel zu der um den Abschnitt über der Chorde desselben beschriebenen Kreissectoren. Setzt man in diesen Proportionen statt der Größen im zweyten und vierten Gliede ihre Gränzen, so verhält sich die halbe Kugelfläche zu der spiralischen Area, wie der Quadrant des größten Kreises der Kugel zu dem Abschnitte über der Chorde des Quadranten. Nun ist die halbe Kugelfläche 8mal so groß, als der Quadrant des größten Kugelkreises, folglich auch die spiralische Area das Achtfache des Kreissegments, das die Chorde des Quadranten zur Grundlinie hat.

Der Hülfssatz, den Pappus zu der Auflösung der Aufgabe über die spiralische Area gebraucht, verdient in die Elementar=Geometrie aufgenommen zu werden. Die von Ferrarius angegebenen Circulartransversalen (Kästners astronomische Abhandl. Zweyte Sammlung, Seite 171) gründen sich auf den Satz. Hier folgt er, aber allgemeiner als ihn Pappus vorgetragen hat.

Es ist ABM (Fig. 42.) ein Kreisbogen mit dem Halbmesser CA beschrieben. Aus dem Puncte B des Umfanges werde mit der Chorde AB der Kreisbogen AN gezogen. Auf diesem nehme man zwey Puncte, D, E, und ziehe die Halbmesser BD, BE, welche den erstern Kreis in F, G schneiden: es ist AD:AE = AF:AG.

Denn es ist der W. ABD oder ABF halb so groß als der Winkel am Mittelpuncte, ACF, der mit ihm auf demselben Bogen AF steht, (Kreis, 19.), und der W. ABE = $\frac{1}{2}$ACG. Nun ist AD:AE = ABD:ABE, und AF:AG = ACF:ACG = 2ABD:2ABE. Also ist AD:AE = AF:AG.

Der Radius BH des Kreises AN treffe den AM in K jenseits B von A aus, so ist ebenfalls AD:AH = AF:AK. — Denn der Nebenwinkel ABK von ABH steht auf der Ergänzung des Bogens ABK zum Kreisumfange, und ist halb so groß als die Ergänzung von ACK zu vier Rechten. Die Ergänzung jenes zu zwey Rechten, oder der W. ABH ist also halb so groß als ACK. Nun ist AD:AH = ABD:ABH, und AF:AK = ACF:ACK = 2ABD:2ABH, also AD:AH = AF:AK.

Über diese Form von Curven verdienen noch besondere Abhandlungen angeführt zu werden.

Nouvelle formation de Spirales, beaucoup plus différentes entr' elles que tout ce qu' on peut imaginer d'autres Courbes quelconques à l'infini, par Varignon, Mém. de l'Acad. des Sciences, 1704.

V. setzt die Bogen auf dem Kreise den Ordinaten einer angenommenen krummen Linie proportional, und macht die Radios der Spirale den Abscissen dieser Linie gleich.

Sur la Spirale d'Archimede décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la Cycloide, par Clairaut, Mém. de l'Acad. des Sciences, 1740.

Ein Kreis rollt auf einer geraden Linie (in seiner Ebene) fort. Man sucht die Curve, die ein außer ihm befestigter Stift auf dessen Ebene beschreibt. Ist der Stift in der Höhe des Mittelpuncts befestigt, so ist die Curve eine archimedische Spirale.

Brendelius de analogia lineae spiralis et parabolae, Göttingae 1741. Ein Einladungsprogramm.

De lineis spiralibus specimen, ad disputandum proposuit F. C. Hausmann. Lipsiae 1790.

De spirali logarithmica, specimen academicum, auct. F. J. E. Schulz. Regiomonti, 1800.

Spirische Oberfläche ist diejenige des ringförmigen Körpers, welcher entsteht, wenn ein Kreis sich um eine in der Ebene desselben befindliche gerade Linie dreht, die nicht durch dessen Mittelpunct geht. Es sind drey Arten dieser Oberfläche. Denn die Axe der Drehung liegt entweder innerhalb des Kreises, oder berührt ihn, oder liegt ausserhalb desselben. Ein alter griechischer Geometer, Perseus, hat diese Oberfläche erdacht, und die Figuren ihrer Durchschnittslinien mit Ebenen untersucht. Proclus in seinem Commentar über das erste Buch des Euklides erwähnt ihrer verschiedentlich, pag. 64, 68, und sonst. Er führt einen Denkspruch (epigramma) an, das auf diese Linien von dem Erfinder derselben gemacht ist:

Tres lineas praeter quinque sectiones (ἐπι πεντε τομαις) cum invenisset
Perseus, harum causa Diis sacrificavit.

Die hier genannten fünf Schnitte, denen Perseus seine spirischen Linien hinzugethan hat, sind ohne Zweifel die Kegelschnitte, die Schnitte durch die Spitze und parallel der Grundfläche des Kegels mitgezählt. Man muß übrigens diese spirischen Linien nicht mit den Spiralen, wovon der vorhergehende Artikel handelt, vermengen, wie von einigen Geometern geschehen ist. Proclus macht dreyerley Formen derselben nahmhaft; eine verschlungene, in Gestalt unsrer Ziffer 8; eine, die in der Mitte breiter als an den Enden ist; und eine länglichte, an den Enden breiter als in der Mitte. In Montúcla's Geschichte der Mathematik, T. I. Pl. 10. der zweyten Ausgabe, sind sechs verschiedene Formen dieser krummen Linien gezeichnet. Da man in der Baukunst Tonnengewölbe um eine Spindel so führt, daß ihre Axe kreisförmig gebogen wird, so kommen die spirischen Oberflächen und Linien

in der Lehre vom Steinschnitt vor. Frezier Traité de Stereonomie T. I. p. 37. et 162; T. II. p. 409.

Es ist AEB (Fig. 43.) ein Halbkreis, dessen Mittelpunct C ist. Er wird um die auf den Durchmesser AB senkrechte DE gedreht, wodurch der Bogen AE die krumme Oberfläche eines Körpers beschreibt. Eine gleiche entsteht durch die Umdrehung des auf der andern Seite von dem Durchmesser AB befindlichen Halbkreises um die durch D auf AB senkrechte, der DE gleiche Ordinate.

Die Gleichung für diese krumme Oberfläche, zwischen drey senkrecht zusammen gestellten Ordinaten, zu finden, gedenke man sich eine auf die Ebene des Halbkreises AEB senkrechte durch AB gelegte Ebene AMDB (man biege die Zeichnung längs der AB rechtwinklicht), und nehme diese zu der festen Ebene zweyer Coordinaten, wie DN, NP. Durch den Anfang D der Ordinaten DN und den Endpunct P der NP ziehe man die gerade DPM, und stelle das Kreis-Segment AED, durch die Drehung um DE, über DM. Nimmt man auf AB von D aus dem Theil $DQ = DP$, so ist die auf AB, in der Ebene AEB, durch Q senkrechte QR die zu den beiden DN, NP gehörige, auf ihre Ebene durch P senkrechte, dritte Coordinate für die krumme Oberfläche. So läßt sich für jeden Punct der Grundfläche AMDB, welche das Segment DA des Durchmessers AB beschreibt, der zugehörige Punct der krummen Oberfläche angeben.

Es sey der Halbmesser $AC = a$, der Abstand CD der Drehungsaxe DE von $C = b$; die drey Coordinaten, $DN = x$; $NP = y$; $QR = z$. Es ist $DP = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, oder zur Abkürzung, $DP = u$. Da $BD = a - b$ ist, so ist $BQ = a - b + u$, und $AQ = a + b - u$. Es ist $QR^2 = AQ \times QB$, (Kreis, 28), das ist

$$z^2 = (a + b - u)\ (a - b + u), \text{ oder}$$

$$z^2 = a^2 - (u - b)^2, \text{ und}$$
$$z^2 + u^2 - a^2 + b^2 = 2bu.$$

Für u den Werth zurückgesetzt, ist

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + b^2 = 2b\sqrt{(x^2 + y^2)},$$

die Gleichung für die spirische Oberfläche, welche vom vierten Grade ist, da bey der Entwickelung, durch Quadrirung auf beiden Seiten, die veränderlichen Größen auf die vierte Potenz steigen. Sie ist

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2$$
$$- 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2b^2(x^2 + y^2 - z^2)$$
$$+ (a^2 - b^2) = 0.$$

Zur Erfindung der Gleichung ist es gleichgültig, ob b so wie in der Figur, das ist, positiv, oder negativ, zwischen C und A, genommen wird. Das letztere ist der Fall, wenn man die durch die Drehung von BE um DE erzeugte Oberfläche betrachtet. Ist die in B den Kreis berührende die Drehungsaxe, so ist $b = a$, und die Gleichung ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{(x^2 + y^2)},$$

Wenn die Drehungsaxe ausserhalb des Kreises liegt, oder D über B hinausgenommen wird, so bleibt die Rechnung ganz dieselbe. Es ist alsdann $BQ = u - (b - a) = u + a - b$.

Die Gleichung vom vierten Grade ist hier eine vom zweyten für die Quadrate der Coordinaten. Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichungen sind nicht blos mögliche Größen, sondern haben auch positive Werthe. Das Quadrat der Ordinate z, welche mit der Drehungsaxe parallel ist, bekommt nur einen möglichen Werth. Denn diese wird durch eine reine quadratische Gleichung, bestimmt, nämlich $z^2 = a^2 - (u - b)^2$, oder welches dasselbe ist, $z^2 = a^2 - (b - u)^2$. Die Entstehungsart des Körpers zeigt auch, daß die mit der Drehungsaxe parallele Ordinate

nur zwey gleiche, sich entgegengesetzte Werthe haben kann. Aber x^2 und y^2 können jedes zwey verschiedene Werthe erhalten, die Ordinaten selbst vier, von welchen zwey und zwey sich gleich, aber entgegengesetzt sind. Man setze durch die Drehungsaxe eine Ebene senkrecht auf die Ebene des Halbkreises AEB, und nehme in dieser die Ordinaten y und z, die letztern auf DE von D an, die y durch ihren Endpunct senkrecht auf DE. Die Ordinate x ist auf die Ebene der y und z senkrecht, oder der Ebene AEB parallel in dem Abstande y, wie es vorher z war. Ist z kleiner als DE, (in dem Falle der Figur), so trifft die Ordinate x die Oberfläche des Körpers nur zweymahl, und x hat nur zwey mögliche, entgegengesetzte Werthe. Ist z größer als DE, doch kleiner als der Halbmesser des erzeugenden Kreises, so trifft die Ordinate x die Oberfläche viermahl. In dem Falle, da DE ausserhalb des erzeugenden Kreises fällt, hat x immer vier mögliche Werthe, wenn y und z mögliche Ordinaten sind. — Nimmt man die Coordinaten x und z in der Ebene des Halbkreises AEB, jene auf AB von D aus, diese durch den Endpunct von x auf AB senkrecht, und die y durch den Endpunct der z senkrecht auf AEB, so verhält es sich mit den y wie vorher mit den x. Die Ebene AEB ist nun was vorher die durch DE auf sie senkrecht gestellte. Die Durchschnitte des Körpers mit Ebenen durch die Drehungsaxe sind sich alle gleich.

Man wird sich dieses deutlicher machen, wenn man das Kreisstück AEDA auch auf die andere Seite von DE zeichnet, und die drey Fälle der Drehung jeden nimmt. Der hier betrachtete Körper mag, als ein gutes Beyspiel der Anwendung der Rechnung auf die Geometrie der Oberflächen, Aufmerksamkeit verdienen. Man vergleiche noch in dem Artikel, krumme Fläche den Abschnitt §. 38 — 48. — In Montúcla's Geschichte der Mathematik, Th. III. S. 92 ist ein Beyspiel zur Berechnung eines Durchschnittes des Kör-

pers gegeben, der durch die Umdrehung eines Kreises um eine berührende entsteht. In der Gleichung muß aber statt $+ \frac{9}{2} r^2 y^2$ und $\frac{3}{4} r^4$ gesetzt werden $- \frac{7}{2} r^2 y^2$ und $\frac{15}{16} r^4$. Die Folgerungen bleiben dennoch richtig.

Spitz (acutus) heißt ein Winkel zweyer geraden Linien, der kleiner als ein rechter ist; ein Winkel zweyer krummen, wo der Winkel der berührenden geraden an dem Durchschnittspuncte ein solcher ist.

Spitze eines ebenen Winkels ist der Punct, in welchem die geraden Linien, die ihn bilden, sich schneiden.

Spitze eines Kegels ist der Punct, in welchem die Seiten desselben zusammen kommen.

Spitze (cuspis) **an einer krummen Linie** ist ein Punct, worin zwey Zweige an einer gemeinschaftlichen Berührenden geraden zusammenlaufen und sich daselbst endigen. Ein solcher ist an der Cissoide, an der Parabola semicubica, (s. Parabeln höherer Art), an der Conchoide. Ein Knoten an einer krummen Linie, in welchem sich zwey zusammenhängende Zweige derselben schneiden, geht in eine Spitze über, wenn die rundliche Figur, die sie neben dem Durchschnittspuncte bilden, sich in einen einzigen Punct zusammenzieht.

Springer auf dem Schachbrette, wie er von einem gegebenen Felde durch alle übrigen geführt werden möge ohne irgend eines zweymahl zu treffen, ist eine Aufgabe aus der Analysis der Lage. Sie scheint vielleicht eine bloße Spielerey, und ist auch nur in so fern merkwürdig, als man bey ihrer Auflösung nach Gründen verfahren, und eine Art von Rechnung dabey anwenden kann, deren sie anfangs nicht fähig zu seyn scheint. Nicht sie an sich selbst, sondern die Kunst der Auflösung ist es, warum der Mathematiker wichtigere Untersuchungen durch sie unterbricht.

Euler hat die Aufgabe nicht unwerth gefunden, sich mit ihr zu beschäftigen, und hat über sie eine Auflösung in den Mémoires de l'Academie de Berlin, Tom. XV, année 1759, geliefert, worin er sie selbst durch hinzugefügte Bedingungen schwerer macht. In einer Gesellschaft ward sie von jemanden vorgetragen, der versicherte, daß er sie auflösen könnte, man möchte ihm, welches Feld es sey, vorgeben, um darauf anzufangen, es auch leistete. Euler fand nach vielen Versuchen einen Gang, der Genüge that, aber nur diesen. Allein es müssen bestimmte und sichere Vorschriften zur Auflösung in jedem Falle geliefert werden. Euler ist dazu auf einem ganz besondern Wege gekommen, worauf Bertrand aus Genf ihn geleitet hat. Das Verfahren verdient desto mehr bemerkt zu werden, weil es von einer ganz besondern Art ist. Ehe ich davon, so gut es möglich ist, einen Begriff gebe, will ich eine artige symmetrische Anordnung des Ganges für den Springer darstellen, welche ich aus einer kleinen Schrift: Solution du probleme du Cavalier au jeu des echecs, par Mr. C*** (Colini), à Mannheim, 1773. 8. (60. pag), genommen habe, mit unwesentlichen Abänderungen, um den Gang des Springers deutlicher zu machen.

1. Man sondere innerhalb des Schachbrettes ein Quadrat von 16 Feldern gleichförmig ab, so daß ringsherum eine Einfassung von zwey Streifen bleibe. In je zwey neben einander liegenden Streifen kann der Springer 4 Schritte, und in der ganzen Einfassung 12 Schritte thun, und nach jeden 12 Schritten bleibt ein Gang in das Viereck frey. In diesem kann er je 4 Schritte thun, und nach je 4 Schritten bleibt ein Gang in der Einfassung frey. Auf solche Art wird der Springer durch alle 64 Felder geführt, ohne je eines zweymahl zu treffen. Es läßt sich dieses auf mancherley Weise bewerkstelligen. Hier folgt eine Anordnung, welche die meiste Symmetrie gewähren wird.

D C

36	23	54	9	38	21	56	7
53	10	37	22	55	8	39	20
24	35	14	63	30	47	6	57
11	52	31	46	15	64	19	40
34	25	62	13	48	29	58	5
51	12	45	32	61	16	41	18
26	33	2	49	28	43	4	59
1	50	27	44	3	60	17	42

A B

Die Zahlen 1...12 und 17...28, folgen nach der Ordnung der Ecken ABCD auf einander, die Zahlen 33...44, und 49...60, nach der entgegengesetzten Ordnung ADCB. In dem innern Viereck folgen allein die Zahlen 29...32 nach der Ordnung ABCD. Die Zahlen in den Feldern des innern Quadrats bilden recht symmetrisch je vier, theils ein rechtwinklichtes, theils ein verschobenes gleichseitiges Viereck. Man bemerke auch noch, welche Zahlen in die Diagonalen AC, BD, fallen.

2. Der Verfasser der angeführten Schrift fügt noch einige Behandlungen der Aufgabe bey, wenn sie durch gewisse Bedingungen erschwert wird. Seine Auflösungen sind aber blos empirisch, nur auf den hier beschriebenen Gang des Springers gegründet, ohne mathematische Hülfsmittel. Euler gebraucht hier, wie es von ihm zu erwarten ist, ein eigenes, der Aufgabe angemessenes Verfahren, um sie selbst mit sehr erschwerenden Bedingungen aufzulösen. Einiges, was sich davon in der Kürze erklären läßt, mag hier, wegen der Besonderheit der Untersuchung, Platz finden.

3. Zuerst bemerkt Euler, daß, wenn der Aufgabe auf irgend eine Art Genüge geschehen ist, daraus

noch mancherley Abänderungen des Ganges hergeleitet werden können. Von einem Felde, aus welchem bis zu dem letzten dem Springer ein Schritt gestattet ist, läßt sich die Folge der Felder umkehren. In unserm Exempel (1) sind unter andern solche Felder, 13 und 41. Man bezeichne die Felder des Schachbrettes durch die in jenem Exempel darin gesetzten Zahlen, deren natürliche Folge also den darin angenommenen Gang des Springers angiebt, so entstehen aus dem ursprünglichen Gange,

1 . . . 13 . . . 41 64,

solchergestalt die neuen:

1 . . . 13 . 64 . . . . 14, und

1 . . . 41 . 64 . . . . 42.

Denn der Springer kann denselben Weg, den er von einem Felde an bis zu dem letzten genommen hat, auch in entgegengesetzter Richtung machen, der umgekehrte Weg muß sich nur an den vorhergehenden anschließen können. Da das Anfangsglied der Zahlenreihe auch als das Schlußglied angesehen werden kann, so läßt sich der ursprüngliche Gang des Springers auch in folgenden abändern:

11 . . . 1 . 12 . . . . 64.

Es ist nämlich aus 1 in 12 ein Schritt gestattet.

4. Aus einer abgeänderten Folge lassen sich durch Versetzung jedes der äußersten Glieder wieder neue herleiten. Aus der Folge,

1 . . . 13 . 64 . . . 14,

entsteht, da 14 sich an 25 schließt, die neue,

1 . . . 13 . 64 . . . 25 . 14 . . . 24.

Die Zahl 24 schließt sich an 37; daher entsteht aus dieser die neue,

1 . . 13 . 64 . . 37 . 24 . . 14 . 25 . . 36.

Da 14 sich an 11 schließt, so giebt die Folge,

1 . . . 13 . 64 . . . 14,

die neue,

1 . . 11 . 14 . . . 64 . 13 . 12.,

welche zugleich eine in sich wiederkehrende ist.

5. Durch Versetzungen dieser Art kann man das letzte (oder das erste) Feld des Springers irgend wohin verlegen. Man bemerke nur, daß wegen des Umkehrens die letzte Zahl der neuen Folge um Eins größer oder kleiner ist als die Zahl, womit die letzte Zahl in der vorhergehenden Folge zusammen hängt. Z. B. das Schlußfeld sollte irgendwohin, als in 32, fallen. Es ist:

A. 1 . . . 13 . . . 64.
B. 1 . . 13 . 64 . . . 14.
C. 1 . . 9 . 14 . . . 64 . 13 . . 10.
D. 1 . . 9 . 14 . . 31 . 10 . . 13 . 64 . . . 32,

womit der Forderung ein Genüge geschehen ist. In andern Fällen mag man den ursprünglichen Gang des Springers öfter unterbrechen müssen, als es hier nöthig war, gerade bey einem zufällig gewählten Schlußfelde.

6. Durch eben dieses Mittel kann ein gegebener Gang in einen zusammenhängenden, in sich wiederkehrenden, bey welchem der Springer von irgend einem gegebenen Felde ausgehen kann, verwandelt werden. Denn hier sind durch das Anfangsfeld die Schlußfelder bestimmt, deren es, nach der Lage jenes, sieben, fünf, drey oder eines giebt.

7. Euler begnügt sich aber nicht damit. Diesen Weg, der noch immer zu viel empirisches hat, angewiesen zu haben; er zeigt auch einen ganz sichern bestimmten, bey dem er das vorher gebrauchte Verfahren der Verwandlung einer gegebenen Reihe benutzt. Es ist eine ganz besondere Art von Analysis unbestimmter Größen. Manchen, welchen die große Sammlung der Berlinischen akademischen Schriften nicht zur Hand ist, möchte es angenehm seyn, davon einen Begriff zu erhalten, welchen ich hier zu geben versuchen will, indem ich zugleich eine oder die andere Erläuterung beyfüge.

8. Unser allgemeine Analyst führt von irgend einem Anfangsfelde den Springer so weit als es angeht, und füllt die leer gebliebenen Felder mit Buchstaben aus, wie in der folgenden Anordnung des Ganges

34	21	54	9	32	19	48	7
55	10	33	20	53	8	31	18
22	35	62	a	40	49	6	47
11	56	41	50	59	52	17	30
36	23	58	61	42	39	46	5
57	12	25	38	51	60	29	16
24	37	2	43	14	27	4	45
1	b	13	26	3	44	15	28

Die Folge der Felder von 1 bis 62, durch welche der Springer geführt ist, kann man eben so wie vorher die Folge von 1 bis 64 in eine andere verwandeln, in welcher das letzte Feld ein gegebenes ist. Dieses lasse man ein solches seyn, aus welchem der Springer in das Feld a (oder b) übergehen kann. Zu dieser umgewandelten Folge läßt sich nun das Feld a (oder b) setzen, so erhält man eine Folge von 63 Feldern. Mit dieser verfahre man auf gleiche Art, indem man sie in eine andere umwandelt, in welcher das letzte Feld einen Übergang in b (oder a) gestattet. Dieses zu der Folge gesetzt, ist der Springer durch alle 64 Felder geführt. — Wären mehr als zwey Felder leer geblieben, so würde man dieses Verfahren wiederholen, bis daß man zu dem letzten gelangt ist.

9. In unserm Beyspiele ist 10 ein Feld, welches sich an a schließt, dem Gange des Springers gemäß. In der Folge, 1 . . . . 62, ist 9 ein Feld, welches sich an 10 und zugleich an 62 schließt. Daher kann man sie in diese,

A. 1 . . . 9 . 62 10,

umwandeln, welcher man das Feld a anhängen darf. Die vergrößerte Folge von Feldern ist nun,

B. 1 . . . 9 . 62 . . . . . 10 . a.

Diese wandle man nun in eine solche um, an welche sich das Feld b hängen läßt. Man suche zwey Felder, eines für a, das andere für b beschreitbar, deren Zahl um 1 unterschieden sind. Nur muß, wofern die Zahl für b in die Reihe 62....10 fällt, die Zahl für a die größere seyn, weil die Reihe von 62 an eine fallende ist. Zwey solche Zahlen sind 58 und 57. Nun wandle man die letztere Folge in diese um:

C. 1 . . . 9 . 62 . . . 58 . a . 10 . . . . 57.

Dieser darf man das durch b bezeichnete Feld zusetzen, und die vollständige Folge aller Felder, dem Gange des Springers gemäß, ist

D. 1 . . . 9 . 62 . . . 58 . a . 10 . . . . 57 . b.

Bezeichnet man die Felder nach der natürlichen Ordnung der Zahlen, so hat man diesen durch die Folge,

E. 1 . . . 9 . 10 . . . 14 . 15 . 16 . . . 63 . 64, bezeichneten Gang.

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	4	11	48	45	52	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	21	34

10. Wenn a und b nicht durch zwey Felder, wie hier durch 58 und 57, verbunden werden könnten, so müßte man die Reihe B in eine andere umwandeln, deren Endzahl mit b auf solche Art verbunden werden könnte.

Eine

Eine andere Art, wie alle Felder nach der Bezeichnung in (8) beschritten werden können, ist

A. 1 . . . 53 . 62 . . . 54 . a;
B. 1 . . . 53 . 62 . . . 58 . a . 54 . . . 57 . b.

Noch eine ist

A. 1 . . . 55 . 62 . . 56 . a;
B. 1 . . . 55 . 62 . . 58 . a . 56 . 57 . b,

welche nun wieder durch die natürliche Zahlenordnung dargestellt werden können.

11. Euler verwandelt hierauf etwas mühsam die Folge E in (9) in verschiedene Folgen, die in sich zurücklaufen.

Da er so weit der Aufgabe Meister war, machte er sie durch hinzugefügte Bedingungen schwerer. Eine solche ist, daß die Zahlen in Feldern, welche in Absicht auf die entgegengesetzten Ecken des Vierecks einerley Lage haben, denselben Unterschied, welcher 32 ist, haben sollen. Euler setzt die Zahlen 1, 33; 2, 34; 3, 35; u. s. f. auch die 64, 32; 63, 31; 62, 30, u. s. f. gehörig in die Felder, so weit es thunlich ist; in die leer gebliebenen Felder setzt er schicklich gewählte Buchstaben, welche nach einander auf ähnliche Art an die umgewandelten Folgen angehängt werden, wie vorher die Buchstaben a und b. So entstehen zwey zusammen gehörige, aus Zahlen und Buchstaben gemischte Folgen, von deren einer noch das Ende mit dem Anfange der andern zusammenhängend gemacht werden muß. Die Werthe der durch Buchstaben bezeichneten Zahlen werden nun durch ihre Stellen in der ganzen Folge bestimmt, da das erste Glied Eins genannt wird.

12. Eine neue Bedingung ist, daß zugleich die durch 1 bis 32 bezeichneten Felder alle in der einen Hälfte des Vierecks, die von 33 bis 64 in der andern sich finden sollen. Die beiden Hälften seyn durch eine mit der einen Seite des Vierecks Parallele geschieden.

13. Euler betrachtet noch ein Quadrat von 25 Feldern, um daran, da es kleiner ist, die Menge der Abänderungen des Ganges, den der Springer nehmen mag, zu zeigen. Darauf giebt er noch einige Beyspiele, in welchen statt eines Quadrats ein ungleichseitiges Rechteck genommen ist. Zuletzt bemerkt er, daß die Aufgabe auch für andere Figuren als Rechtecke Statt finde. Die Figuren in den dazu gegebenen Beyspielen entstehen aus Quadraten, in welchen die Eckfelder weggeschnitten sind; eine bildet ein gleicharmiges Kreuz von 20 Feldern. Der Gang des Springers in diesen Figuren ist zugleich wiederkehrend.

14. Vandermonde, ehemahliges Mitglied des französischen National Instituts, vorher der Akademie der Wissenschaften (geboren zu Paris, 1735, gestorben im 4ten Jahre der Rep.), hat sich in den Mém. de Paris für 1771 auch mit dieser Aufgabe, als eines Falles für die Geometrie der Lage, beschäftigt, und solche vornehmlich durch eine schickliche Bezeichnung der Felder des Schachbretts, wobey jedes Feld durch zwey Zahlen, welche anzeigen, das wie vielte es in horizontaler und verticaler Richtung ist, angedeutet wird, zu einer bloßen Sache des Calcüls zu machen gesucht, da Eulers Behandlung der Aufgabe voraussetzt, daß man das Schachbrett vor Augen habe.

15. In den Miscellaneis Berolinensibus, 1710, ist ein Aufsatz von Leibnitz enthalten: Annotatio de quibusdam ludis, inprimis de Ludo quodam Sinico, cet. Er erwähnt darin des zu seiner Zeit bekannt gewordenen, Solitaire genannten, einsiedlerischen Spiels, und schlägt eine Abänderung desselben vor, bey welcher man nach geometrischen Gründen möchte verfahren können. Zu jenem Spiele dient eine Tafel, die eine Anzahl Löcher enthält, in welche, bis auf eines, Pflöckchen gesteckt worden. Diese sind eins nach dem andern herauszunehmen, welches geschieht, wenn neben jenem ein Loch offen ist, in welches ein Nach-

bar über ihn hin springen kann, auf ähnliche Art, wie in dem Damenspiele ein Stein genommen wird. Es muß zuletzt nur ein einziges Pflöckchen übrig bleiben. Die Abänderung, die Leibnitz vorschlägt, besteht in einer Umkehrung. Die Tafel werde ganz leer gelassen. In eines der Löcher wird ein Pflöckchen gesteckt; nach diesem werden die übrigen auf eben die Art gesteckt, wie sie vorher herausgenommen wurden. So soll die ganze Tafel angefüllt werden, oder, welches noch künstlicher seyn möchte, es soll durch die Pflöckchen eine gegebene Figur, als ein Dreyeck, Viereck, Achteck, hervorgebracht werden, wofern es möglich ist. Atque hoc ipsum, setzt L. hinzu, magnae artis esset praevidere quid praestari posset; haberetque aliquid inprimis Geometricum hic processus. Sed ego ad profectum inventricis artis ludendi artificia detexisse, non ludum valde exercuisse laudarem.

Stereographische Projection ist eine perspectivische Entwerfung der Kugelfläche auf die Ebene eines ihrer größten Kreise, nach dessen einem Pole, als dem Orte des Auges, die Entwerfungslinie gezogen werden.

1. Es sey ANBO (Fig. 44) ein größter Kreis der Kugel, C der Mittelpunct, AB, ON zwey auf einander senkrechte Durchmesser desselben. Das Auge befinde sich in O, so fällt AB in die Tafel *), und die Projection eines Punctes F auf dem Kreise ANBO ist der Punct P, der AB, in welchem sie von der OF geschnitten wird.

2. Man setze den Abstand des Punctes F von dem dem Auge entgegengesetzten Pole N des größten in die Tafel fallenden Kreises, welcher kurz der Grundkreis heißen kann, das ist, der Bogen NF = g, den Halbmesser der

*) Wenn Entwerfungslinie die gerade vom Auge nach einem zu entwerfenden Puncte bezeichnet, so ist Entwerfungsebene die Ebene durch's Auge und eine zu entwerfende gerade; also nicht mit Tafel einerley. Diese ist die Ebene des Entwurfs, der Projection oder die Projectionsebene.

Kugel CA = CN = r. Da COP = ½ NCF, so ist CP = r tang ½ g. Für g = o ist CP = o, oder die Projection von N fällt in C. Wird F an der andern Seite von ON, nach A zu, genommen, so ist g, so wie CP negativ, und P fällt in CA. Für Puncte in dem Halbkreise des Auges AOB ist g > 90° und CP > r, ihre Projectionen fallen also außerhalb des Grundkreises.

3. Die Projection eines Kreises, welcher durch das Auge geht, ist eine gerade Linie, der Durchschnitt nämlich der Tafel mit der Ebene des Kreises. Ist der Kreis ein größter, wie ANBO, dessen Ebene also senkrecht auf die Tafel ist, so ist seine Projection der zu beiden Seiten verlängerte Durchmesser des Grundkreises AB, in welchem dieser von jenem geschnitten wird. Nämlich der Durchmesser AB selbst ist die Projection des Halbkreises ANB, seine Verlängerungen zu beiden Seiten aber sind die Projectionen der Quadranten OA, OB. (2).

4. Es sey F die Mitte des Bogens DE, so ist die Sehne DE zugleich der Durchmesser eines nicht durch das Auge gehenden Kugelkreises, dessen einer Pol F ist, und dessen halber Umfang DIE sey. Die Projection dieses Kreises ist der Durchschnitt der Tafel mit dem Kegel, dessen Spitze O, Grundfläche der Kreis DIE ist, und in dessen Seitenfläche alle von O nach dem Umfange des Kreises DIED gezogene Entwerfungslinien liegen, die Projection des Durchmessers DE aber ist das Stück GH der AB, welches OD, OE zwischen sich abschneiden. Da der Winkel OGH als Complement von GOC zu seinem Maße den Quadranten AN weniger den halben Bogen ND, das ist, die Hälfte des Bogens DAO hat, eben diese Hälfte aber auch das Maß des Winkels DEO ist, so ist OGH = DEO, und aus gleichen Gründen, oder weil die Dreyecke OGH, ODE wegen des gemeinschaftlichen Winkels O und der gleichen Winkel OGH, DEO ähnlich sind, GHO = ODE, folglich GH und DE antiparallel. Nun sind die Ebene des Kreises DIE oder die

Grundfläche des Kegels und die Ebene des Schnitts oder die Tafel senkrecht auf die Ebene des Dreyecks ODE, in welcher die Axe des Kegels liegt, folglich ist der Schnitt des Kegels mit der Tafel ein Wechselschnitt desselben (Kegel, 9.), mithin ein Kreis vom Durchmesser GH. (das. 8).

Jeder nicht durch das Auge gehende Kugelkreis wird also in einen Kreis projicirt, dessen Durchmesser in den Durchschnitt der Tafel mit demjenigen größten Kreise der Kugel fällt, welcher durch die Pole des Grundkreises und des projicirten Kreises geht.

5. Wird der Abstand der Puncte des Kugelkreises DIE von dem Pole F, der Bogen DF oder FE $= u$ gesetzt, so ist $DN = u - g$, $NE = u + g$, also $CG = r \tang \frac{1}{2}(u - g)$, $CH = r \tang \frac{1}{2}(u + g)$, und $GH = r(\tang \frac{1}{2}(u - g) + \tang \frac{1}{2}(u + g))$
$= \frac{r(\sin u - \sin g) + r(\sin u + \sin g)}{\cos g + \cos u}$ (Goniometrie, 30.) $= \frac{2 r \sin u}{\cos g + \cos u}$. Der Halbmesser der Projection ist also $= \frac{r \sin u}{\cos g + \cos u}$, und der Abstand des Mittelpuncts derselben von C, dem Mittelpuncte des Grundkreises, $= \frac{r(\sin u + \sin g) - r \sin u}{\cos g + \cos u}$
$= \frac{r \sin g}{\cos g + \cos u}$. Fällt F in N, so daß der entworfene Kreis dem Grundkreise parallel ist, so ist $g = 0$, der Mittelpunct der Projection fällt in C, und der Halbmesser derselben ist $= \frac{r \sin u}{1 + \cos u} = r \tang \frac{1}{2} u$ (Goniometrie, 38). In diesem Falle nämlich ist der Kegel ODIE gerade, und der Schnitt desselben mit der Tafel der Grundfläche parallel.

6. Für einen größten Kreis ist in (5) $u = 90°$, folglich der Halbmesser der Projection desselben $= \frac{r}{\cos g} = r \sec g$, der Abstand des Mittelpuncts der Projection von C aber $= \frac{r \sin g}{\cos g} = r \tang g$.

7. Setzt man $u = 0$, so giebt dies die Projection des Pols F, deren Abstand von $C = \frac{r \sin g}{1 + \cos g} = r \tang \frac{1}{2} g$, wie in (2), ist. Für die Projection des dem Auge näheren Pols f ist $u = 180°$, also der Abstand derselben von $C = \frac{r \sin g}{\cos g - 1} = - r \cot \frac{1}{2} g$, wo die Negation anzeigt, daß die Projection an die entgegengesetzte Seite von C oder in die verlängerte CA fällt.

8. Analytisch erhält man die Resultate in (4) und (5) so. Der Kreis ASBR (Fig. 45) um den Mittelpunct C sey der Grundkreis, die Durchmesser AB, RS desselben seyn die Durchschnitte zweyer durch seine Pole geführten größten Kreise, und auf ihnen P und M die Projectionen zweyer auf diesen Kreisen befindlichen Puncte der Kugelfläche F und W *), deren Abstände von dem Pole N (Fig. 44) g und v sind. Es ist demnach $CP = r \tang \frac{1}{2} g$, $CM = r \tang \frac{1}{2} v$. Der Winkel SCB, welcher dem Winkel der beiden Kreise auf der Kugel FNW gleich ist, sey φ. Man nehme AB zur Abscissenaxe, und beziehe darauf die Lage der Puncte, wie M, durch die senkrechten Coordinaten $CQ = x$, $QM = y$, so ist

$$x = r \tang \frac{1}{2} v \cos \varphi = \frac{r \sin v \cos \varphi}{1 + \cos v}$$

*) Man wird sich die nöthigen Linien und Puncte, welche in der Zeichnung weggelassen sind, nach Anleitung von Fig. 44 leicht vorstellen.

$$y = r \tang \tfrac{1}{2} v \sin \varphi = \frac{r \sin v \sin \varphi}{1 + \cos v}.$$

9. Anstatt die Lage des Punctes W auf der Kugel gegen den größten über AB senkrechten Kreis durch den Bogen NW und Winkel WNF zu bestimmen, werde solche jetzt durch den Bogen FW des größten durch F, W geführten Kreises und den Winkel NFW bestimmt. Jener heiße u, dieser ω. Das sphärische Dreyeck FNW, in welchem $NF = g$, $NW = v$, $FNW = \varphi$, ist, giebt die Gleichungen

$$\sin v \sin \varphi = \sin u \sin \omega$$

$$\cot \varphi = \frac{\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos \omega}{\sin u \sin \omega}$$

$$\cos v = \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega.$$

Durch Multiplication der beiden ersten entsteht

$$\sin v \cos \varphi = \sin g \cos u - \cos g \sin u \cos \omega$$

Dadurch und durch die dritte Gleichung wird in (8)

$$x = \frac{r(\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos \omega)}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega}$$

$$y = \frac{r \sin u \sin \omega}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega}.$$

Um nun die Gleichung für den Ort, auf welchen die Projectionen aller Puncte liegen, welche von F einerley Abstand u haben, das ist, die Gleichung für die Projection eines Kreises, dessen einer Pol F ist, zu finden, muß man die eben gefundenen Ausdrücke für die Coordinaten x, y so mit einander verbinden, daß der veränderliche Winkel ω herausgeht. Zu dem Ende suche man $\cos \omega$ durch x. Es ist

$$\cos \omega = \frac{r \sin g \cos u - x(1 + \cos g \cos u)}{r \cos g \sin u + x \sin g \sin u}.$$

Nun ist

$$xx + yy = rr\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{rr(1 - \cos v)}{1 + \cos v} \quad (8)$$

woraus

$$\frac{rr - xx - yy}{rr + xx + yy} = \cos v = \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos\omega$$

wird. Substituirt man hier den gefundenen Werth von $\cos\omega$, so wird erhalten

$$\frac{rr - xx - yy}{rr + xx + yy} = \frac{r\cos u - x\sin g}{r\cos g + x\sin g}$$

und wenn man jeden dieser Brüche besonders von 1 abzieht und auch dazu addirt, und die Differenz durch die Summe dividirt

$$\frac{xx + yy}{rr} = \frac{r(\cos g - \cos u) + 2x\sin g}{r(\cos g + \cos u)}$$

woraus

$$yy + xx - \frac{2rx\sin g}{\cos g + \cos u} = \frac{rr(\cos g - \cos u)}{\cos g + \cos u}$$

oder

$$y^2 + \left(x - \frac{r\sin g}{\cos g + \cos u}\right)^2 = \left(\frac{r\sin u}{\cos g + \cos u}\right)^2$$

wird, welches die Gleichung für den gesuchten Ort ist.

Sie gilt für einen Kreis vom Halbmesser $\frac{r\sin u}{\cos g + \cos u}$, dessen Mittelpunct in AB fällt und von C um die Größe $\frac{r\sin g}{\cos g + \cos u}$ absteht.

10. Für einen durchs Auge gehenden (kleineren) Kreis ist $u = 180° - g$, also $\cos u = -\cos g$, und $\cos g + \cos u = 0$. Daher wird

$$-2rx\sin g = 2rr\cos g$$

oder $x = -r\cot g$

welches die Gleichung für eine gerade auf AB senkrechte Linie in dem Abstande $r \cot g$ von C nach A zu ist, übereinstimmig mit (3). Für Kreise, die noch näher an den dem Auge nächsten Pol f fallen, als der nur betrachtete, ist $u = 180° - g + t$ wo $t < g$ ist, also $\cos u = -\cos(g - t)$, folglich der Halbmesser der Projection $= \frac{r \sin(g - t)}{\cos g - \cos(g - t)}$, und der Abstand ihres Mittelpuncts von $C = \frac{r \sin g}{\cos g - \cos(g - t)}$. Beide Größen werden, als Stücke des negativen Theils der Abscissenlinie CA, negativ. Die Negation des Halbmessers kommt nicht in Betracht, sondern nur die absolute Größe desselben.

11. Obgleich durch (9) schon erwiesen ist, was erwiesen werden sollte, daß nämlich die Projection eines Kreises wieder ein Kreis ist, so wird es doch nicht unnütz seyn, noch die Gleichung für die Projection eines größten durch F gehenden Kreises zu suchen. Zu dem Ende muß der veränderliche Bogen u aus den Gleichungen für x und y in (9) eliminirt werden, indem für einen und denselben Kreis ω unveränderlich ist.

Da

$$\frac{xx + yy}{rr} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}$$

$$= \frac{1 - \cos g \cos u - \sin g \sin u \cos \omega}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega}$$

so wird

$$\frac{rr - xx - yy}{rr} = \frac{2(\cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega)}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega}.$$

Nun ist

$$\frac{r \sin g}{2x \cos g} = \frac{(1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega) \sin g}{2(\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos \omega) \cos g}$$

folglich durch Multiplication

$$\frac{(rr - xx - yy) \sin g}{2 r x \cos g}$$

$$= \frac{\sin g \cos g \cos u + \sin g^2 \sin u \cos \omega}{\sin g \cos g \cos u - \cos g^2 \sin u \cos \omega}$$

und hieraus

$$\frac{2\, rx \cos g}{(rr - xx - yy) \sin g - 2\, rx \cos g}$$
$$= \frac{\sin g \cos g \cos u - \cos g^2 \sin u \cos \omega}{\sin u \cos \omega}$$

oder

$$\frac{2\, rx \cos \omega}{(rr - xx - yy) \sin g - 2\, rx \cos g}$$
$$= \frac{\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos \omega}{\sin u} = \frac{x \sin \omega}{y}$$

woraus man erhält

$$yy + xx + 2\, ry \operatorname{cosec} g \cot \omega + 2\, rx \cot g = rr$$

oder

$$(y + r \operatorname{cosec} g \cot \omega)^2 + (x + r \cot g)^2 = (r \operatorname{cosec} g \operatorname{cosec} \omega)^2$$

welche Gleichung einem Kreise angehört, für welchen die Abscisse des Mittelpuncts $= - r \cot g$, die Ordinate $= - r \operatorname{cosec} g \cot \omega$ und der Halbmesser $= r \operatorname{cosec} g \times \operatorname{cosec} \omega$ ist. Da die Abscisse des Mittelpuncts blos von g abhängt, so liegen die Mittelpuncte aller Kreise, welche Projectionen größter durch den Punct F auf der Kugel gehender Kreise sind, in einer geraden auf AB senkrechten Linie. Dies erhellt auch daraus, daß alle diese Kreise die Projection des Durchmessers Ff, welche in AB fällt, zur gemeinschaftlichen Sehne haben.

12. Geht der größte Kreis durch N oder ist er auf dem Grundkreise senkrecht, so ist $g = 0$, indem F in N fällt, wodurch φ der Nebenwinkel zu ω wird, und es ist die Gleichung für die Projection

$$y + x \tan g \omega = 0$$

welche einer geraden Linie angehört, die durch den Anfang der Abscissen C geht, und die Abscissenaxe an der

Seite der positiven Absc ssen und Ordinaten unter dem Winkel $180^\circ - \omega = \varphi$ schneidet.

Ist $\omega = 0$, so wird $y = 0$, die Gleichung für die unbestimmt zu beiden Seiten verlängerte AB selbst, welche die Projection des Kreises ANBO ist (3).

13. Es sey L (Fig. 45) der Mittelpunct eines nach (11) entworfenen Kreises, LK senkrecht auf AB, so daß $CK = r \cot g$, $KL = r \operatorname{cosec} g \cot \omega$, so ist $PK = r(\cot g + \cot \frac{1}{2} g) = r \operatorname{cosec} g$ (Goniometrie, 50.) also $\tan KLP = \frac{r \operatorname{cosec} g}{r \operatorname{cosec} \cot \omega} = \tan \omega$ folglich $KLP = \omega$. Die berührende der Projection an P, welche senkrecht auf LP ist, macht mit der auf LK senkrechten AB einen eben so großen Winkel, welcher auch der Winkel der Projection mit AB an dem Durchschnittspuncte P ist. Die Projectionen zweyer größten Kreise, von denen der eine senkrecht auf die Tafel ist, schneiden also einander unter demselben Winkel, wie die Kreise auf der Kugel. Hieraus ergiebt sich, daß die Projectionen irgend zweyer größten Kreise einander unter demselben Winkel schneiden, wie die Kreise auf der Kugel, den Grundkreis nicht ausgeschlossen, dessen Projection mit ihm selbst einerley ist.

14. Der geometrische Beweis dieser Eigenschaft stereographischer Entwürfe ist folgender.

Die verlängerte DE (Fig. 44) begegne der gleichfalls verlängerten AB in L, und schneide OF in K. Da in den Dreyecken OGP, OKE die Winkel DOF, FOE, als Peripheriewinkel auf gleichen Bogen DF, FE, einander gleich sind, auch OGP = KEO ist, so ist OKE = GPO = KPL, folglich das Dreyeck KPL gleichschenklig, und KL = PL. Es schneide irgend eine andere außer der OANB durch OF gelegte Ebene die Ebene des Kreises DIE in LM, die Tafel in PM. Weil die Ebene des Kreises DIE und die Tafel senkrecht auf der Ebene OANB sind, so ist auch ihr gemeinschaftlicher

Durchschnitt LM senkrecht darauf, und die Dreyecke KLM, PLM sind bey L rechtwinklig. Nun ist die Seite LM ihnen gemein, und KL = PL, also ist LKM = LPM. Es berühre eine Ebene die Kugel in F, und werde von den Ebenen OKL, OKM in FT, FZ geschnitten, so ist, weil die Ebenen ZFT, MKL parallel sind, auch FT der KL, und FZ der KM parallel, folglich der Winkel ZFT = MKL (Ebene, 19. 13) = MPL. Die FT berührt den Kreis ANBO in F, und FZ ist die Berührende eines größten durch F gehenden Kreises FQf, welcher den Kreis ANBO in Ff und unter einem Winkel = ZFT schneidet. Daher ist der Winkel MPL dem Winkel der beiden Kreise ANBO und FQf gleich. Weil OF eine Seitenlinie des Kegels ist, welcher O zur Spitze und den Kreis FQf zur Grundfläche hat, so berührt die Ebene OFZ diesen Kegel, und PM, welche der Durchschnitt der Berührungsebene mit der Tafel ist, berührt den Durchschnitt des Kegels mit der Tafel, das ist die Projection des Kreises FQf. Der Winkel MPL ist also der Winkel dieser Projection an dem Durchschnittspuncte P mit der AL, welche die Projection des Kreises ANBO ist. Folglich schneiden die Projectionen der beiden größten Kreise ANBO und FQf, wovon jener senkrecht auf die Tafel ist, einander unter demselben Winkel, wie die Kreise auf der Kugel. — Der Beweis bleibt gleich dem in (13) auch noch gültig, wenn DE senkrecht auf AB ist, und F und P zugleich entweder in A oder B fallen.

15. Wenn zwey Kugelkreise einander berühren, so haben sie in dem Berührungspuncte eine gemeinschaftliche Berührungslinie. Legt man durch diese und durch das Auge eine Ebene, so berührt solche die beiden Kegel, deren Durchschnitte mit der Tafel die Projectionen der beiden Kreise sind. Da nun die Seitenflächen beider Kegel blos die Entwerfungslinie nach dem Berührungspuncte gemein haben, so haben ihre Durchschnitte mit der Tafel, das ist, die Projectionen der beiden Kreise blos der Durchschnitt jener Linie mit der Tafel, das ist, die Projection des Berührungspunctes gemein, und

der Durchschnitt der Berührungsebene mit der Tafel, welcher durch die Projection des Berührungspunctes geht, berührt beide Kreise, die die Projectionen derer auf der Kugel sind. Folglich berühren die Projectionen einander in der Projection des Berührungspuncts auf der Kugel.

16. Hieraus folgt, daß überhaupt die Projectionen zweyer Kugelkreise einander unter demselben Winkel schneiden, wie die Kreise auf der Kugel.

Denn schneidet ein größter Kreis der Kugel einen kleineren, so ziehe man durch einen der beiden Durchschnittspuncte einen größten Kreis, welcher den kleineren berührt, so schneiden die Projectionen der beiden größten Kreise einander unter demselben Winkel wie die Kreise auf der Kugel. Nun berührt die Projection des größten Kreises, der den kleineren berührt, die Projection dieses kleineren Kreises, und hat mit ihm in dem Berührungspuncte eine gemeinschaftliche Berührungslinie. Da aber der Winkel zweyer Kreise der Winkel ihrer berührenden in den Durchschnittspuncten ist, so ist der Winkel der beiden größten Kreise auf der Kugel, dem Winkel des einen derselben mit dem kleineren Kreise, welchen der andere berührt, gleich, und eben dies gilt auch von den Projectionen dieser Kreise. Daher schneidet die Projection des größten Kreises die Projection des kleineren unter demselben Winkel wie auf der Kugel.

Schneiden zwey kleinere Kreise der Kugel einander, so ziehe man durch einen der Durchschnittspuncte größte Kreise, welche die kleineren berühren, und der Beweis bleibt.

17. Daß die Projectionen zweyer Kugelkreise, wovon der eine oder beide kleinere Kreise sind, einander unter demselben Winkel schneiden, wie die Kreise auf der Kugel, läßt sich auch daraus ableiten, daß die Projection eines größten Kreises, welcher senkrecht auf einen andern Kugelkreis ist, folglich durch seine Pole geht, die Pro-

jection desselben gleichfalls unter einem rechten Winkel schneidet. Letzteres erhellt so:

Es sey I der Mittelpunct der Projection eines nach (9) entworfenen Kreises, L der Mittelpunct eines nach (11) entworfenen größten Kreises, welcher vermöge der dortigen Voraussetzungen senkrecht auf den ersten Kreis ist, M einer der Durchschnitte der beiden Projectionen, so ist aus (9)

$$GI = \frac{r \sin g}{\cos g + \cos u}, \quad IM = \frac{r \sin u}{\cos g + \cos u},$$

und aus (11) $GK = r \cot g$, $KL = r \operatorname{cosec} g \cot \omega$, $LM = r \operatorname{cosec} g \operatorname{cosec} \omega$,

mithin $KI = \frac{r(1 + \cos g \cos u)}{\sin g(\cos g + \cos u)}$, und $KI^2 - IM^2$

$$= \frac{r^2(1 + \cos(u - g))(1 + \cos(u + g))}{\sin g^2 (\cos g + \cos u)^2}$$

$$= \frac{r^2(1 + 2\cos g \cos u + \cos g^2 - \sin u^2)}{\sin g^2 (\cos g + \cos u)^2}$$

$$= \frac{r^2(\cos g^2 + 2\cos g \cos u + \cos u^2)}{\sin g^2 (\cos g + \cos u)^2}$$

$= r^2 \operatorname{cosec} g^2 = r^2 \operatorname{cosec} g^2 \operatorname{cosec} \omega^2 - r^2 \operatorname{cosec} g^2 \cot \omega^2$ $= ML^2 - KL^2$. Demnach ist $LM^2 + MI^2 = KL^2 + KI^2 = LI^2$, folglich der Winkel LMI der beiden Radien MI, IM ein rechter, also auch der Winkel der beiden aus L und I mit diesen Radien durch M beschriebenen Kreise ein rechter, das ist, der Winkel der Projectionen zweyer auf einander senkrechten Kugelkreise, wovon der eine ein größter ist, ein rechter.

18. Eine Folge der jetzt bewiesenen Eigenschaft der stereographischen Projection, nach welcher in derselben alle Winkel auf der Kugel in gleich große projicirt werden, ist, daß die Projectionen der kleinsten Theile der Kugelfläche ihrem Urbilde auf der Kugel ähnlich sind. Auf Landcharten, welche nach der stereographischen Ent-

werfungsart gezeichnet sind, haben also die Grade der Länge zu denen der Breite überall das richtige Verhältniß. Diese Eigenschaft verbunden mit der, daß die Projectionen der Kreise auf der Kugel wieder Kreise sind, macht die stereographische Projection zu Landcharten eben so sehr empfehlungswerth.

19. Der Kreis ASBR (Fig. 45) oder der Grundkreis sey der Äquator der sphärischen Erde, so ist C die Projection des Pols N (Fig. 44), und die Projectionen der Meridiane sind gerade durch C gehende Linien. Es seyn CS, Cſ die Projectionen zweyer Quadranten NS, Nſ, von ein Paar einander unendlich nahen Meridianen, und auf ihnen M, m die Projectionen der Durchschnitte W, w jener Quadranten mit einer loxodromischen Linie. Da das unendlich kleine zwischen dem Quadranten NS, Nſ enthaltene Stück der Loxodromie Ww sich mit dem zwischen denselben Endpuncten enthaltenen Elemente eines größten durch W, w geführten Kreises verwechseln läßt, so ist seine Projection Mm das Element eines Kreises, welcher den Halbmesser CS unter demselben Winkel schneidet, unter welchen der Kreis auf der Kugel den Quadranten NS schneidet. Dieser Winkel ist der loxodromische und von beständiger Größe. Die Projection der Loxodromie auf die Ebene des Äquators schneidet also alle Halbmesser wie CS unter demselben Winkel; sie ist also eine logarithmische Spirale (Spirale, 42.).

20. Die Rechnung giebt dasselbe Resultat so. Wenn die Loxodromie in B anfängt, und der Winkel BCS, wie bisher, φ, der loxodromische Winkel α und die Breite des Punctes W auf der Loxodromie ψ heißt, so ist

$$\varphi = \operatorname{tang}\alpha . \log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\psi)$$

(Sphäroid, 41, wo ψ statt ω kommt und $e = 0$ ist). Setzt man nun den veränderlichen Radius CM $= z$, so ist

$$\begin{aligned} z &= r \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \ (8) \\ &= r \operatorname{tang} (45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi). \end{aligned}$$

Es ist nämlich v der Abstand vom Pole, also $= 90 - \psi$. Man hat nun

$$\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\psi) = \frac{1}{\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi)} = \frac{r}{z}$$

also, wenn noch $\operatorname{tang}\alpha = m$ gemacht wird

$$\varphi = m \log(r : z).$$

Dieses ist die Gleichung für die Projection der Loxodromie. Sie gehört einer logarithmischen Spirale an, in welcher die Radien z abnehmen, wenn die positiven Winkel φ zunehmen. (Spirale, 39). Der Winkel der Spirale mit dem Radius CM ist $= \alpha$ (das. 41), also dem loxodromischen Winkel gleich.

21. Die Lage des Punctes M, der Projection von W, auf dem um I mit dem Halbmesser $\dfrac{r \sin u}{\cos g + \cos u}$ beschriebenen Kreise (17. 9) wird auch durch den Durchschnitt dieses Kreises mit PM bestimmt. Man suche also den Winkel CPM $= \chi$.

Es ist $QP = CP - CQ = r \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} g - x$

$$= \frac{r \sin g}{1 + \cos g} - \frac{r(\sin g \cos u - \cos g \sin u \cos \omega)}{1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega}$$

$$= \frac{r(\sin g(1 - \cos u) + (1 + \cos g) \sin u \cos \omega)}{(1 + \cos g)(1 + \cos g \cos u + \sin g \sin u \cos \omega)}$$

mithin

$$\operatorname{tang}\chi = \frac{QP}{QM} = \frac{(1 + \cos g) \sin u \sin \omega}{\sin g(1 - \cos u) + (1 + \cos g) \sin u \cos \omega}$$

$$= \frac{\cot \tfrac{1}{2} u \sin \omega}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} g + \cot \tfrac{1}{2} u \cos \omega} = \frac{\cot \tfrac{1}{2} g \sin \omega}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u + \cot \tfrac{1}{2} g \cos \omega}.$$

Diese Gleichung gilt für ein ebenes Dreyeck, in welchem zwey den Nebenwinkel zu ω einschließende Seiten das Verhältniß von $(1 + \cos g) \sin u : \sin g (1 - \cos u) = \cot \tfrac{1}{2} u : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} g = \cot \tfrac{1}{2} g : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u$

das

haben, χ aber der Winkel ist, welcher der ersten jener beiden Seiten entgegensteht. Sie läßt sich verschiedentlich construiren.

Es ist übrigens klar, daß, wenn GH der in AB fallende Durchmesser des um I beschriebenen Kreises ist, der Bogen GM die Projection des Bogens ω auf der Kugel ist, indem die Projection eines größten Kreises, welche durch P und M geht, mit AB einen Winkel $= \omega$ macht (13), dessen Maß der dem Bogen GM entsprechende Bogen eines kleineren um den Pol F (Fig. 44) durch die Puncte D, W (4, 8) beschriebenen Kreises ist.

22. Die bisherigen Sätze enthalten die merkwürdigsten Eigenschaften der stereographischen Projection. Zum Behuf der nun beyzubringenden Constructionen, um diese nämlich in der Ebene der Tafel auszuführen, stelle man sich den Kreis ANBO, so wie jeden andern durch das Auge O gehenden größten, mithin auf die Tafel senkrechten Kreis, um seinen Durchschnitt mit der Tafel AB gedreht und in dieselbe niedergelegt vor. Die Lage der Puncte G, P, H der AB bleibt dabey ungeändert, die Puncte O, N, so wie D, F, E fallen in den Umfang des Grundkreises, und ON fällt mit dem auf AB senkrechten Durchmesser des Grundkreises zusammen, oder in den Durchschnitt desselben mit einem auf ANBO in der ursprünglichen Lage senkrechten Kreise. Das Auge kann hiernach jede Stelle im Umfange des Grundkreises einnehmen, und es ist alsdann leicht, durch Linien, welche von demselben ausgehn, wie OD, OF, OE Puncte eines senkrechten und durchs Auge gehenden Kreises auf seinen Durchschnitt mit dem Grundkreise AB, und dadurch auf die Tafel, in G, P, H überzutragen, und umgekehrt Puncte G, P, H eines Durchmessers AB des Grundkreises auf den Umfang eines über diesem Durchmesser auf die Tafel senkrechten und durchs Auge gehenden Kreises zurückzuführen: — Übrigens wird es der Kürze wegen in allen den Fällen, wo bloß die Beziehung der Projectionen zu einander in Betracht kommen, verstattet

seyn, von den Projectionen sich eben so auszudrücken, wie von den ihnen entsprechenden Puncten und Kreisen der Kugelfläche.

23. Die Projection eines größten Kreises zu zeichnen, dessen Durchschnitt mit dem Grundkreise gegeben ist.

Es sey NO (Fig. 46.) der gegebene Durchschnitt mit dem Grundkreise. Ist nun der zu entwerfende Kreis senkrecht auf den Grundkreis, so ist NO selbst die gesuchte Projection (3). Hat aber der zu projicirende Kreis eine schiefe Lage gegen den Grundkreis, so ziehe man den Durchmesser AB senkrecht auf NO, setze an CA auf der Seite von N oder O, je nachdem der zu entwerfende Kreis für ein über C befindliches Auge sich über den Halbkreis NAO erhebt oder darunter fällt, einen Winkel ACD gleich dem Winkel des zu entwerfenden Kreises mit dem Grundkreise, verlängere DC bis an die Peripherie in E und ziehe OD, OE, welche AB oder ihre Verlängerung in G, H schneiden, beschreibe alsdann über dem Durchmesser GH einen Kreis; dieser ist die gesuchte Projection.

Daß GH ein Durchmesser des Kreises ist, worin der größte Kreis projicirt wird, erhellt aus (4) und (22), daß der Kreis durch O, mithin auch durch N geht, daraus, daß GOH ein rechter Winkel ist, und daß er die gehörige Lage gegen den Grundkreis hat, aus (2).

Man kann den Kreis NGOH auch zeichnen, wenn man bloß seinen Mittelpunct I sucht. Diesen erhält man dadurch, daß man auf der Seite von NO, an welche bey der senkrechten Lage des Kreises ANBO der über dem Grundkreise erhabene Pol des zu projicirenden Kreises fällt, von N an den Bogen NR = 2g oder gleich dem doppelten Abstande der über der Tafel erhabenen Pole des Grundkreises und des zu entwerfenden Kreises nimmt, und OR zieht. Diese schneidet AB in dem gesuchten Mittelpuncte I, aus welchem dann mit dem Halbmesser IO oder IN der Kreis OGNH beschrieben wird. Nach

dieser Construction ist nämlich CI = r tang g, OI = r sec g (6). — Begegnet OI der DE in T, so ist wegen COI = ICT und des gemeinschaftlichen Winkels I das Dreyeck ICT dem Dreyecke ICO ähnlich, also ITC = ICO oder OI in T senkrecht auf DE. Hieraus ergiebt sich noch ein Mittel, I zu finden, wenn DE gezogen ist.

24. a. die Pole eines größten Kreises in der Projection zu finden.

Die Pole des Grundkreises fallen in seinen Mittelpunct. Die Pole eines senkrechten Kreises NO liegen auf dem Umfange des Grundkreises in den Endpuncten des auf NO senkrechten Durchmessers AB. Die Pole eines schiefen Kreises NGOH zu finden, suche man seinen Mittelpunct I und ziehe dadurch den Durchmesser des Grundkreises AB, und auf diesen den Durchmesser NO senkrecht, verbinde OI und halbire den Winkel COI durch die gerade OF. Diese schneidet AB in dem einen Pole P. Eine senkrechte auf OP in dem Puncte O giebt dann durch ihren Durchschnitt mit der AB den andern Pol p.

Nach der Construction ist nämlich NF = FR = g, also NOF = $\frac{1}{2}$g, CP = r tang $\frac{1}{2}$g, Cp = r cot $\frac{1}{2}$g, wie gehörig (7).

24. b. Da die Pole eines Kreises einander gerade entgegenstehende Puncte sind, so ergiebt sich hieraus die Auflösung der Aufgabe: Zu einem gegebenen Puncte der Projection, welcher nicht der Mittelpunct ist, den ihm diametral entgegengesetzten zu finden.

Man zieht nämlich durch den gegebenen Punct P den Durchmesser des Grundkreises AB, und auf diesen einen andern NO senkrecht, verbindet PO und setzt Op, welche der AB in p begegnet, senkrecht auf OP, so ist p der gesuchte Punct.

25. Auf einem größten Kreise der Projection von einem gegebenen Puncte an einen Bogen von gegebener Größe abzuschneiden.

Wie das verlangte in Ansehung des Grundkreises geleistet werde, ist für sich klar. Auf einem senkrechten Kreise AB von dem Puncte G aus einen gegebenen Bogen abschneiden, ziehe man den Durchmesser NO senkrecht auf AB, verbinde OG und verlängere solche bis an den Umfang des Grundkreises in D, nehme auf diesem den Bogen DF nach der gehörigen Seite von der bestimmten Größe, und ziehe OF, welche AB in P schneidet, so ist GP, wie aus (22) und (3) erhellt, der verlangte Bogen, die Projection nämlich von DF.

Auf einem schiefen Kreise NGOH wird von dem Puncte Q aus ein Bogen von gegebener Größe so abgeschnitten. Man sucht den innerhalb des Grundkreises liegenden Pol P des Kreises NGOH, zieht PQ und verlängert solche bis an den Umfang des Grundkreises in S, nimmt alsdann den Bogen SW auf diesem nach der gehörigen Seite von der bestimmten Größe, verbindet WP, welche den Kreis NGOH in M schneidet, so ist der Bogen QM der verlangte.

Denn zieht man den Halbmesser CW und durch P den Durchmesser des Grundkreises AB, welcher NGO in G schneidet, so ist, den Bogen $AW = \omega$ gesetzt, im Dreyeck CWP

$$\text{tang } CPW = \frac{CW . \sin WCP}{CP - CW . \cos WCP}$$

$$= \frac{r . \sin(180^\circ - \omega)}{r \text{ tang} \tfrac{1}{2} g - r . \cos(180^\circ - \omega)}$$

$$= \frac{\sin \omega}{\text{tang } \tfrac{1}{2} g + \cos \omega}$$

welcher Ausdruck in (21) für tang χ kommt, wenn $u = 90^\circ$, mithin der entworfene Kreis ein größter ist. Der Bogen GM ist also die Projection eines dem Bogen AW auf der Kugel gleichen Bogens, und eben so GQ die Projection eines Bogens, welcher dem Bogen AS gleich ist. Daher ist der ganze Bogen QM die Projection

eines dem SW auf der Kugel gleichen Bogens, folglich von der bestimmten Größe.

26. Der Grundkreis ANBO dient zur Eintheilung sowohl des senkrechten größten Kreises AB als des schiefen NGOH vermittelst der aus den Polen dieser Kreise O, P an den Umfang jenes gezogenen Linien. Er führt daher den Namen eines Theilkreises derselben. Man kann übrigens den schiefen Kreis NGOH selbst als Theilkreis gebrauchen. Um nämlich von des Durchmessers GH Endpuncte G aus nach O zu einen Bogen von gegebener Größe abzuschneiden, nehme man von dem andern Endpuncte H nach der entgegengesetzten Seite oder nach N zu einen dem abzuschneidenden Bogen ähnlichen Bogen HZ, so schneidet die rückwärts verlängerte ZP auf NGOH den verlangten Bogen GQ ab. Denn weil OP den Winkel COI halbirt (24), so ist CO oder CS : CP = OI oder IZ : PZ, folglich sind die bey P gleichwinkligen Dreyecke CSP, PZI ähnlich, und die Winkel SCP, PIZ, so wie ihre Nebenwinkel ACS, ZIH gleich, daher die Bogen AS und ZH ähnlich, folglich GQ von der verlangten Größe (25).

27. Durch einen Punct M oder Z, welcher nicht auf dem Umfange des Grundkreises liegt, einen größten Kreis zu ziehen, welcher mit dem Grundkreise den gegebenen Winkel g mache, beschreibe man aus C und M oder aus C und Z als Mittelpuncten mit den durch eine einfache Construction zu erhaltenden Halbmessern r tang g und r sec g Kreise. Diese schneiden einander in dem gesuchten Mittelpuncte I, welcher, wenn die Kreise einander schneiden, zweyfach ist. Berühren die Kreise blos einander, so giebt es nur einen Mittelpunct; treffen die Kreise einander gar nicht, so ist die Aufgabe unmöglich.

28. Durch einen gegebenen Punct der Projection einen größten Kreis zu ziehen, der auf einem andern Kreise senkrecht sey.

Man suche die Pole des gegebenen Kreises, und beschreibe durch dieselben und den vorgegebenen Punct einen Kreis, welcher in dem Falle, daß der gegebene Kreis der Grundkreis ist, sich in eine gerade Linie verwandelt, so ist das verlangte, wie leicht zu sehen ist, geschehen.

29. Durch zwey gegebene Puncte der Projection einen größten Kreis zu ziehen.

Ist einer der beiden Puncte der Mittelpunct des Grundkreises, so ist der Durchmesser desselben, welcher durch den andern Punct geht, der gesuchte Kreis. Sonst suche man zu dem einen der beiden gegebenen Puncte P den ihm diametral entgegengesetzten p (24[b]), und ziehe durch P, p und den andern gegebenen Punct M einen Kreis; dieser ist der verlangte. Denn er ist ein größter, weil er durch zwey einander gerade entgegenstehende Puncte geht.

30. Einen größten Kreis zu beschreiben, dessen Pol P in der Projection gegeben ist.

Man ziehe durch P den Durchmesser AB des Grundkreises, und setze auf denselben den Durchmesser NO senkrecht, ziehe OP, welche den Umfang des Grundkreises in F trifft, nehme den Bogen FD = FE = 90°, und ziehe OD, OE, welche dem Durchmesser AB in G, H begegnen, und beschreibe um den Durchmesser GH den Kreis GNHO. Dieser ist der verlangte. (23. 24[a].).

31. An einen Punct der Projection, welcher weder der Mittelpunct noch ein Punct im Umfange des Grundkreises ist, einen gegebenen Winkel zu setzen.

Es sey P der gegebene Punct. Man beschreibe den größten Kreis NGOH, dessen Pol P ist (30.). Um nun an den senkrechten Kreis PCA einen Winkel von gegebener Größe in dem Puncte P zu legen, nehme man den Bogen AS des Grundkreises nach der gehörigen Seite von so viel Graden als der gegebene Winkel faßt, ziehe PS, welche den Kreis NGO in Q schneidet, und be-

schreibe durch P, Q (29) einen größten Kreis, so hat der Winkel APQ die verlangte Größe. Soll aber der gegebene Winkel an den schiefen Kreis PMp in dem Puncte P getragen werden, so ziehe man durch den Durchschnitt M des schiefen Kreises und des auf ihn senkrechten NGO die gerade PM, und verlängere solche bis an den Umfang des Grundkreises in W, nehme nun den Bogen WS nach der gehörigen Seite von so viel Graden, als der zu zeichnende Winkel haben soll, ziehe PS, die dem Kreise NGO in Q begegnet, und beschreibe durch P und Q einen größten Kreis PQp, so ist an PM ein Winkel MPQ von der verlangten Größe gesetzt. Es ist nämlich QM die Projection eines dem WS gleichen Bogens (25), und das Maß des Winkels MPQ, weil PM, PQ Quadranten sind.

32. Durch eine leichte Umkehrung der Auflösungen in (25), (23) und (27) kann man jeden Bogen eines größten senkrechten oder schiefen Kreises der Projection und jeden Winkel, der seine Spitze nicht im Mittelpuncte des Grundkreises hat, ausmessen, indem man jenen auf einen Bogen des Grundkreises, diesen auf einen Winkel am Mittelpuncte desselben zurückführt. Und nun ist man im Stande, vermittelst der bisherigen Vorschriften alle Aufgaben der sphärischen Trigonometrie graphisch zu lösen. Da aber bey astronomischen Aufgaben oft die Zeichnung und Eintheilung von Parallelkreisen vorkommt, so soll das nöthige davon hier noch beygebracht werden.

33. Zu einem gegebenen größten Kreise der Projection einen Parallelkreis zu zeichnen.

Der gegebene größte Kreis sey NGOH (Fig. 47.). Man ziehe durch den Mittelpunct des Grundkreises C den Durchmesser GH desselben, und NO durch C senkrecht auf GH, ferner OG, OH, welche den Umfang des Grundkreises in D und E schneiden, und mache jeden der Bogen DL, EM, dem Abstande des Parallels von dem größten Kreise an der gehörigen Seite gleich, ziehe

OL, OM, welche dem Durchmesser AB des Grundkreises in Q und R begegnen, so ist QR der Durchmesser der Projection des Parallelkreises, wie aus (4) und (22) erhellt.

34. Um den gegebenen Pol einen Parallelkreis oder überhaupt einen kleineren Kreis, dessen Abstand vom Pole gegeben ist, zu beschreiben.

P sey der innerhalb des Grundkreises fallende Pol. Man ziehe dadurch den Durchmesser des Grundkreises AB und einen andern auf AB senkrechten NO, ferner OP bis an den Umfang des Grundkreises in F, nehme die Bogen FL, FM, so groß als der Abstand des Parallels von dem über der Tafel erhabenen Pole auf der Kugel ist, ziehe OL, OM, so ergiebt sich durch deren Durchschnitte Q, R mit AB der Durchmesser des Parallelkreises QR.

Für einen Parallel des Grundkreises fällt F mit N, so wie D und E mit A und B zusammen.

35. Durch einen gegebenen Punct der Projection den Parallelkreis zu einem gegebenen größten Kreise zu ziehen.

Der gegebene Punct sey T, und der gegebene größte Kreis NGOH. Man suche den Pol desselben P, und beschreibe durch P und T einen größten Kreis, messe den Bogen PT desselben, so hat man den Abstand des Parallels von seinem Pole, und kann denselben nach (34) zeichnen.

36. Auf der Projection eines Parallelkreises oder überhaupt eines kleineren Kreises von einem gegebenen Puncte aus einen Bogen von gegebener Größe abzuschneiden.

Der Parallelkreis sey TQR und P die Projection des über der Tafel erhabenen Pols desselben, der gegebene Punct auf seinem Umfange Y. Man nehme den Bogen OS des Grundkreises, wo O wie in (34) gefunden wird, gleich FL oder dem Abstande des Pa-

rallels von dem nächsten Pole, ziehe die Chorde OS, welche verlängert dem Durchmesser AB des Grundkreises in V begegne. Mit dem Halbmesser CV beschreibe man um C einen Kreis, ziehe PY bis an den Umfang desselben in W, nehme den Bogen WX nach der gehörigen Seite von der verlangten Größe, und ziehe PX, welche dem Umfange des Parallels in Z begegnet, so ist YZ der verlangte Bogen.

Denn es ist, den Bogen NF $= g$, FL $=$ OS $= u$ gesetzt, CP $= r \tang \frac{1}{2} g$, CV $= r \cot \frac{1}{2} u$; und wenn CW gezogen, VCW oder der Bogen VW $= \omega$ gesetzt wird, so hat man im Dreyecke CWP

$$\tang CPW = \frac{r.\cot \frac{1}{2} u \sin \omega}{r \tang \frac{1}{2} g + r \cot \frac{1}{2} u \cos \omega}$$

$$= \frac{\cot \frac{1}{2} u \sin \omega}{\tang \frac{1}{2} g + \cot \frac{1}{2} u \cos \omega}$$

folglich ist QY die Projection eines dem VW ähnlichen Bogens (21.). Eben so ist QZ die Projection eines dem VX ähnlichen Bogens, mithin YZ die Projection eines dem Bogen WX auf der Kugel ähnlichen Bogens, also von der verlangten Größe.

Der Kreis VXW ist ein Theilkreis für den kleineren Kreis QZRY, wie es der Grundkreis AOBN für den größten Kreis NGOH ist (26.). Beschreibt man um C mit einem Halbmesser $= r \tang \frac{1}{2} u$ einen Kreis, so dient solcher gleichfalls, den Kreis QZRY durch gerade, welche in den entfernteren Pol p laufen, einzutheilen (21.).

Man kann aber auch den Kreis QZRY selbst als Theilkreis gebrauchen. Man verlängere nämlich YP rückwärts bis an den Umkreis in y, nehme den Bogen yz nach der entgegengesetzten Seite von der verlangten Größe, und ziehe zP, welche verlängert dem Umkreise in Z begegnet, so ist YZ der Bogen, welcher abgeschnitten werden sollte.

Denn zieht man die Halbmesser Iy, Iz des kleineren Kreises, so ist in den vorigen Bezeichnungen $CI = \frac{r \sin g}{\cos g + \cos u}$, und $Iy = IR = Iz = \frac{r \sin u}{\cos g + \cos u}$ (9). Mithin $PI = \frac{r \sin g}{\cos g + \cos u} - \frac{r \sin g}{1 + \cos g} = \frac{r \sin g \, (1 - \cos u)}{(1 + \cos g)\,(\cos g + \cos u)}$, und

$yI : IP = \frac{\sin u}{1 - \cos u} : \frac{\sin g}{1 + \cos g} = \cot \tfrac{1}{2} u : \tang \tfrac{1}{2} g$,

also, wenn $RIy = \omega$ ist, $\tang QPY = \tang RPy = \frac{\cot \frac{1}{2} u \sin \omega}{\tang \frac{1}{2} g + \cot \frac{1}{2} u \cos \omega}$ mithin QY die Projection eines dem Bogen Ry ähnlichen Bogens (21.). Eben so ist Qz die Projection eines dem Bogen Rz ähnlichen Bogens, folglich YZ die Projection eines dem Bogen yz ähnlichen Bogens, mithin von der verlangten Größe.

37. Ein anderer Theilkreis des Parallels HQLR (Fig. 48), welcher dadurch, daß sein Halbmesser nicht zu groß ausfällt, vorzügliche Bequemlichkeit gewährt, findet sich so. Man beschreibe durch den Pol P einen größten auf AB senkrechten Kreis, welcher also durch die Endpuncte des auf AB senkrechten Durchmessers N und O geht. Dieser schneide den Kreis HQLR in H und L: zieht man nun die Chorde HL, welche AB in K durchschneidet, und beschreibt aus K mit KH oder KL den Kreis HML, so ist dieser ein Theilkreis zu HQLR. Um nämlich von dem Puncte Y aus auf dem Kreise HQLR einen Bogen von gegebener Größe nach L zu abzuschneiden, ziehe man Pγ bis an den Umfang des Kreises HML in S, nehme den Bogen ST nach der angedeuteten Seite hin von der gegebenen Größe, und ziehe PT, welche dem Umfange

des Kreises HQLR in Z begegnet, so ist YZ der verlangte Bogen.

Denn für den Punct H sind, weil APH = 90°, PH aber die Projection des Bogens u auf der Kugel ist, die Werthe der Coordinaten CK, HK oder KL diese

$$CK = \frac{r \sin g \cos u}{1 + \cos g \cos u}$$

$$KH = KL = \frac{r \sin u}{1 + \cos g \cos u}$$

also

$$KP = \frac{r \sin g}{1 + \cos g} - \frac{r \sin g \cos u}{1 + \cos g \cos u}$$

$$= \frac{r \sin g (1 - \cos u)}{(1 + \cos g)(1 + \cos g \cos u)}$$

und $\left\{\begin{matrix} KS \\ KT \end{matrix}\right\} : KP = KH : KP = (1 + \cos g) \sin u :$

$\sin g (1 - \cos u).$

Demnach sind (21) QY und QZ die Projectionen von Bogen auf der Kugel, welche den Bogen MS und MT ähnlich sind. Folglich ist YZ die Projection eines dem Bogen ST auf der Kugel ähnlichen Bogens.

Ohne den Kreis NPO zu beschreiben findet man den Durchmesser HL des Theilkreises so. Man mache jeden der Bogen QV, QW einem Quadranten gleich, ziehe VP, WP, und verlängere solche bis an den Umfang des Kreises, welcher getheilt werden soll, in H und L, so ist die verbundene HL der gesuchte Durchmesser. Dies Verfahren beruht darauf, daß man den Kreis VQWR als einen schiefen größten Kreis, dessen Pol P ist, betrachtet, und dazu den Grundkreis sucht. Da nun WR, RV Quadranten sind, so sind (26. und 36) QH, QL die Projectionen von Quadranten, also HQL die Projection eines Halb-

kreises, mithin HL der Durchmesser des Grundkreises für VQWR als schiefen größten Kreis. Daß HML alsdann aber einen Theilkreis zu VQMR abgiebt, erhellt aus (25).

Lambert hat diesen Theilkreis bey seiner in den Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik Theil II. S. 720 und folgg. angegebenen Entwerfungsart der Sonnenfinsternisse und weiterhin auch der Sternbedekkungen in Anwendung gebracht.

38. Der Erfinder der stereographischen Projection ist der bekannte griechische Astronom Hipparch. Wenigstens eignet ihm der Bischof von Ptolemais, Synesius, in der Vorrede zu seiner Schrift: De dono astrolabii die Erfindung derselben zu. Nach Hipparch hat Ptolemäus über die stereographische Projection geschrieben. Seine Abhandlung darüber, welche nur in einer lateinischen aus dem Arabischen des Maslem gemachten Übersetzung vorhanden ist, hatte den Titel: *ἁπλωσις ἐπιφανειας σφαιρας* (Explicatio superficiei sphaericae in planum). Die Eigenschaft, daß alle Kreise, deren Ebenen nicht durch's Auge gehen, wieder in Kreise projicirt werden, wird darin mehr angenommen als bewiesen. Nach der Wiederherstellung der Wissenschaften hat die stereographische Projection an den Jesuiten, Clavius, (Astrolabium besonders Rom, 1593. 4. und im dritten Bande der Opp. mathematicor. Christophori Clavii. Maynz, 1612.) Aguilonius, (Opticorum libri VI. Antwerpiae, 1613.) Tacquet (Opera mathematica. Antwerpiae, 1669.) und Dechales (Tractatus de Astrolabiis im IVten Bande des 1690 zu Lyon erschienenen Cursus s. Mundus mathematicus) fleißige Bearbeiter gefunden. Clavius Werk ist so weitschweifig und die Figuren so bunt und verwirrt, daß Tacquet selbst sagt, er glaube nicht, daß Jemand das ganze Buch durchgelesen habe. Sein eigener Vortrag, ist so wie der

von Dechales desto kürzer und netter. Von Aguilonius rührt die Benennung stereographische Projection her. Alle diese Schriftsteller lehren den Gebrauch der Theilkreise, deren Erfindung Clavius sich zueignet. Die andere merkwürdige Eigenschaft der stereographischen Projection, daß die Winkel der Kreise in der Projection und auf der Kugel dieselben sind, ist indeß diesen Geometern troß der Mühe, welche sie sich um jene Entwerfungsart gegeben haben, entgangen, und erst späterhin aufgefunden worden. Halley, welcher davon in seinem Aufsatze: An easy demonstration of the analogy of the logarithmick Tangents to te Meridian Line or sum of the Secants. (Philosoph. Trans. Vol. XVIII. nro. 219) Gebrauch macht, sagt, daß er solche von Moivre erhalten, seitdem aber erfahren habe, daß sie schon von Hook der Societät mitgetheilt worden sey. Die Anwendung der stereographischen Projection zu Landkarten hat Hase, theils dadurch, daß er sie in seiner Schrift: Sciagraphia integri tractatus de constructione mapparum omnis generis. Lipsiae, 1717. dazu besonders empfahl, theils aber vornehmlich dadurch, daß er selbst viele nach der stereographischen Entwerfungsart gezeichnete Karten herausgab, vorzüglich befördert. Da Hasens in der obigen Abhandlung angekündigtes Werk nicht erschienen, und sonst keine vollständige Theorie der stereographischen Entwerfungsart bekannt war, so wurde Kästner daurch veranlaßt, diese Theorie vermittelst der analytisch-trigonometrischen Rechnung zu entwickeln, und solche in seinen Dissertt. mathem. et physic. Altenburgi, 1771 bekannt zu machen. In derselben Manier und sehr umständlich hat auch Karsten im 7ten Theile seines Lehrbegriffs die stereographische Projection abgehandelt. Nach der synthetischen Methode hat Klügel in einer kleinen Schrift: geometrische Entwickelung der Eigenschaften der stereographischen Projection. Berlin und Stettin, 1788. die Hauptsätze und Hauptaufgaben über dieselbe vorgetragen. In diesem Artikel wird man einiges finden, das

die Abhandlungen dieser Schriftsteller, so wie die von Mayer im 4ten Th. seiner praktischen Geometrie und von Delambre im 3ten Th. seiner Astronomie, ergänzt.

Stereometrie, wörtlich: Körpermessung, ist der Theil der Geometrie, in welchem die Untersuchung nicht auf Linien und Figuren, die in einer Ebene liegen, beschränkt ist. Für die Stereometrie gehört also zunächst die Lehre von der Lage gerader außerhalb einer Ebene gezogenen Linien gegen diese Ebene, und von der Lage der Ebenen gegen einander, worunter die Lehre von den körperlichen Winkeln begriffen ist, worauf dann die Betrachtung der Körper und ihrer Oberflächen selbst, so wie der Linien, welche in diesen Oberflächen durch die Durchschnitte derselben mit ebenen oder krummen Flächen entstehen oder sonst nach irgend einem Gesetze gezogen werden können, folgt. Die Stereometrie ist theils eine niedere theils eine höhere, über welche Eintheilung der Artikel Geometrie Auskunft giebt, in welchem auch der Umfang der Elementarstereometrie bestimmt ist, in die man gewöhnlich auch noch, dem obigen Begriffe nicht zuwider, die ersten und leichtesten Lehren der Sphärik von den Kugelschnitten aufnimmt. Häufig wird das Wort Stereometrie in seiner eigentlichen Bedeutung für Ausmessung der Körper ihrem Inhalte nach genommen. So ertheilt die praktische Stereometrie Vorschriften zur Berechnung des Inhalts von allerley im gemeinen Leben vorkommenden Körpern, womit dann auch Vorschriften zur Berechnung ihrer Oberflächen, in so fern diese nicht schon nach den Regeln der Planimetrie gefunden werden können, verbunden werden.

Da die Berechnung des Inhalts eckiger Körper theils schon in den Art. Prisma und Pyramide enthalten ist, theils noch in dem Artikel vieleckiger Körper vorkommen wird, so gebe ich hier noch einige Nachträge zu den Artikeln, Cubirung und Complanation.

1. Wenn X die Area des Schnittes eines Körpers bezeichnet, welcher senkrecht auf eine gegebene oder angenommene Abscissenaxe in dem unbestimmten Abstande x vom Anfange der Abscissen geführt ist, so giebt $\int X\partial x$ den Inhalt von dem Stücke des Körpers, welches zwischen den beiden parallelen durch die Endpuncte der x gelegten Ebenen enthalten ist. Der Beweis hiervon wird eben so geführt wie in dem Artikel Cubirung.

Exempel. Es ist ABCDF (Fig. 49) ein Körper, dessen Grundfläche ABCD so wie alle mit ihr parallele Schritte Quadrate sind, die beiden auf die Grundfläche durch die Mitte der gegenüberliegenden Seiten senkrechten Schnitte GFH, IFK seyn Halbkreise, man sucht den Inhalt dieses Körpers.

Es sey LMNO irgend ein der Grundfläche paralleler Schnitt, welcher der Axe FE, dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der Ebenen GFH, IFK in P begegne. Man setze $FP = x$, und den Halbmesser $EG = EF = EH = a$, so daß $2a$ die Seite der Grundfläche ist, so ist vermöge der Natur des Kreises $PQ = \sqrt{(2ax - x^2)}$, und die Area $LMNO = 8ax - 4x^2$. Bezeichnet nun Z das unbestimmte Stück des Körpers LMNOF, so ist

$$\partial Z = 8\,ax\partial x - 4\,x^2\partial x$$
$$Z = 4\,ax^2 - \tfrac{4}{3}\,x^3$$

wo keine Constans hinzuzusetzen ist, weil für $x = 0$, auch $Z = 0$ wird. Hiernach wird, wenn man $x = a$ setzt, der Inhalt des ganzen Körpers $= \frac{(2a)^3}{3}$, mithin so groß als der einer Pyramide von derselben Grundfläche, aber von der doppelten Höhe.

Die gefundene Formel dient den leeren Raum eines Klostergewölbes mit quadratischer Grundfläche und elliptischen Grathen oder Kanten AFC, BFD zu berechnen. — Es können die Schnitte GFH, IFK auch

andere Curven als Halbkreise seyn, immer wird sich der Körper AFC zu dem runden Körper, welcher durch Umdrehung von FEH um die Axe FE entsteht, verhalten wie das umschriebene Quadrat zu der Kreisfläche.

Das Stück EFHD des vorhin betrachteten Körpers ist die Hälfte eines cylindrischen Hufs, dessen Inhalt nach nro. 2 Artikel Hufförmiger Abschnitt $= \frac{1}{3} aa \times HD = \frac{1}{3} a^3$ ist. Das 8fache hiervon giebt den ganzen Körper wie vorhin. Die krumme Oberfläche wird nach nro. 3 des angeführten Artikels $= 8 a^2$.

3. Es sey nun N (Fig. 50) ein Punct einer krummen Fläche, für welche eine Gleichung zwischen den drey rechtwinkligen Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, $MN = z$ gegeben ist, und es bezeichne V den körperlichen Inhalt des Solidums, welches über dem Rechtecke AM als Grundfläche steht, die über AQ, QM, MP, PA senkrechten Ebenen zu Seitenflächen und das zwischen diesen enthaltene Stück der krummen Fläche zur oberen Grundfläche hat, so ist V im allgemeinen eine Function von x und y. Man lasse AP oder x um $Pp = \Delta x$ wachsen, so wächst das Solidum um ein Stück über dem Rechtecke Pm als Grundfläche, und es ist der Inhalt dieses Stücks

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 V}{1.2.\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^3 V}{1.2.3\, \partial x^3} \Delta x^3 + \text{etc.}$$

wo $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}$ Differentialquotienten in Beziehung auf x allein genommen sind.

Eben so ist, wenn man $y = AQ = PM$ allein um $Qq = \Delta y$ wachsen läßt, das über dem Rechtecke qM stehende Solidum

$$= \frac{\partial V}{\partial x} \Delta y + \frac{\partial\partial V}{1.2\, \partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^3 V}{1.2.3.\partial y^3} . \Delta y^3 + \text{etc.}$$

läßt

Läßt man aber x und y zugleich, jenes um Δx, dieses um Δy, wachsen, so wird nach dem auf Functionen zweyer veränderlichen Größen erweiterten Taylorschen Lehrsatze das Solidum über dem Gnomon PMQqsp

$$= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial\partial V}{1.2.\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial\partial V}{1.2.\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial\partial V}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \text{etc.}$$

wo $\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}$ den Differentialquotienten anzeigt, welchen man erhält, wenn man V zweymal hinter einander und zwar so, daß x allein als veränderlich betrachtet wird, differentiirt, $\frac{\partial\partial V}{\partial x \partial y}$ aber denjenigen, welchen man bekommt, wenn man zuerst $\frac{\partial V}{\partial x}$, wo x allein veränderlich ist, sucht, und alsdann diesen Differentialquotienten aufs neue, indem man bloß y als veränderlich betrachtet, differentiirt, wobey man auch die Folge der Operationen umkehren kann.

Hierdurch ergiebt sich das Solidum Mt über dem Rechtecke Musm als Grundfläche

$$= \frac{\partial\partial V}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^3 V}{1.2.\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + \frac{\partial^3 V}{1.2.\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \text{etc.}$$

Eben dieses Solidum fällt nun auch zwischen zwey rechtwinklige, über der Grundfläche Musm errichtete Parallelepipeda, von denen das eine die kleinste, das andere die größte der vier Ordinaten MN, mn, ur, st zur Höhe hat, vorausgesetzt, daß z innerhalb

des Raums Mt beständig zu- oder abnimmt, welches immer dadurch erhalten werden kann, daß man Δx und Δy klein genug nimmt. Die Werthe der vier Ordinaten sind

$$MN = z$$

$$mn = z + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\partial z}{1.2.\partial x^2}\Delta x^2 + \text{etc.}$$

$$ur = z + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\partial z}{1.2.\partial y^2}\Delta y^2 + \text{etc.}$$

$$st = z + \frac{\partial z}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}.\Delta y + \frac{\partial\partial z}{1.2.\partial x^2}\Delta x^2$$

$$+ \frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial\partial z}{1.2.\partial y^2}\Delta y^2 + \text{etc.}$$

Hiernach wird das erste den Ausdrücken für die beiden Gränzen des Solidums Mt gemeinschaftliche Glied $z\Delta x\Delta y$, welchem alsdann entweder bloß in dem einen oder in beiden Ausdrücken noch andere in $\Delta x^2\Delta y$, $\Delta x\Delta y^2$ u. s. w. multiplicirte Glieder folgen. Demnach fällt dem obigen zufolge

$$\frac{\partial\partial V}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^3 V}{1.2.\partial x^2\partial y}\Delta x + \frac{\partial^3 V}{1.2.\partial x\partial y^2}\Delta y + \text{etc.}..$$

zwischen zwey Gränzen, deren erstes Glied z ist, die ihnen etwa folgenden aber die Form $p\Delta x^m\Delta y^n$ haben.

Da nun $\frac{\partial\partial V}{\partial x\partial y}$, so wie V, gar nicht von Δx und Δy abhängt, als welche ganz willkührlich sind, sondern allein eine Function von x, y ist, welches auch z ist, so muß seyn

$$\frac{\partial\partial V}{\partial x\partial y} = z$$

weil in den Gränzausdrücken außer z weiter keine von Δx, Δy unabhängige Glieder sind.

Man setze den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x} = W$, so ist W eine Function von x, y, und

$$\frac{\partial W}{\partial y} = z$$

Multiplicirt man hier auf beiden Seiten mit ∂y, so erhält man linker Hand das Differential von W, y allein veränderlich gesetzt, und durch Integration

$$W = \int z \partial y$$

wo $\int z \partial y$, wie gewöhnlich, das Integral von $z \partial y$ in Bezug auf y, dessen Differential der Factor zu z ist, anzeigt, und die Constante, welche im Allgemeinen eine beliebige Function von x, das bey der Integration als unveränderlich betrachtet wurde, seyn kann, unter dem Zeichen $\int z \partial y$ mit begriffen wird.

Es ist demnach

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int z \partial y$$

also, wenn man auf beiden Seiten mit ∂x multiplicirt, wodurch linker Hand das Differential von V als einer bloßen Function von x erhalten wird, durch Integration

$$V = \int \partial x \int z \partial y$$

wo das Zeichen $\int \partial x \int z \partial y$ dem einfachen Zeichen $\int z \partial y$ analog ist, und die durch die Integration nach x hineingebrachte, unter $\int \partial x \int z \partial y$ mit zu verstehende Constante im Allgemeinen eine willkührliche Function von y ist. Ganz auf ähnliche Art wird auch $V = \int \partial y \int z \partial x$ gefunden.

Man erhält also V, wenn man die Formel $z \partial x \partial y$, worin statt z sein Werth in x und y gesetzt ist, zweymal nach einander, nämlich einmal in Bezug auf y, das andere Mal in Bezug auf x, oder auch umgekehrt das erste Mal in Beziehung auf x, das andere Mal in Beziehung auf y, das ist, so integrirt, daß jedesmal nur die eine der beiden unbestimmten x, y

als veränderlich, die andere hingegen als constant betrachtet wird. Diese gedoppelte Integration zeigt man dadurch an, daß man $V = \int\int z\partial x\partial y$ schreibt, welches Zeichen also den obigen $\int\partial x\int z\partial y$ und $\int\partial y\int z\partial x$ gleichgeltend ist. Die zur Vervollständigung der successiven Integrale beyzufügenden Constanten erhalten ihre Bestimmung dadurch, daß V sowohl für $x = 0$, als für $y = 0$ verschwinden muß. Dieses hat zur Folge, daß, wenn man mit der Integration nach y anfängt, nicht allein $\int z\partial y$ für $y = 0$, sondern auch $\int\partial x\int z\partial y$ für $x = 0$ verschwinden muß. Verschwindet nämlich $\frac{\partial V}{\partial x}$ oder $\int z\partial y$ für $y = 0$, so verschwindet auch V oder $\int\partial x\int z\partial y$ für $y = 0$, weil y in V nicht anders vorkommt als in $\frac{\partial V}{\partial x}$. Daß eben so, wenn man mit der Integration nach x anfängt, $\int z\partial x$ für $x = 0$ verschwinden müsse, ist leicht einzusehen.

Wenn man, wie bisher angenommen ist, das über dem Rechtecke $APMQ = xy$ stehende Solidum sucht, so sind x und y nicht weiter von einander abhängig. Das ist aber nicht mehr der Fall, sobald die Basis des Körpers innerhalb des Winkels YAX anders als durch die den geraden AX, AY parallelen geraden QM, PM begränzt wird. Indeß drücken auch in diesem Falle die Formeln $\int\partial x\int z\partial y$ und $\int\partial y\int z\partial x$ das Volumen eines Körpers, welcher ganz oder zum Theil von der durch N gehenden krummen Fläche begränzt wird, oder eines Abschnittes desselben aus. Sieht man nämlich x in der Gleichung für die krumme Fläche als unveränderlich an, so gilt sie für die Curve, welche der Durchschnitt der krummen Fläche mit der Ebene PMN ist. Die Ordinate dieser Curve ist NM oder z, die Abscisse PM oder y, also $\int z\partial y$ im allgemeinen die Area eines Schnittes des Körpers mit einer auf die Axe der x in dem unbestimmten Abstande x vom An-

fange der Abscissen senkrechten Ebene. Daher stellt nach (1) $\int\partial x\int z\partial y$ den Inhalt eines unbestimmten Stücks des Körpers, welches zwischen zwey auf die Axe der x senkrechten und parallelen Ebenen enthalten ist, dar, nur mit dem Unterschiede, daß $\int z\partial x$ jetzt, eine Function von x wird, deren vollständige Bestimmung von der Figur der Basis des Körpers abhängt. Auf gleiche Weise drückt $\int\partial y\int z\partial x$ den Inhalt eines unbestimmten Stücks des Körpers zwischen zwey auf der Axe der y senkrechten und unter sich parallelen Ebenen aus. Die Formel $\int\int z\partial x\partial y$ stellt also in allen Fällen das Volumen eines Körpers oder eines körperlichen Abschnittes zwischen zwey parallelen Ebenen dar, wofern nur die successiven Integrale zwischen den gehörigen durch die Begränzung des Körpers bestimmten Gränzen genommen werden. — Daß die Formeln $\int\int x\partial y\partial z$, $\int\int y\partial x\partial z$ dasselbe leisten, wird man leicht aus dem Vorigen abnehmen.

4. Exempel. Es ist ADB (Fig. 51.) ein gleichseitiger Kegel, welcher mit der Axe DC parallel in LKL geschnitten ist. Man sucht das Kegelstück KLBL, dessen Gränzen der hyperbolische Schnitt LKL, das Segment der Grundfläche LBL und das Stück der Kegelfläche KLBL sind.

Man nehme den auf LL senkrechten Durchmesser der Grundfläche, AB zur Abscissenaxe, den Mittelpunct der Grundfläche C zum Anfange der Coordinaten, so ist, wenn h die Höhe des Kegels, CD, und a den Halbmesser der Grundfläche bezeichnet, die Gleichung für die Kegelfläche

$$aa(h-z)^2 = hh(xx+yy)$$

wie man aus 35. in dem Artikel, Krumme Fläche, leicht findet, wenn man daselbst h—z statt x und z statt x schreibt. Hieraus ist

$$z = \frac{h}{a}\left(a - \sqrt{(xx+yy)}\right)$$

Es sey EDE ein Schnitt durch die Axe dem Schnitte LKL parallel, so ist, wenn V den Inhalt des Solidums ECDKPL bezeichnet,

$$V = \frac{h}{a} \iint \partial x \partial y \left(a - \sqrt{(xx + yy)}\right)$$

Man sehe zuerst x und ∂x als unveränderlich an, integrire also nach y, so daß

$$V = \frac{h}{a} \int \partial x \int \partial y \left(a - \sqrt{(xx + yy)}\right)$$

so ist aus dem Art., Integralformel, 57. u. 50.

$$\int \partial y \left(a - \sqrt{(xx + yy)}\right) = ay - \frac{1}{2} y \sqrt{(xx + yy)}$$
$$- \frac{1}{2} xx \log \frac{y + \sqrt{(xx + yy)}}{\text{const.}}$$

Die Constante kann hier eine Function von x seyn. Um das Stück des Kegels zu haben, welches über dem unendlich schmalen trapezförmigen Streifen PLlp der Grundfläche steht, muß man das gefundene Integral von $y = 0$ bis $y = PL = \sqrt{(aa - xx)}$ erstrecken, wodurch

$$\int \partial y \left(a - \sqrt{(xx + yy)}\right) = \frac{1}{2} a \sqrt{(aa - xx)}$$
$$- \frac{1}{2} x^2 \log \frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{x}$$

folglich

$$V = \frac{1}{2} h \int \partial x \sqrt{(aa - xx)} - \frac{h}{2a} \int x^2 \partial x \log \frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{x}$$

wird.

Den ersten Theil des Integrals hat man aus 57. 49. in dem Art., Integralformel; den andern Theil sucht man nach der Formel $\int Z \partial X = ZX - \int X \partial Z$, indem man $\partial X = x^2 \partial x$ nimmt. So wird

$$\int x^2 \partial x \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x} = \frac{1}{3} x^3 \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x}$$

$$- \frac{1}{3} \int x^3 . \partial . \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x}$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x} + \frac{1}{3} a \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

Das in $\frac{1}{3}a$ multiplicirte Integral setze man unter die Form $aa\int \frac{(xx:aa)(\partial x:a)}{\sqrt{(1-xx:aa)}}$, so ergiebt sich das Integral $\int \frac{(xx:aa)(\partial x:a)}{\sqrt{(1-xx:aa)}}$ aus Integralformel, 62., wenn man $\frac{x}{a}$ statt des dortigen x, also $\sqrt{\left(1-\frac{xx}{aa}\right)}$ statt z schreibt. Man erhält auf diese Weise

$$V = \frac{1}{3} hx \sqrt{(aa-xx)} + \frac{1}{6} aah . \text{Ang. sin} \frac{x}{a}$$

$$- \frac{1}{6} \frac{hx^3}{a} \log \frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x}$$

Das Integral verschwindet für $x = 0$ wie es seyn muß, wenn das Solidum in EDE anfangen soll. Man bemerke hiezu, daß der Logarithme einer unendlich großen Zahl zwar selbst unendlich, aber ein Unendliches von einem unendlich niedrigen Grade ist, und in 0^3 multiplicirt wird.

Setzt man $x = a$, so erhält man den vierten Theil des Kegels, DCBE, $= \frac{1}{8}\pi aah$. Hiervon V abgezogen, so bleibt das Solidum KPBL, welches verdoppelt das Segment KLBL giebt. Es wird

$$\text{Segm. KLBL} = \frac{1}{3}\,aah\,\text{Ang.}\cos\frac{x}{a} - \frac{2}{3}\,hx\sqrt{(aa-xx)} + \frac{1}{3}\,\frac{hx^3}{a}\log\frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x}$$

Hier ist $aa\,\text{Ang.}\cos\frac{x}{a} - x\sqrt{(aa-xx)}$ der Inhalt des Kreisabschnittes LBL, und $h\sqrt{(aa-xx)} - \frac{hx^2}{a}\log\frac{a+\sqrt{(aa-xx)}}{x}$ der Inhalt des hyperbolischen Abschnittes LKL: daher ist

Segm. KLBL

$$= \frac{1}{3}\,CD \times \text{Segm. LBL} - \frac{1}{3}\,CP \times \text{Segm LKL}$$

so groß nämlich, als der Unterschied der beiden Kegelstücke DLBL und DLKL, wovon jenes die Grundfläche LBL, Höhe CD, dieses die Grundfläche LKL, Höhe CP hat.

5. Kepler hat sich viele Mühe gegeben, einen solchen Abschnitt eines geraden Kegels wie KLBL zu cubiren, allein es ist ihm nicht damit geglückt. Man sehe seine Noua Stereometria doliorum Blatt O3. und seinen Auszug aus der uralten Messe-Kunst Archimedis. S. 43. Nr. 55.

Noch Dechales sagt Geom. pract. Lib. XI. Prop. XXIX. Cor. 2. im zweyten Theile des Mund. math. Esset optabilius, cognoscere soliditatem portionis conicae comprehensae plano axi parallelo. Und doch scheint es, als habe diesem Schriftsteller die zuletzt gegebene geometrische Bestimmung des Raums KLBL nicht entgehen können, da er Lib. VIII. Propos. XII. den Satz hat: Omnis quantitas, cuius elementa decrescunt in ratione duplicata altitudinum est tertia pars quantitatis inte-

grae, und das Corollarium beyfügt: Omne cylindricum omnis conici eiusdem altitudinis triplum est. Freylich fehlte es an der Bestimmung der hyperbolischen Area, von welcher Kepler sagt, daß sie noch nicht erfunden sey. Kepler sowohl als Dechales suchten die Cubirung eines solchen Abschnittes, wie KLBL, zum Behuf der Visirung liegender, nicht voller Fässer.

6. Es sey jetzt der Inhalt des über dem Rechtecke AM (Fig. 50.) sich ausbreitenden, von den Ebenen ZAQ, NMQ, NMP, ZAP eingeschlossenen Theils der krummen Fläche S, so ist S eine Function von x und y, und es wird auf ähnliche Art wie vorhin dargethan, daß das krummlinige Viereck Nrtn

$$= \frac{\partial\partial S}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^3 S}{1.2.\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y$$

$$+ \frac{\partial^3 S}{1.2.\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta x^2 + \text{etc.} \ldots$$ ist. Man lege

durch N (Fig. 52, wo die Bezeichnungen dieselben wie in Fig. 50 sind) eine berührende Ebene, welche die Ebenen Mr, rs, sn, nM in den geraden NR, RT, TV, VN schneide, und ziehe noch die Chorden Nr, rt, tn, nN, so wie auch Nt. Sind nun Δx, Δy klein genug genommen, daß das Stück Nrtn der krummen Fläche gegen die Ebene der x, y entweder durchaus hohl, welchen Fall die Zeichnung darstellt, oder durchaus erhaben ist, so fällt das krummlinige Trapezium Nrtn zwischen zwey Gränzen, von denen die kleinere die Summe der beiden Dreyecke Nnt und Nrt, die größere die Summe der drey Vierecke NRTV, RTtr, TVnt und der beiden Dreyecke NRr und NVn ist.

Wir wollen mit der Bestimmung der größeren Gränze den Anfang machen.

Wenn ϑ den Neigungswinkel der berührenden Ebene gegen die Ebene der x, y bezeichnet, so ist der

Inhalt des Vierecks NRTV $=$ Musm $\times$ sec ϑ (Projection, 13.) $= \Delta x \Delta y \sec \vartheta$. Ist nun

$$\partial z = p\partial x + q\partial y$$

die Differentialgleichung für die krumme Fläche, wo p und q Functionen von x und y sind, so ist tang ϑ $= \sqrt{(p^2 + q^2)}$ (Krumme Fläche, 114.), also sec $\vartheta =$ $\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ und NRTV $= \Delta x \Delta y \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$

Ferner ist

ΔNVn $= \frac{1}{2}$Vn. Mm

Trap. RTtr $= \frac{1}{2}$(Rr $+$ Tt). us $= \frac{1}{2}$(Rr $+$ Tt). Mm

also ΔNVn $+$ Trap. RTtr $= \frac{1}{2}$(Vn $+$ Rr $+$ Tt). Mm

und eben so

ΔNRr $+$ Trapez VTtn $= \frac{1}{2}$(Vn $+$ Rr $+$ Tt). Mu

also ΔNVn $+$ ΔNRr $+$ Trap. RTtr $+$ Trap. VTtn $= \frac{1}{2}$(Vn $+$ Rr $+$ Tt) (Mm $+$ Mu).

Da für die berührende Ebene, in so fern der Punct N sich nicht ändert, $\frac{\partial z}{\partial x}$, und $\frac{\partial z}{\partial y}$ unveränderlich sind, so sind die Werthe der Coordinaten Vm, Ru, Ts folgende

$$Vm = z + \frac{\partial z}{\partial x} . \Delta x$$

$$Ru = z + \frac{\partial z}{\partial y} . \Delta y$$

$$Ts = z + \frac{\partial z}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} . \Delta y$$

Hieraus und aus den Werthen von mn, ur, ts, welche in (3) gegeben sind, werden die Werthe von Vn, Rr, Tt, erhalten, und es wird

$\frac{1}{2}$(Vn $+$ Rr $+$ Tt)(Mm $+$ Mu) $=$

$$-\tfrac{1}{2}(\Delta x + \Delta y)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\Delta y^2 + \text{etc.}\right)$$

Die höchsten Glieder dieses gehörig entwickelten Ausdrucks sind von der dritten Ordnung in Beziehung auf $\Delta x . \Delta y$: daher ist die größere Gränze

$$\Delta x \Delta y \sqrt{(1+p^2+q^2)} + L\Delta x^3 + M\Delta x^2\Delta y + N\Delta x\Delta y^2 + O\Delta y^3 + \ldots$$

wo L, M, N, O Functionen von x und y sind.

Die kleinere Gränze zu finden bemerke man, daß weil $\frac{\partial z}{\partial x}$ aus der Gleichung für die krumme Fläche $= p$ und $\frac{\partial x}{\partial y} = q$ ist,

$$mn = z + p\Delta x + \frac{\partial p}{1.2.\partial x}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 p}{1.2\,3\partial x^2}\Delta x^3 + \ldots$$

$$ur = z + q\Delta y + \frac{\partial q}{1.2.\partial y}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 q}{1.2.3\partial y^2}\Delta y^3 + \ldots$$

$$st = z + p\Delta x + q\Delta y + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x^2 + 2\frac{\partial p}{\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial q}{\partial y}\Delta y^2\right) + \text{etc.}\ldots$$

wird.

Den Inhalt des Dreyecks Nnt kann man nach (Projection, 16.) finden, wenn man bemerkt, daß $\frac{1}{2}Mm\,(ts - mn)$ die Area der Projection des Dreyecks Nnt auf die Ebene Mn, $\frac{1}{2}ms\,(mn - MN)$ die Area der Projection auf die Ebene Mt ist. Es wird nämlich

$$\Delta Nnt = \tfrac{1}{2}\sqrt{(Mm^2 . ms^2 + Mm^2\,(ts - mn)^2 + ms^2\,(mn - MN)^2)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Delta x\Delta y\sqrt{\left(1 + \left(q + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial y}\Delta y + \ldots\right)^2 + \left(p + \frac{\partial p}{1.2.\partial x}\Delta x + \ldots\right)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} + P \Delta x^2 \Delta y + Q \Delta x \Delta y^2 + \text{etc.} \ldots$$

wo P, Q Functionen von x und y sind.

Eben so wird die Area des Dreyecks Nrt

$$= \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \sqrt{\left(1 + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(q + \frac{\partial q}{1.2.\partial y} \Delta y + \ldots\right)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} + P' \Delta x^2 \Delta y + Q' \Delta x \Delta y^2 + \text{etc.} \ldots$$

Daher ist die kleinere Gränze

$$\Delta x \Delta y \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} + (P + P') \Delta x^2 \Delta y + (Q + Q') \Delta x \Delta y^2 + \text{etc.} \ldots$$

Hieraus wird auf ähnliche Art wie in (3) geschlossen

$$\frac{\partial \partial S}{\partial x \partial y} = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)},$$

mithin

$$S = \iint \partial x \partial y \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

wo wegen der gedoppelten Integration das in (3) bemerkte zu berücksichtigen ist.

Auch hier läßt sich zeigen, daß $\iint \partial x \partial y \sqrt{(1 + pp + qq)}$ durch die gehörige Begränzung der Integrale in allen Fällen den Inhalt der ganzen krummen Oberfläche eines Körpers oder eines Theils derselben ausdrückt, nicht bloß in dem hier zum Grunde gelegten Falle einer rectangulären Basis. Die Ausführung davon findet aber in dem gegenwärtigen Werke wegen ihrer Umständlichkeit keinen Platz.

7. Exempel. Es ist ABCD (Fig. 53.) ein Rechteck, auf dessen Ebene das bey C rechtwinklige Dreyeck BCE über BC senkrecht errichtet ist. Eine gerade Linie, welche sich an AD und BE so hinbewegt, daß sie AD und BE immer proportionirt schneidet, beschreibt eine krumme Fläche, deren Inhalt gesucht wird.

Es sey PR die beschreibende gerade in irgend einer Lage. Man ziehe RQ senkrecht auf BC und verbinde PQ. Weil vermöge der Voraussetzung AP:PD = BR:RE, und nach der Construction BR:RE = BQ:QC, so ist AP:PD = BQ:QC, und, weil AD = BC, AP = BQ, QC = PD, also PQ der CD parallel. Mithin ist die Ebene PQR der Ebene ECD parallel, folglich BQP ein rechter Winkel, so wie APQ. Von einem willkührlichen Puncte N der PR ziehe man an PQ die senkrechte NM, so ist NM auch auf der Ebene ABCD perpendikular. Man setze AP = x, PM = y, MN = z, so ist, weil BC:CE = AP (= BQ):RQ, wenn BC:CE = 1:m gesetzt wird, RQ = mx. Ferner ist AB(= PQ):RQ = PM:MN, also AB = a gesetzt, $z = \frac{mxy}{a}$ die Gleichung für die krumme Fläche. Hieraus folgt

$$p = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{my}{a}$$

$$q = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{mx}{a}$$

folglich, wenn das unbestimmte Stück der krummen Fläche, dessen Projection auf ABCD das Rechteck AP × PM ist, S heißt

$$S = \frac{1}{a} \iint \partial x \partial y \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)}$$

Man integrire zuerst in Beziehung auf y, so wird

$$S = \frac{1}{a} \int \partial x \int \partial y \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)}$$

Nun ist (Integralformel, 57. 50.)

$$\int \partial y \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)} =$$

$$\tfrac{1}{2} y \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)}$$

$$\frac{aa + mmxx}{2m} \log \frac{my + \sqrt{(aa + mmxx + mmyy)}}{\sqrt{(aa + mmxx)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$$

so wird $S = a \iint \frac{\partial x \partial y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$

Integrirt man hier zuerst in Bezug auf y, so wird

$$S = a \int \partial x \int \frac{\partial y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$$

Es ist

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}} = \text{Arc. sin} \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}} + \text{Const.}$$

und das Integral von $y = PL = \sqrt{(ax - xx)}$ bis $y = PQ = \sqrt{(aa - xx)}$ zu erstrecken. Dadurch erhält man

$$S = a \int \partial x \, \text{Arc. cos} \sqrt{\frac{x}{a + x}}$$

Es ist

$$\int \partial x \, \text{Arc. cos} \sqrt{\frac{x}{a + x}} = x \, \text{Arc. cos} \sqrt{\frac{x}{a + x}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} \int \frac{x^{\frac{1}{2}} \partial x}{a + x}$$

Dadurch wird

$$S = ax \, \text{Arc.cos} \sqrt{\frac{x}{a + x}} + a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^2 \, \text{Arc.sin} \sqrt{\frac{x}{a + x}}$$

wo keine Constans hinzukommt, weil für $x = 0$, auch $S = 0$ ist. Setzt man $x = a$, so erhält man das von den Quadranten AB, BD und der Curve DRA eingeschlossene Stück der Kugelfläche $= aa$, wie in dem Artikel, Florentinische Aufgabe, 7. gefunden ist, wo aber zur Vergleichung bemerkt werden muß, daß dort der Quadrant, welcher hier DCA heißt, zur Grundfläche gemacht worden ist.

9. Es kann zum Behuf der Integration oder in anderer Hinsicht nöthig oder nützlich seyn, in die Formeln

$$\iint z\partial x\partial y \text{ und } \iint \partial x\partial y \sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}$$

statt x, y ein Paar andere veränderliche Größen t, u, wovon jene Functionen sind, wodurch dann auch z eine Function dieser Größen wird, einzuführen, und dann die Integration zuerst entweder nach t und darauf nach u oder umgekehrt vorzunehmen. Hierbey darf man aber nicht in den obigen Formeln statt ∂x, ∂y gerade zu ihre in t, u, ∂t, ∂u ausgedruckten Werthe substituiren, sondern es müssen die zu substituirenden Werthe der Bedingung untergeordnet seyn, daß bey der jedesmaligen Integration eine der veränderlichen Größen als constant betrachtet wird.

Bezieht man die Puncte einer Curve BM durch rechtwinklige Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, auf die Axe AX, und zieht der Ordinate PM die pm unendlich nahe, ferner MR, mr, innerhalb der Parallelen PM, pm der AX parallel, so ist das Element des Flächenraums der Curve das Elementarrechteck $PMRp = y\partial x$. Dies selbst aber besteht aus unendlich vielen Elementarrechtecken, wie $MRrm = \partial x\partial y$. Der Flächenraum der Curve ist also das Doppelintegral $\iint \partial x\partial y$, wo offenbar, wenn man zuerst nach y integrirt, ∂x als constant zu betrachten ist.

Bezieht man hingegen die Puncte der Curve durch Ordinaten $CM = u$, die von einem Puncte C ausgehen, und durch veränderliche Winkel $ACM = t$ auf die der Lage nach unveränderliche ACX, so ist, wenn Cm der CM unendlich nahe gezogen wird, und aus C mit CM, Cm innerhalb des Winkels MCm die unendlich kleinen Kreisbogen MN, mn beschrieben werden, das Element der Area der Elementarsector $CMN = \frac{1}{2}u^2\partial t$; dieser selbst aber besteht wieder aus unendlich vielen krummlinigen Elementartrapezen MNmn

und $\iint \partial t \partial u \times$

$$\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right)\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}$$

wo z, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ auch Functionen von t und u sind, die durch die Substitutionen der in t und u ausgedruckten Werthe von x und y erhalten werden.

Die Werthe von $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ und $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ lassen sich auch aus denen von $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial u}$ zusammensetzen. Es ist nämlich, in so fern z eine Function von x und y ist,

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y$$

und in so fern x und y Functionen von t und u sind

$$\partial x = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\partial u$$

$$\partial y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\partial u$$

also

$$\partial z = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right)\partial t$$
$$+ \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right)\partial u$$

Aber wenn z eine Function von t und u ist, so hat man

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\partial u$$

folglich, weil t und u nicht von einander abhängen,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

Hieraus wird

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}$$

Werden diese Werthe substituirt, so wird der Ausdruck für die Oberfläche

$$\iint \partial t \partial u \surd\Big[\Big(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\Big)^2 + \Big(\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Big)^2 + \Big(\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\Big)^2\Big].$$

10. Exempel. In der Gleichung für den geraden Kegel (4)

$$z = \frac{h}{a}(a - \surd(xx + yy))$$

setze man $x = a \sin t \cos u$, $y = a \sin t \sin u$, so wird $z = h - h \sin t$ und das Volumen $a^2 h \iint \partial u \partial t \sin t \cos t (1 - \sin t)$; die Oberfläche $a(aa + hh)^{\frac{1}{2}} \iint \partial t \partial u \sin t \cos t$, wo die Integrale, wie man leicht findet, von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}\pi$ und von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ zu erstrek-

ken sind, um das ganze Volumen und die ganze gekrümmte Seitenfläche zu haben.

Integrirt man zuerst nach t, so werden die Integrale innerhalb der angegebenen Gränzen $\frac{1}{6}a^2h\int\partial u$ und $\frac{1}{2}a(aa+hh)^{\frac{1}{2}}\int\partial u$; hiervon geben die Integrale von $u=0$ bis $u=2\pi$ das Volumen $\frac{1}{3}\pi a^2h$ und die gekümmte Seitenfläche $\pi a\sqrt{(aa+hh)}$ wie bekannt.

Der Körper sey ein gerades parabolisches Konoid mit elliptischer Grundfläche, für welchen

$$\frac{xx}{aa}+\frac{yy}{bb}+\frac{z}{c}=1$$

wo a und b die halben Axen der Grundfläche, c die Höhe des Körpers sind. Setzt man $x=a\sin t\cos u$, $y=b\sin t\sin u$, so wird $z=c\cos t^2$; und das Volumen $abc\iint\partial t\partial u\sin t\cos t^3$. Hiervon ist das erste Integral von $t=0$ bis $t=\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}abc\int\partial u$ und das zweyte Integral nach u von $u=0$ bis $u=2\pi$, $\frac{1}{2}\pi abc$.

Die gekrümmte Oberfläche des Konoids wird $\iint\partial u\partial t\sin t\cos t\sqrt{(a^2b^2+4c^2\sin t^2(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2))}$ wenn die Integrale innerhalb der vorigen Gränzen genommen werden. Das Doppelintegral ist aber eben so wenig als das in dem Art. Sphäroid, 32. durch einen endlichen Ausdruck angebbar.

Ist $a=b$, also das Konoid ein durch Drehung einer halben Parabel um ihre Axe entstandenes, so wird

die vorige Formel $a\int\int \partial u \partial t \sin t \cos t \sqrt{(a^2 + 4c^2 \sin t^2)}$. Es ist $a\int \partial t \sin t \cos t \sqrt{(a^2 + 4c^2 \sin t^2)}$ von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{a}{12c^2}(a^2 + 4c^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^4}{12c^2}$. Dies mit ∂u multiplicirt und dann von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ integrirt giebt die gekrümmte Oberfläche des Konoids $= \frac{\pi a}{6c^2}(a^2 + 4c^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi a^4}{6c^2}$, welches mit Complanation, Ex. 2. bey gehöriger Vergleichung übereinstimmt.

11. Da die in (9) gewiesene Transformation der Formel $\partial x \partial y$ oder allgemeiner dieser $M\partial x \partial y$, wo M eine Function von x, y ist, auf geometrischen Gründen beruht, so folgt hier die analytische Herleitung derselben, welche Euler zuerst gelehrt hat.

Gesetzt also, man führe statt der veränderlichen Größe y, in Beziehung auf welche man die Formel $M\partial x \partial y$ zuerst zu integriren vorhat, eine neue u ein, indem man statt y eine gegebene Function von x, welches bey der ersten Integration als unveränderlich betrachtet wird, und von u substituirt, so ist allgemein

$$\partial y = P\partial x + Q\partial u$$

wo P und Q Functionen von x und u sind; hier aber, wo x während der Integration nach y als unveränderlich angesehen wird, $\partial y = Q\partial u$. Dadurch verwandelt sich die Formel $M\partial x \partial y$ in $M'Q\partial x \partial u$, wo M' der Werth ist, welcher aus M durch Substitution des Werths von y in x und u hervorgehet. Die Formel $M'Q\partial x \partial u$ ist nun zweymal nach einander so zu integriren, daß bey der Integration nach einer der beiden veränderlichen x, u jedesmal die andere als unveränderlich angesehen wird.

Führt man aber, ehe man die Integration nach x unternimmt, noch eine neue veränderliche t ein, indem man statt x eine gewisse Function dieser veränder-

lichen und der bey der Integration nach x als constant betrachteten u setzt, so ist wieder allgemein

$$\partial x = R\partial t + S\partial u$$

wo R und S Functionen von t und u sind, hier aber wegen der momentanen Unveränderlichkeit von u, $\partial x = R\partial t$. Hierdurch wird, wenn M″ und Q′ die Werthe von M und Q sind, welche durch Elimination von x entstehen, aus der Formel $MQ\partial x\partial u$ diese $MQ'R\partial t\partial u$, in der nun weiter keine veränderlichen Größen als t und u sind, und welche zweymal, nämlich einmal in Beziehung auf u, das andere mal in Beziehung auf t, oder auch in umgekehrter Ordnung zu integriren ist.

Führt man nun statt x, y zugleich zwey neue veränderliche t, u, von denen jene Functionen sind, ein, so ist

$$\partial x = R\partial t + S\partial u$$
$$\partial y = T\partial t + V\partial u$$

Vorher war $\partial y = P\partial x + Q\partial u$, also wenn man statt x seinen Werth in t, u substituirt, wodurch Q zu Q′, und $\partial x = R\partial t + S\partial u$ wird,

$$\partial y = PR\partial t + (Q' + PS)\partial u.$$

Wird diese Formel mit $\partial y = T\partial t + V\partial u$ identisch gemacht, so ergiebt sich daher der Werth von Q′. Es ist nämlich wegen der Unabhängigkeit der beiden t und u von einander

$$T = PR$$
$$V = Q' + PS$$

und daraus $Q' = \dfrac{RV - ST}{R}$, also $Q'R\partial t\partial u = \partial t\partial u(RV - ST)$, und dies ist der gesuchte statt $\partial x\partial y$ in die Formel $M\partial x\partial y$ zu bringende Werth.

Da

$$R = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right),\ V = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right),\ S = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right),\ T = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

so ist $\partial t \partial u (RV - ST) =$

$$\partial t \partial u \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) \right\}$$

welches mit (9) übereinstimmt.

Vertauscht man in der gefundenen Formel t und u gegenseitig, welches wegen der Gleichungen

$$\partial x = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\partial u$$

$$\partial y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\partial t + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\partial u$$

die dadurch nicht geändert werden, verstattet ist, so erhält man $\partial t \partial u \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) \right\}$ welche Formel das Entgegengesetzte der vorigen ist. Man hat es also immer durch Vertauschung der Benennungen in seiner Gewalt, statt $\partial x \partial y$ eine positive Formel in t und u zu setzen. Man kann aber dieser Vertauschung sich ganz überheben, wenn man die Formel jedesmal positiv nimmt, weil dieses in dem Falle einer negativen Formel mit der Vertauschung auf eins hinausläuft.

12. Die vorigen Formeln für das Volumen und die Oberfläche eines Körpers begreifen diejenigen für die ähnlichen Bestimmungen an einem durch Drehung entstandenen Körper unter sich, wie sich schon aus den Beyspielen in (10) abnehmen läßt, und jetzt noch besonders gezeigt werden soll.

Es sey also BND (Fig. 56.) irgend eine einfach gekrümmte Curve *), durch deren Drehung um die in ihrer Ebene liegende Axe der z, AZ, ein runder Kör-

*) Sollte auch ursprünglich eine doppelt gekrümmte Curve der Entstehung einer Drehungsfläche zum Grunde gelegt seyn, so läßt sich ihr immer eine einfach gekrümmte Curve, durch deren Drehung um eine in ihrer Ebene liegende Axe dieselbe Fläche erzeugt werden kann, substituiren.

per entsteht, dessen Volumen und Oberfläche gesucht werden. Die Gleichung für die begränzende krumme Fläche ist in diesem Falle $z = \varphi(xx + yy)$, wo φ das Functionszeichen ist, wie aus: Krumme Fläche, 39, folgt.

Man setze statt der veränderlichen x, y ein Paar neue t, u, wovon diese den Abstand $NQ = AM$ irgend eines Puncts der krummen Fläche von der Drehungsaxe anzeigt, t aber den Winkel MAP bedeutet, unter welchen die u gegen die Ebene der x, z geneigt ist. Man hat also $x = u\cos t$, $y = u\sin t$, mithin $z = \varphi(u^2)$. Ferner ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -u\sin t; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \cos t$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \sin t; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = u\cos t$$

und es wird $\partial t \partial u \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right\} =$

$-u\partial t\partial u$, wofür man $+u\partial t\partial u$ nimmt (11.). Daher ist für das Volumen $\iint z\partial x\partial y = \iint uz\partial u\partial t = 2\pi\int uz\partial u$, wenn man das Integral nach t von $t=0$ bis $t = 2\pi$ nimmt, um es über die ganze Oberfläche rings um AZ zu erstrecken. Integrirt man jetzt nach u theilweise, so wird

$$2\pi\int uz\partial u = \pi u^2 z - \pi\int u^2\partial z.$$

Dieser Ausdruck giebt das Volumen des ringförmigen durch die Drehung des Trilineums BMN um AZ beschriebenen Körpers. Der erste Theil desselben ist der durch die Drehung des Rechtecks AMNQ beschriebene Cylinder, daher ist der durch Drehung von ABNQ beschriebene runde Körper $= \pi\int u^2\partial z$.

Die Oberfläche des runden Körpers wird, weil $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = 0$ also $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\partial u = \partial z$ ist, aus (9) =

$$\int\int u\,\partial t\,\sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)} = 2\pi\int u\,\sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)}$$

wenn das erste Integral nach t innerhalb der angegebenen Gränzen genommen wird. Hier ist $\sqrt{(\partial u^2 + \partial z^2)}$ das Element des Bogens BN.

Die gefundenen Formeln stimmen mit denen in den Artikeln, Cubirung und Complanation, nach gehöriger Vertauschung der Bezeichnungen überein.

13. Zuweilen kann es zur Berechnung des Volumens und der Oberfläche eines Körpers vortheilhafter seyn, statt parallelepipedaler Elemente pyramidale oder auch keilförmige zu betrachten, und den Körper aus solchen zusammen zu setzen. Obwohl nun die hierauf Bezug habenden Differentialformeln sich unmittelbar aus der zum Grunde gelegten Entstehungsart des Körpers, und zwar gemeiniglich kürzer als vermittelst des in (11) auseinander gesetzten Princips aus den für parallelepipedale Elemente geltenden Formeln herleiten lassen, so soll doch hier, um die Anwendung jenes Princips noch mehr ins Licht zu setzen, in den nun noch folgenden Beyspielen solches allein gebraucht werden.

14. Es ist ACB (Fig. 57.) einer der drey Quadranten, welche den Octanten einer Kugelfläche, deren Mittelpunct C, Halbmesser CA = CB ist, begränzen, und zugleich die orthographische Projection dieses Octanten auf die Fläche jenes Quadranten. FG, DE sind die Halbmesser und zugleich die Projectionen von Quadranten zweyer kleineren auf ACB senkrechten Kugelkreise, deren Pol B ist: FE ist ein Stück des Durchmessers und zugleich die Projection von einem Theile eines kleineren gleichfalls auf ACB senkrechten Kreises, dessen Pol H ist, und der den Kreis DE in E berührt, den Kreis FG aber in dem Puncte F, wo dieser dem Quadranten BC begegnet, schneidet. Man sucht den Inhalt des Stücks der Kugelfläche, welches dem Trilineum EFG der Projection entspricht.

Es sey BMN die Projection des Quadranten eines größten Kugelkreises, welcher den Kreisen FG, FE, CA in L, M, N begegne. Man setze den Bogen BM = t, den Winkel CBN = u, den Halbmesser der Kugel Kürze halber = 1, so sind die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes M, BCA zur Ebene der y, z genommen $x = \sin t \cos u$, $y = \sin t \sin u$, $z = \cos t$, folglich

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \cos t \cos u; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = - \sin t \sin u$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \sin t \cos u; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \cos t \sin u$$

und

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \sin t \cos t$$

mithin statt $\partial x \partial y$ zu setzen $\partial t \partial u \sin t \cos t$. Nun ist, wenn S das unbestimmte Stück FLM der Kugelfläche bezeichnet, aus (8.)

$$S = \iint \frac{\partial x \partial y}{z}$$

also

$$\begin{aligned} S &= \iint \partial t \partial u \sin t \\ &= \int \partial u \int \partial t \sin t \end{aligned}$$

wenn zuerst nach t integrirt werden soll. Integrirt man wirklich, und nimmt das Integral so, daß es für $t = BL = BG = BF = a$ verschwindet, so wird

$$S = \int \partial u (\cos a - \cos t).$$

Man verbinde HF, HM durch Bogen größter Kreise, setze $BH = b$, $HM = HE = HF = c$, und den Winkel $BHM = \omega$, so giebt das sphärische Dreyeck BHM

$$\cos t = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \omega$$

also

$$\begin{aligned} S &= \int \partial u (\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \omega) \\ &= u(\cos a - \cos b \cos c) - \sin b \sin c \int \partial u \cos \omega \end{aligned}$$

In demselben sphärischen Dreyeck BHM, worin der Winkel HBM $= 90° - u$, ist

$$\operatorname{tang} u = \frac{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \omega}{\sin c \sin \omega}$$

folglich

$$\frac{\partial u}{\cos u^2} = \frac{(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \omega)\partial \omega}{\sin c \sin \omega^2}$$

Aber

$$\cos u = \frac{\sin c \sin \omega}{\sin t}$$

Daher

$$\partial u = \frac{\sin c(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \omega)\partial \omega}{\sin t^2}$$

und

$$-\partial u \sin b \sin c \cos \omega =$$
$$-\frac{\partial \omega \sin b \sin c^2 \cos \omega(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \omega)}{1 - (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \omega)^2}$$

Sondert man in dem Differentialfactor zu $\partial \omega$ die darin enthaltenen Ganzen vermittelst der Division des Zählers durch den Nenner ab, und zerlegt den rückständigen ächten Bruch in Partialbrüche, deren Nenner die Factoren des Nenners sind, so wird

$$-\partial u \sin b \sin c \cos \omega = -\partial \omega \cos c$$
$$+\frac{(\cos b + \cos c)(1 + \cos b \cos c)\partial \omega}{2(1 + \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \omega)}$$
$$-\frac{(\cos b - \cos c)(1 - \cos b \cos c)\partial \omega}{2(1 - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \omega)}$$

und durch Integration nach (Integralformel, 123.)

$$S = u(\cos a - \cos b \cos c) - \omega \cos c$$
$$+\frac{1 + \cos b \cos c}{2} \operatorname{Ang.cos} \frac{\sin b \sin c + (1 + c f b\, c f c) c f \omega}{1 + \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \omega}$$

und

$$CF = \frac{R^2 - r^2}{2h} + \frac{1}{2}h = \frac{RR - rr + hh}{2h}$$

$$CD = \frac{R^2 - r^2}{2h} - \frac{1}{2}h = \frac{RR - rr - hh}{2h}$$

folglich

$$\varrho = \sqrt{\left(\left(\frac{RR - rr + hh}{2h}\right)^2 + r^2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{[(R+r)^2 + h^2][(R-r)^2 + h^2]}}{2h}$$

Ferner ist

$$\sin a = \sin BG = \frac{FG}{CA} = \frac{r}{\varrho}$$

$$\cos a = \cos BG = \frac{CF}{CA} = \frac{RR - rr + hh}{2h\varrho}$$

$$\cos b = \cos BH =$$

$$\cos BCH = \cos FED = \frac{DE}{FE} = \frac{R}{\sqrt{(RR + hh)}}$$

$$\tang b = \tang BH = \frac{FD}{DE} = \frac{h}{R}$$

und aus dem bey B rechtwinkligen sphärischen Dreyeck BFH,

$$\tang \beta = \frac{\tang b}{\sin a} = \frac{h\varrho}{Rr}$$

$$\cos c = \cos a \cos b = \frac{R(RR - rr + hh)}{2h\varrho\sqrt{(RR + hh)}}$$

$$\tang \alpha = \frac{\cot \beta}{\cos c} = \frac{2r\sqrt{(RR + hh)}}{RR - rr + hh}$$

also

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tang \alpha^2)}} = \frac{RR - rr + hh}{RR + rr + hh}$$

und

und

$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{(RR+hh)}}{r}$$

Hierdurch wird, wenn man zur Abkürzung $CF = \frac{RR - rr + hh}{2h} = e$ setzt, und zugleich bemerkt, daß $(\pi - \alpha)\cos c = 2(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha)\cos c$ ist, erhalten Trilin. $EFG = \frac{1}{2}\pi\varrho e$

$$- \frac{2R\varrho e}{\sqrt{(RR+hh)}} \text{Arc. tang} \frac{\sqrt{(RR+hh)}}{r}$$

$$+ \varrho\varrho \text{Arc. tang} \frac{h\varrho}{Rr}.$$

In den Aufgaben aus der Körperlehre von Lehmus (Halle und Berlin, 1811. 8.) ist diese Aufgabe die letzte. Ihre Auflösung nimmt dort 6 Octavseiten ein. Zur Vergleichung ist zu bemerken, daß die hier gefundene Fläche FGE die Hälfte des dortigen F ist.

15. In (Fig. 58.) ist ABCD der Octant einer Kugel. Über AE, einem Stücke des Halbmessers AC, ist in der Ebene des Quadranten ACB der Halbkreis AME beschrieben, und über diesem als Grundfläche ein halber gerader Cylinder errichtet, dessen gekrümmte Seitenfläche der Kugelfläche in der Curve GNA begegnet. Man sucht den Inhalt des von GNA und dem Bogen GA des Quadranten DA begränzten Stücks der Kugelfläche.

Durch N, einen beliebigen Punct des gemeinschaftlichen Durchschnitts der Kugel- und Cylinderfläche führe man den Kugelschnitt LNOP dem Quadranten DCB parallel, also senkrecht auf ACB und ACD, so schneidet die Ebene desselben die Cylinderfläche in der Seitenlinie NM, und, wenn NP verbunden wird, so ist der Kugelfläche Durchschnitt mit einer durch GA und NP gelegten Ebene

der Quadrant eines größten Kreises, ANQ, und CQ der NP, so wie PL der CD parallel.

Der Bogen AN heiße t, der Winkel NAB, dessen Maaß der Bogen BQ ist, u, der Halbmesser der Kugel a, so sind die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes N

$$x = CP = a\cos t$$
$$y = PM = a\sin t \cos u$$
$$z = MN = a\sin t \sin u$$

also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -a\sin t; \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = -a\sin t \sin u; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = a\cos t \cos u$$

und

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = aa\sin t^2 \sin u$$

also kommt $aa\partial t\partial u \sin t^2 \sin u$ statt $\partial x\partial y$.

Wird nun das Bilineum NA durch S bezeichnet, so ist (8.)

$$S = a\iint\frac{\partial x\partial y}{z}$$

d. i. nach Substitution der Werthe von $\partial x\partial y$ und z

$$S = aa\iint\partial t\partial u \sin t:$$

und wenn man das Integral nach t zuerst und so nimmt, daß es für $t = 0$ verschwindet,

$$S = aa\int\partial u(1 - \cos t).$$

Nennt man den Abstand CF des Mittelpuncts F der Grundfläche des Cylinders vom Mittelpuncte der Kugel b, so ist $FA = FE = FM = a - b$, $FP = b - x = b - a\cos t$, folglich im Kreise um F

$$(b - a\cos t)^2 + a^2\sin t^2 \cos u^2 = (a - b)^2$$

woraus

$$a(1+\cos t)\sin u^2 = 2b$$

also

$$1+\cos t = \frac{2b}{a\sin u^2}$$

sich ergiebt.

Da nun $1-\cos t = 2-(1+\cos t)$, so wird

$$S = 2aau - 2ab\int\frac{\partial u}{\sin u^2}$$

also nach (Integralformel, 109.)

$$S = 2aau + 2ab\cot u + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constans bemerke man, daß in A, wo die Fläche anfängt, $t = 0$, also aus der obigen Gleichung zwischen u und t, $\sin u^2 = \frac{b}{a}$ ist. Dieses giebt $\cot u = \sqrt{\frac{a-b}{b}}$ und

$$\text{Const.} = -2aa\,\text{Arc.}\sin\sqrt{\frac{b}{a}} - 2a\sqrt{(a-b)b}$$

Es ist also vollständig

$$S = 2aa\left(u - \text{Arc}\sin\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + 2ab\cot u$$
$$- 2a\sqrt{(a-b)b}.$$

Für $u = \frac{1}{2}\pi$ erhält man hiernach

$$\text{Bilin. GLANG} = 2aa\,\text{Arc}\cos\sqrt{\frac{b}{a}} - 2a\sqrt{(a-b)b}.$$

Fällt E in C, so ist $b = a - b = \frac{1}{2}a$, und man erhält die Fläche DRAO (Fig. 54.) $= \frac{1}{2}\pi aa - aa$, also weil der Octant der Kugelfläche $= \frac{1}{2}\pi aa$, DRAB $= aa$, wie in (8.).

16. Verlangt man die in der Kugel enthaltene cylindrische Fläche GNAME selbst, so setze man den Winkel EFM $= \varphi$, so ist $x = b - (a-b)\cos\varphi$, $y = (a-b)\sin\varphi$, also

$$z = \sqrt{(aa - xx - yy)} = 2(a-b)^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{2}}\ \cos\frac{1}{2}\varphi$$

Da die Cylinderfläche sich abwickeln und in eine Ebene ausbreiten läßt, so findet man das Differential des unbestimmten Stücks derselben GEMN, welches W heißen mag, wie einer einfach gekrümmten Curve, deren Abscisse der Bogen EM des Umfangs der Grundfläche, die zustimmende senkrechte Ordinate aber NM $= z$ ist. Es ist also, weil EM $= (a-b)\varphi$

$$\partial W = x(a-b)z\partial\varphi$$

$$= 2(a-b)^{\frac{3}{2}}\ b^{\frac{1}{2}}\ \cos\frac{1}{2}\varphi\partial\varphi$$

also

$$W = 4(a-b)^{\frac{3}{2}}\ b^{\frac{1}{2}}\ \sin\frac{1}{2}\varphi$$

ohne Constans, weil W mit φ zugleich verschwindet. Für $\varphi = \pi$ erhält man hieraus die Fläche GNAME $=$ $4(a-b)^{\frac{3}{2}}\ b^{\frac{1}{2}}$, also, wenn $b = \frac{1}{2}a$, die Fläche DRALC (Fig. 54.) $= aa =$ DAB.

17. Um das Volumen des in der Kugel enthaltenen Theils des Cylinders, GEMA, zu finden, heiße der veränderliche Winkel EAM t, und der Radius AM u, so ist

$$x = CP = a - u\cos t$$
$$y = PM = u\sin t$$
$$z = NM = \sqrt{(2au\cos t - uu)}$$

also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = u\sin t;\quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\cos t$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \sin t; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = u\cos t$$

und

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = u,$$ mithin statt

$\partial x \partial y$ zu substituiren $u\partial t\partial u$. Nun ist, wenn das unbestimmte Stück des Cylinders GNAME durch Z bezeichnet wird

$$Z = \iint z \partial x \partial y$$

d. i.

$$Z = \iint u\partial t\partial u \sqrt{(2au\cos t - uu)}$$
$$= \int \partial t \int u\partial u \sqrt{(2au\cos t - uu)}$$

Da für ein unveränderliches t

$$\partial . (2au\cos t - uu)^{\frac{3}{2}} = 3a\cos t\partial u(2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}}$$
$$- 3u\partial u(2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}}$$

so wird

$$\int u\partial u(2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}} = a\cos t\int \partial u(2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{1}{3}(2au\cos t - uu)^{\frac{3}{2}}$$

Aber (Integralformel, 58. 55)

$$\int \partial u(2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}} = \frac{u - a\cos t}{2}(2au\cos t - uu)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{aa\cos t^2}{2} \text{ Ang. cos } \frac{a\cos t - u}{a\cos t}$$
$$+ \text{Const.}$$

Demnach

$$\int u\partial u\sqrt{(2au\cos t - uu)} = \frac{1}{2}a^3\cos t^3 \text{ Ang. cos } \frac{a\cos t - u}{a\cos t}$$
$$- \frac{1}{6}(3a\cos t - 2u)(a\cos t + u)\sqrt{(2au\cos t - uu)}$$
$$+ \text{Const.}$$

In A, wo Z anfängt, ist $u = 0$, daher Const. $= 0$. In M ist $u = AE.\cos EAM = 2(a-b)\cos t$. Dadurch wird innerhalb dieser Gränzen

$$\int u\partial u\sqrt{(2au\cos t - uu)} = \frac{1}{2}a^3 \cos t^3 \text{ Ang.}\cos\frac{2b-a}{a}$$
$$- \frac{1}{3}(4b-a)(3a-2b)(a-b)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \cos t^3.$$

Dieses mit ∂t multiplicirt, dann integrirt, und das Integral so genommen, daß es für $t = 0$ verschwindet, giebt Z. Da nun

$$\int\partial t \cos t^3 = \int\partial t\left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t\right)$$
$$= \frac{3}{4}\sin t + \frac{1}{12}\sin 3t = \sin t - \frac{1}{3}\sin t^3$$

welches für $t = 0$ verschwindet, so wird

$$Z = \left(\sin t - \frac{1}{3}\sin t^3\right)\left\{\frac{1}{2}a^3 \text{ Ang.}\cos\frac{2b-a}{a}\right.$$
$$\left.- \frac{1}{3}(4b-a)(3a-2b)\sqrt{(a-b)b}.\right\}$$

Für $t = \frac{1}{2}\pi$ erhält man hieraus das Volumen des ganzen in der Kugel enthaltenen Cylinderstücks GNAME

$$= \frac{1}{3}a \text{ Ang.}\cos\frac{2b-a}{a} - \frac{2}{9}(4b-a)(3a-2b)\sqrt{(a-b)b}$$

welches für $b = \frac{1}{2}a$ wird $\frac{1}{6}\pi a^3 - \frac{2}{9}a^3 =$ CLAODR (Fig. 54.). Demnach, weil $\frac{1}{6}\pi a^3$ der Octant der Kugel, das Stück desselben DRALCB $= \frac{2}{9}a^3$, wie Bossut gefunden hat. Man sehe den Art. Florentinische Aufgabe, 16—19.

18. Die bisherigen Beyspiele werden hinreichend seyn, um die Anwendung des in (11.) nach Euler erklärten Substitutionsverfahrens zu erläutern. Ich bemerke nur noch, daß man, anstatt die in (14.) und (15.) zum Grunde gelegten Ausdrücke für S zu gebrauchen, welche schon auf die Kugel sich beziehen, auch die Formeln für S aus dem allgemeinen Ausdrucke für die Oberfläche eines Körpers in (9.) vermittelst der Ausdrücke der Coordinaten x, y, z in t und u hätte finden können, welches freylich etwas weitläufiger gewesen wäre.

19. Um Abschnitte von Körpern und krummen Flächen zu messen ist es nicht immer nöthig, Integralrechnung anzuwenden: man gelangt oft kürzer und netter zum Ziele, wenn man sie in meßbare Theile zerlegen oder sie als Theile eines für sich und in seinen übrigen Theilen meßbaren Ganzen darstellen kann. Die oben in (4.) und (14.) vorgekommenen Beyspiele bestätigen dieses. Hier zu ihnen noch ein drittes.

Es ist ABCD (Fig. 59.) wieder der Octant einer Kugel, deren Mittelpunct C, Halbmesser CA = CB = CD. EFG, HKL sind ein Paar den Quadranten ACD, BCD parallel geführte Schnitte, welche einander in MN schneiden. Man sucht sowohl den Inhalt des zwischen ihnen und dem Quadranten BA enthaltenen Stücks der Kugelfläche, KMF, als das Volumen des durch sie und jenen Quadranten abgeschnittenen Kugelstücks KMFN.

Man ziehe von B und A, als den Polen der Kugelkreise GMF, KML die Bogen BM, AM größter Kreise, und verlängere den letzteren bis an den Quadranten BD in O, so ist AO auch ein Quadrant. Man setze die Bogen BK $= \alpha$, AF $= \beta$ und den Halbmesser der Kugel $= r$, ferner die Winkel MAB $= \gamma$, MBA $= \delta$, BMO $= \zeta$, so ist CH $=$ EN $= r \sin \alpha$, CE $=$ HN $= r \sin \beta$ und

$$\text{Trilin. KMF} = \text{Trilin. BMF} + \triangle\text{BOM} - \text{Quadril. BKMO}$$
$$= r\delta(r - r\sin\beta) + r^2(\zeta - \delta) - r^2\gamma\sin\alpha$$
$$= r^2(\zeta - (\gamma\sin\alpha + \delta\sin\beta))$$

Für das Volumen des Kugelstücks KMFN ziehe man noch die Halbmesser CF, CK, CM und stelle sich an alle Puncte der Bogen KM, MF dergleichen gezogen vor, so entsteht ein Kugelausschnitt, begränzt von dem Sector KCF und den beiden Ausschnitten von Kegelflächen, CKM, CMF. Derselbe ist, wie man leicht einsieht, einer Pyramide gleich, deren Grundfläche so groß als das Stück der Kugelfläche KMF, und deren Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist. Er ist demnach $= \frac{1}{3} r^3 (\zeta - (\gamma \sin\alpha + \delta \sin\beta))$. Hiervon sind die beiden Kegelstücke CMFN, und CMKN abzurechnen, um das Solidum KMFN zu erhalten. Die Grundfläche des ersten Kegelstücks ist ein halber Kreisabschnitt MNF, seine Höhe CE. Das halbe Segment MNF findet sich aus dem ihm zugehörigen Winkel am Mittelpuncte MEF $= \delta$, und dem Halbmesser EF $= r\cos\beta$, $= \frac{1}{2} r^2 \cos\beta^2 (\delta - \sin\delta\cos\delta)$. Also ist das Kegelstück CMFN $= \ldots \frac{1}{6} r^3 \sin\beta \cos\beta^2 \times (\delta - \sin\delta\cos\delta)$. Eben so ist das Kegelstück CMKN $= \frac{1}{6} r^3 \sin\alpha \cos\alpha^2 (\gamma - \sin\gamma\cos\gamma)$. Daher das Kugelstück KMFN

$$= \frac{1}{6} r^3 (2\zeta - \gamma\sin\alpha(3 - \sin\alpha^2) - \delta\sin\beta(3 - \sin\beta^2)$$
$$+ \sin\alpha\cos\alpha^2\sin\gamma\cos\gamma + \sin\beta\cos\beta^2\sin\delta\cos\delta)$$

Es ist nun noch zu zeigen, wie die hier vorkommenden von α und β abhängigen Größen γ, δ und ζ durch diese bestimmt werden. Dieses geschieht mittels

des sphärischen bey O rechtwinkligen Dreyecks BOM, in welchem die Seite BO $= \gamma$, OM $= \alpha$, MB $= 90^\circ - \beta$, und die Winkel OBM $= 90 - \delta$ BMO $= \zeta$. Aus demselben ist

$$\cos\gamma = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

$$\cos\delta = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

$$\cos\zeta = \tang\alpha \tang\beta = \cos\gamma\cos\delta.$$

Sind statt der Abstände auf der Kugel BK und AF die Abstände der Kreise KLH und EFG vom Mittelpuncte der Kugel, CH $=$ a, und CE $=$ b, gegeben, so ist $r\sin\alpha = a$, $r\sin\beta = b$, und es wird

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{(rr - aa)}}$$

$$\cos\delta = \frac{a}{\sqrt{(rr - bb)}}$$

$$\cos\zeta = \frac{ab}{\sqrt{(rr - aa)(rr - bb)}}$$

Dadurch findet sich

$$\text{Trilin. KMF} = rr\,\text{Arc.}\cos\frac{ab}{\sqrt{(rr-aa)(rr-bb)}}$$

$$- ar\,\text{Arc.}\cos\frac{b}{\sqrt{(rr-aa)}} - br\,\text{Arc.}\cos\frac{a}{\sqrt{(rr-bb)}}$$

$$\text{Solid. KMFN} = \frac{1}{3}ab\sqrt{(rr-aa-bb)} + \frac{1}{3}r^3\zeta$$

$$- \frac{1}{6}a(3rr - aa)\gamma$$

$$- \frac{1}{6}b(3rr - bb)\delta$$

wo der Kürze wegen die Benennungen γ, δ, ζ beybehalten sind.

Man vergleiche die 45. und 46ste Aufgabe der in (14.) angezogenen Schrift.

20. Läßt sich die Formel $X\partial x$, welches das Differential eines unbestimmten Stücks eines Körpers darstellt (1.), nicht integriren oder giebt die Integration derselben kein für die Praxis brauchbares Resultat, so muß man sich der in dem Artikel, Quadratur, mitgetheilten Annäherungsmethoden bedienen.

Ist z. B. ein nicht ganz volles, gewöhnliches Faß, dessen Axe horizontal ist, zu visiren, so stelle man sich diese Axe als ein Stück der Abscissenlinie einer parabolischen Curve vor, und nehme die Ordinate derselben in irgend einem Puncte der Axe dem Kreisabschnitte proportional, welcher der Durchschnitt des vollen Faßraums mit einer in jenem Puncte auf die Axe senkrechten Ebene ist, so ist der angefüllte Raum des Fasses dem von der Axe, den beiden äußersten Ordinaten, und der Curve zwischen diesen eingeschlossenen Flächenraume proportional. Da sich nun bey einem Fasse wohl nicht leicht mehr als drey Ordinaten, nämlich die beiden äußersten und die mittlere bestimmen lassen, so muß man es bey der Bestimmung des Inhalts nach der ersten Cotesischen Formel bewenden lassen, und den Inhalt des Fasses, soweit es angefüllt ist, gleich setzen dem Producte aus der Summe der beiden Kreisabschnitte, welche die Durchschnitte des vollen Raums mit den Böden sind, und des vierfachen Kreisabschnitts, welcher der Durchschnitt desselben Raums mit einer mitten durch die Axe den Böden parallel gelegten Ebene ist, in den sechsten Theil der Axe oder der Länge des Fasses. Dieses ist die von Lambert (Beyträge, Th. I., S. 334.) gefundene Regel.

21. Zur Bestimmung des Inhalts einer krummen Fläche oder eines Stücks derselben kann man auf ähnliche Art verfahren, welches hier an der schiefen Kegelfläche erläutert werden soll.

In dem Artikel, Kegel, 22. ist das Differential eines Sectors der gekrümmten Seitenfläche eines ungleichseitigen Kegels gefunden worden. Wenn nämlich in der dortigen Figur (Fig. 3. des III. Th.) $AC = CB = a$, die Höhe des Kegels $DE = h$, der Abstand des Fußpuncts derselben vom Mittelpuncte der Grundfläche $CE = g$, der veränderliche Winkel am Mittelpuncte der Grundfläche $ACM = \varphi$, der dazu gehörige Sector der Kegelfläche $ADM = S$ gesetzt wird, so ist

$$\partial S = \frac{1}{2} a \partial \varphi \sqrt{(h^2 + (a - g \cos \varphi)^2)}$$

Dieses ist das Differential des Flächenraums einer Curve, an welcher die Abscisse $x = a\varphi$ und die ihr entsprechende (senkrechte) Ordinate $y = \frac{1}{2}\sqrt{(h^2 + (a - g \cos\varphi)^2)}$. Um also die halbe Kegelfläche zu haben muß man die Area jener Curve, welche zwischen den zu $x = 0$ und $x = a\pi$ gehörigen Ordinaten enthalten ist, suchen. Dieses auf eine annähernde Art nach den in dem Artikel, Quadratur, 144. 145. mitgetheilten Formeln, wovon die erste von Gauß herrührt, zu verrichten, hat man vor allen Dingen die Ordinaten $y^{(0)}$; $y^{(1)}$; ${}^1y$; $y^{(2)}$; y^1; $y^{(3)}$ und $y^{(4)}$, welche beziehungsweise den Abscissen 0; $\frac{1}{10}\pi a(5 - \sqrt{15})$; $\frac{1}{10}\pi a(5 - \sqrt{5})$; $\frac{1}{2}\pi a$; $\frac{1}{10}\pi a(5 + \sqrt{5})$; $\frac{1}{10}\pi a(5 + \sqrt{15})$ und πa zugehören, zu berechnen; für welche der Winkel φ die Werthe 0; $\frac{1}{10}\pi(5 - \sqrt{15})$; $\frac{1}{10}\pi(5 + \sqrt{5})$; $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{1}{10}\pi(5 + \sqrt{5})$; $\frac{1}{10}\pi(5 + \sqrt{15})$ und π hat. Diese Berechnung erleichtert man sich dadurch, daß man

$\frac{a - g\cos\varphi}{h} = + \operatorname{tang}\psi$ oder $-\operatorname{tang}\psi$ macht, je nachdem $a >$ oder $< g\cos\varphi$ ist, als wodurch $y = \frac{1}{2} a \sec\psi$ wird.

Nun sey zu einem Zahlenbeyspiel $a = 1$, $h = 4$, $g = 3$, so gehören nach der Decimaleintheilung des Quadranten oder des rechten Winkels folgende Werthe von φ und y zusammen.

φ	y
0^R, 0000000	2, 236068 $= y^{(0)}$
0, 2254033	2, 196036 $= y^{(1)}$
0, 5527864	2, 054293 $= {}^1y$
1, 0000000	2, 061553 $= y^{(2)}$
1, 4472136	2, 481625 $= y^1$
1, 7745967	2, 763420 $= y^{(3)}$
2, 0000000	2, 828427 $= y^{(4)}$

Diese Werthe geben in die Formeln des angezogenen Art., in welchen f (wegen $a = 1$) $= \pi$ ist, gebracht für die halbe Kegelfläche zwey Gränzen, eine kleinere und eine größere, welche verdoppelt die ganze Kegelfläche zwischen

$$\frac{5(y^{(1)} + y^{(3)}) + 8\,y^{(2)}}{9}\pi$$

und

$$\frac{y^{(0)} + y^{(4)} + 5({}^1y + y^1)}{6}\pi$$

einschließen. Die ausgeführte Rechnung giebt diese Werthe der Kegelfläche 14, 4492 und 14, 5268, zwischen welchen man, da die Fehler der angewandten Annäherungsformeln nahe gleich sind, das arithmetische Mittel nehmen, und ihm die Kegelfläche gleich setzen kann. Dieses giebt für dieselbe 14, 4880. Man kommt aber dem wahren Werthe näher, wenn man, weil das Ver-

hältniß der entgegengesetzten Fehler der Annäherungsformeln 3:4 ist, die Summe von $\frac{4}{7}$ der kleineren und von $\frac{3}{7}$ der größeren Gränze nimmt. Hierdurch findet sich die Kegelfläche 14,4825. In Mayers praktischer Geom. Th. V. §. 93. nro. 25. ist durch eine mühsamere Berechnung aus Gränzen, die etwas weiter als die obigen auseinander liegen, für dieselbe 14,4817 gefunden.

22. Von den Methoden, welche vor Erfindung der Integralrechnung angewandt worden sind, Körper und ihre Oberflächen auszumessen, sind die Artikel: Exhaustionsmethode, Cavaleri's Methode des Untheilbaren, Centrobaryca methodus, Ringförmiger Körper, nachzusehen. Der Guldin'schen Regel hat man sich auch wohl nach Erfindung der Integralrechnung da bedient, wo man mit der Integration einer irrationalen Differentialformel nicht fertig zu werden wußte. Hase gebraucht dieselbe z. B. noch, um den Inhalt eines Fasses, wenn die Krümmung der Dauben kreisförmig angenommen wird, zu berechnen, §. 76. u. folgg. seiner Doliorum Dimensio. Einen vortrefflichen Lehrbegriff der praktischen Stereometrie enthält Mayers praktische Geometrie in ihrem 5ten Theile, wovon die zweyte Ausgabe zu Göttingen 1820. erschienen ist. Zu bemerken sind noch:

Aufgaben aus der Körperlehre von Lehmus. Halle und Berlin, 1811. 8.

Hoßfelds niedere und höhere praktische Stereometrie. Leipzig, 1812. 4.

Mancherley brauchbare Aufgaben zur Ausmessung der Körper und ihrer Oberflächen finden sich auch im 2ten Theile von Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben. Berlin, 1807. 8.

Stereotomie, wörtlich: Körperschnitt, von στερεον, solidum, und τεμνω, seco, ist derjenige Theil der Stereometrie oder Körperlehre, welcher von den Durchschnitten der Oberflächen von Körpern, die einander ganz oder zum Theil durchdringen, handelt. Sie ist vorzüglich für die Lehre von den Gewölben in der Baukunst wichtig, findet aber auch in den Künsten mannichfache Anwendung.

Die Methode, welche in der Stereotomie vorzugsweise angewandt wird, ist die construirende oder graphische, da diese dem arbeitenden Künstler, welcher die Ergebnisse der Stereotomie benutzen will, am meisten zusagt sowohl wegen der Anschaulichkeit, die sie mit sich führt, als auch wegen der Leichtigkeit, womit die Uebertragung der Ergebnisse derselben in die Praxis geschieht, indem dazu weiter keine Vorbereitung nöthig ist. Weil aber bey den Körpern und ihren Oberflächen alle drey Dimensionen des Raums in Betracht kommen, so sind zur vollständigen Darstellung der Oberflächen und ihrer Durchschnitte im allgemeinen immer die Projectionen derselben auf zwey nicht parallele Ebenen erforderlich, welche der größern Einfachheit und Leichtigkeit wegen auf einander senkrecht genommen werden, und davon die eine in Beziehung auf die Ausübung horizontal, die andere vertical ist, dem schon längst eingeführten Gebrauche der Grund- und Profilrisse gemäß.

Um das Verfahren einigermaßen an einem Beyspiele kennen zu lernen, sey der Durchschnitt zweyer geraden aber ungleichen Cylinder, deren Axen sich rechtwinklicht schneiden, zu bestimmen.

Zu dem Ende sey das Rechteck ABCD (Fig. 60.) ein Durchschnitt des einen und andern Cylinders mit der Ebene durch die Axen EF, und GH, welche horizontal sey. Über AB, BC seyn aus den Mittelpuncten E und G mit den Halbmessern EA = EB, und GB = GC, Halbkreise beschrieben: diese sind die um AB und BC gedreheten und in die horizontale Ebene

niedergelegten Durchschnitte der über ABCD stehenden halben Cylinder mit verticalen über AB, BC aufgerichteten Ebenen. Auf den Verlängerungen von AB, CB sey BK = Bk so groß als BG der Halbmesser des kleineren Cylinders genommen, und durch K, k die LK, kI den Durchmessern AB, BC parallel gemacht, so berührt die letztere den Halbkreis BIC in I, so daß GI senkrecht auf BC ist. Durch L ziehe man mit der Axe EF eine parallele, welche der AB in M, der HG in N und der DC in O begegne, so ist N die horizontale Projection des höchsten Puncts in dem Durchschnitte beider Cylinderflächen, und MNO die Projection der den Durchschnitt in jenem Puncte berührenden.

Denn denkt man sich die Halbkreise ALB, BIC über AB, BC auf der Ebene der Zeichnung oder des Rechtecks ABCD senkrecht aufgerichtet, so fallen BK, Bk zusammen, LK, kI sind in einer horizontalen Ebene, welche die größere Cylinderfläche in der durch L gehenden Seitenlinie schneidet, die kleinere aber in der durch I gehenden Seitenlinie berührt. Diese Seitenlinien liegen zugleich in den verticalen Ebenen LMO, IGH, wovon jene der Axe EF parallel, diese durch die Axe HG selbst geht. Ihre Projectionen auf die Ebene des Rechtecks ABCD sind also die geraden MO, HG, folglich ist N die Projection ihres Durchschnitts, d. h. des höchsten Puncts des Durchschnitts beider Cylinderflächen auf dieselbe Ebene ABCD. Daß aber MO die horizontale Projection der diesen Durchschnitt in seinem höchsten Puncte berührenden ist, erhellt so. Die Ebene der LK, kI berührt bey der verticalen Lage der Halbkreise ALB, BIC den kleineren Cylinder; eine Ebene, welche den größeren Cylinder in der durch L gehenden Seitenlinie desselben berührt, ist auf den Halbmesser EL senkrecht, und wird von der berührenden Ebene durch I in jener Seitenlinie durch L geschnitten, die also den gemeinschaftlichen Durchschnitt beider Cylinderflächen in seinem

höchsten Puncte berührt. Nun ist MO die Projection dieser Seitenlinie, folglich die Projection der den Durchschnitt der Cylinderflächen in seinem höchsten Puncte berührenden. Zugleich erhellt, daß auch MO die horizontale Projection des Durchschnitts berühre.

Um noch andere Puncte der horizontalen Projection des Durchschnitts der beiden Cylinderflächen zu erhalten, schneide man auf BK und Bk von B aus die gleicher Stücke BP und Bp ab, ziehe durch P und p die PQ, pq parallel mit AB, BC bis an die Umringe der Halbkreise ALB und BIC. Durch Q und q ziehe man mit den Axen, EF, GH, parallelen, welche den Durchmessern AB, BC in R und r begegnen, einander selbst aber in S schneiden, so ist S in der gesuchten Projection.

Der Beweis ist dem vorigen, wodurch gezeigt ward, daß N in der horizontalen Projection des Durchschnitts der Cylinderflächen sey, ganz ähnlich.

Wird die horizontale Projection der berührenden an einem Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts der Cylinderflächen, welcher nicht der höchste ist, verlangt, so hat man die Durchschnitte der Ebenen, welche die Cylinderflächen in jenem Puncte berühren, mit der horizontalen Ebene ABCD zu suchen, welche man dadurch erhält, daß man die Durchschnitte der berührenden an zusammengehörigen Puncten Q, q der Halbkreise ALB, BIC mit den verlängerten AB und BC sucht, und durch diese parallelen mit den Axen EF und HG legt. Der Durchschnitt dieser parallelen ist ein Punct der gesuchten Projection, und da man einen zweyten in dem mit dem Puncte Q, q verbundenen Puncte S hat, so ergiebt sich die gesuchte Projection sehr leicht.

Die Kenntniß der horizontalen Abscissen und Ordinaten Gr, rS oder ER, RS so wie der zugehörigen verticalen Ordinaten qr oder QR an die verschiedenen

Puncte

Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts der Cylinderflächen reicht nebst der Kenntniß von der Lage der berührenden an jenen Puncten in sehr vielen Fällen für die Praxis hin. Oft ist aber auch die Abwickelung einer oder beider Cylinderflächen mit der darauf gezeichneten Curve des Durchschnitts nöthig. Diese auf den abgewickelten Cylinderflächen zu entwerfen ist mittelst der vorigen Zeichnung leicht. Die Bogen Bq, oder BQ werden die Abscissen, und rs oder RS die dazu gehörigen senkrechten Ordinaten der abgewickelten Curve.

Dieses Beyspiel wird den Gebrauch und Nutzen einer systematischen Abhandlung der Lehre von den Projectionen auf zwey coordinirte Ebenen der sogenannten Géometrie descriptive, hinlänglich vor Augen legen. Die Aufgabe, wovon hier ein besonderer Fall aufgelöst ist, läßt sich auch so abfassen: Aus der Projection einer doppelt gekrümmten Linie auf zwey Ebenen, die auf einander senkrecht sind, ihre Projection auf eine dritte auf jenen beiden senkrechte Ebene herzuleiten.

Die Curve des Durchschnitts beider Cylinderflächen ist übrigens ein Cykloimber, der Erklärung gemäß, welche davon in dem Artikel Cykloimber, gegeben ist. Ihre auf die Kreisebene BIC senkrechten, den Bogen Bq als Absissen zugehörigen Ordinaten sind nämlich diejenigen der durch die Endpuncte des Durchmessers BC gehenden einfach gekrümmten Curve BSNSC, welche den Abscissen Br zugehören, die mit denen an den Bogen Bq übereinkommen.

Die horizontale Projection des Durchschnitts der Cylinderflächen oder die Curve BSNSC näher kennen zu lernen, nehme man den Anfang der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in T, dem Durchschnitte der Axen, lasse TN die Axe der Abscissen x, und TE die Axe der horizontalen Ordinaten y seyn, so ist, wenn der Halbmesser des größern Cylinders a, des kleineren b heißt, die Gleichung für die krumme Oberfläche des größeren Cylinders

$$xx + zz = aa$$

die für die krumme Oberfläche des kleineren aber

$$yy + zz = bb$$

Hieraus folgt die Gleichung für die Projection des Durchschnitts beider Cylinderflächen auf die Ebene der x, y, d. i. für die Curve BSNSC

$$yy = xx - (aa - bb)$$

welche einer gleichseitigen Hyperbel angehört, deren Mittelpunct T, halbe Zwerchaxe TN ist.

Der hier betrachtete Fall des Durchschnitts zweyer senkrechten Cylinder kommt in der Baukunst vor, wenn ein kleineres Tonnengewölbe senkrecht an ein größeres, das von derselben Grundfläche aus sich erhebt, anläuft, und solches durchbricht, um in das größere Licht vermittelst des kleineren zu bringen.

Über die Stereotomie hat man ein weitläufiges Werk von Frezier unter dem Titel: La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou traité de Stereótomie. Strasbourg und Paris, 1737 — 39. in 3 Quartbänden. Dieses Werk umfaßt aber, wie schon der Titel zeigt, viel mehr, als die eigentliche Stereotomie. Ein daraus vom Verf. selbst besorgter Auszug ist unter dem Titel: Elémens de Stereótomie zu Paris, 1760. in 2 Octavbänden erschienen. Die Hälfte des ersten Theils hievon, von Kosmann übersetzt, ist zu Berlin, 1801. herausgekommen.

Sternfiguren, oder auch schlechthin **Sterne,** können diejenigen ebenen oder körperlichen Figuren genannt werden, welche entstehen, wenn auf die Seiten regulärer Vielecke gleiche gleichschenklige Dreyecke, oder auf die Seitenflächen der regulären Körper gleiche gleichseitige Pyramiden so gesetzt werden, daß daraus ein Polygon oder ein Polyeder mit regelmäßig abwechselnden aus- und einwärtsgehenden Winkeln und Ek-

ken, worunter die von jeder Art einander gleich sind, hervorgeht.

Es sey ABCDE (Fig. 61.) ein regelmäßiges Vieleck von n Seiten, über welchen die gleichen gleichschenkligen Triangel AFB, BGC, CHD, DIE EKA errichtet sind. Damit nun an den Winkelpuncten A, B, ... E einwärtsgehende Winkel entstehen, muß, wenn der Winkel an der Grundlinie der gleichschenkligen Dreyecke α gesetzt wird, $2\alpha + \frac{n-2}{n} . 180^\circ >$ seyn als 180°, also $\alpha > \frac{180^\circ}{n}$, d. i. größer als der halbe Centriwinkel des Vielecks. Wird also der Halbmesser des um das Polygon ABCDE beschriebenen Kreises a gesetzt, so muß $AF = \frac{1}{2} AB . \sec\alpha >$ seyn als $a . \tang \frac{180^\circ}{n}$, nämlich größer als die halbe Seite des um den Kreis beschriebenen Polygons von n Seiten, wie sich auch sonst leicht ergiebt. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist AFBGCHDIEKA eine Sternfigur oder ein (ebener) Stern mit 2 n Seiten und n auswärts- und eben so vielen einwärtsgehenden Winkeln, von denen jene sowohl als diese, jede für sich, unter einander gleich sind. Diese Gleichheit ist eine Folge von der Congruenz der Dreyecke AFB, BGC, ... u. s. w.

Die Spitzen des Sterns F, G, ... K sind, wie sich leicht erweisen läßt, vom Mittelpuncte L des um das Polygon ABCDE beschriebenen Kreises gleichweit entfernt, also auf dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser FL = GL .... = KL. Auch sind die Entfernungen FG, GH ..... KF je zweyer benachbarten Spitzen von einander gleich, geben also ein dem Polygon ABCDE ähnliches regelmäßiges Vieleck.

Die Summe der ausspringenden Winkel F + G + ... + K beträgt $n(180° - 2\alpha) = n . 180° - 2n\alpha$. Nun ist $2n\alpha > 360°$, also jene Summe $< (n-2) . 180°$. Die einspringenden Winkel an A, B ....E betragen zusammen $n(2\alpha + \frac{n-2}{n} . 180°) = 2n\alpha + (n-2) 180°$. Also die Summe aller Winkel des Sterns $= (2n-2) 180°$, wie es nach (Figur, 3) seyn muß.

Wenn $\alpha = \frac{360°}{n}$, also so groß als der Centriwinkel des Vielecks ABCDE ist, so werden die Seiten des Sterns AF, FB, BG u. s. w. die Verlängerungen je zweyer an zwey nächsten Winkelpuncten des Polygons liegenden, nicht zusammenstoßenden Seiten desselben bis zu ihrem Durchschnitt. Sterne dieser Art können, wenn die Anzahl ihrer Seiten ungerade ist, auch als eine besondere Art regelmäßiger Vielecke angesehen werden. S. Vieleck. Da bey ihnen jeder der auswärtsgehenden Winkel $= \frac{n-4}{n} . 180°$, so läßt sich aus dem gleichseitigen Dreyecke und dem Quadrat kein solcher Stern bilden.

Eine andere Art von Sternen als die bisher betrachtete entsteht, wenn (Fig. 62.) zwey ähnliche regelmäßige Vielecke ABCD und EFGH dergestalt in und um einen Kreis beschrieben sind, daß die Seiten des äußern den Kreis in den Winkelpuncten des innern berühren, und alsdann jede Seite des innern Vielecks so weit verlängert wird, bis sie die durch die ihr nächsten Winkelpuncte gehenden und gleichfalls verlängerten Seiten des äußeren Vielecks schneidet. Die so gebildete Sternfigur QAIFK ..... PEQ unterscheidet sich von den vorhin betrachteten dadurch, daß die Seiten

und die Entfernungen der Spitzen nicht alle unter einander gleich sind, sondern von jenen, wenn man sie nach der Ordnung zählt, die 1ste, 4te, 5te, 8te, 9te u. s. w., so wie die 2te, 3te, 6te, 7te u. s. w., diese aber, eine um die andere.

Man wird aus dem, was jetzt von den ebenen Sternen gesagt ist, sich leicht eine Vorstellung von den aus den regulären Körpern entstehenden körperlichen Sternen machen, und alsdann bey einiger Aufmerksamkeit finden, daß solcher Sterne, wo die Seitenflächen der auf eine Seitenfläche des regulären Körpers aufgesetzten Pyramiden Erweiterungen der Ebenen von den anstoßenden Seitenflächen des regulären Körpers sind, es nur zwey giebt, welche aus dem Dodekaeder und Ikosaeder ihren Ursprung nehmen. Der erste dieser Sterne läßt sich aber auch als ein Dodekaeder betrachten, dessen Seitenflächen reguläre Fünfecke der zweyten Art sind, dergleichen (Fig. 62.) eins zeigt, und worin jede Seite wie AB zweyen anderen DC, DE begegnet. Ein Stern anderer Art entsteht noch aus dem Ikosaeder, wenn man die an den drey Winkelpuncten jeder Seitenfläche des Ikosaeders liegenden Seitenlinien bis zu ihrem Durchschnitt verlängert, und diese Durchschnitte für die Gipfel der aufzusetzenden Pyramiden nimmt. Auch dieser Stern läßt sich als ein Dodekaeder, dessen Seitenflächen reguläre Fünfecke der zweyten Art sind, ansetzen. Es unterscheidet sich von dem nur gedachten darin, daß es zwanzig dreyseitige Ecken hat, da das vorige zwölf fünfseitige enthält. S. Vieleckiger Körper.

Litterarische Nachrichten über die Sterne finden sich in Kästners geom. Abhandl. Samml. I. Abh. 45. Kästner erwähnt der körperlichen Sterne nicht, da doch Kepler der beiden vorhin erwähnten regelmäßigen Sterne aus dem Dodekaeder und Ikosaeder in der Harmonice Mundi gedenkt, welche von Kästner angeführt wird.

Stetig, s. Continuum. Dem dort bemerkten füge man noch bey: 5) Die Stetigkeit einer Function besteht darin, daß ihre Werthe für unendlich kleine Änderungen der veränderlichen Größe sich unendlich wenig ändern. Gegentheils wird die Stetigkeit unterbrochen. Die Function tang x z. Exempel folgt von $x = 0$ bis $x = 90° - \omega$, wo ω so klein als man will seyn kann, dem Gesetze der Stetigkeit, für $x = 90°$ aber wird die Stetigkeit unterbrochen.

Storchschnabel, s. Pantograph.

Subcontraria sectio heißt der Wechselschnitt des schiefen Cylinders und Kegels, worüber die Artikel, Cylinder und Kegel, nachzusehen sind.

Subdupla ratio heißt bey den Alten ein Verhältniß wie a : 2a, dessen Vorderglied die Hälfte des Hintergliedes ist.

Subduplicata ratio ist das aus der Theilung eines Verhältnisses in zwey gleiche hervorgehende Verhältniß. Z. E. das Verhältniß $a : a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$, oder $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ ist das subduplicirte von a : b.

Subnormale ist an einer Curve derjenige Theil der Abscissenlinie, welcher zwischen der Ordinate zu dem Berührungspuncte und der Normale enthalten ist. S. Normale.

Subsecante ist an einer Curve das Stück der Abscissenaxe, welches die Ordinate zu dem Berührungspuncte und eine durch den Berührungspunct gezogene schneidende zwischen sich abschneiden. L'Huilier hat diese nicht unschickliche Benennung eingeführt. Principior. calc. different. et integral. expositio elementar. cap. V, §. 38.

Substitution besteht in der Einführung des sonst woher gegebenen oder angenommenen Werths einer

Größe in einen analytischen Ausdruck, welcher von derselben abhängig ist.

In der Algebra lassen sich die Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen auf dem Substitutionswege, d. i. dadurch auflösen, daß man den Werth einer dieser Größen durch die übrigen aus einer der gegebenen Gleichungen ausdruckt, und denselben in den andern Gleichungen, worin jene Größe vorkommt, substituirt, wodurch die Zahl der unbekannten Größen und der Gleichungen um eins vermindert wird.

Bey analytischen Zusammensetzungen können wiederholte Substitutionen vorkommen. Um z. E. $(a + b + c + d)^2$ zu entwickeln, macht man erst $(a + b)^2$, setzt darin $b + c$ statt b, und erhält so $(a + b + c)^2$, hierin setzt man $c + d$ statt c, und gelangt dadurch zu $(a + b + c + d)^2$. Die combinatorische Analysis macht in dem hier erwähnten Falle und in allen ihm verwandten die successiven Substitutionen entbehrlich. Bey der Substitution von Reihen in Reihen bewährt sich ihr ausgedehnter Nutzen ebenfalls.

Wiederholte Substitutionen werden auch oft angewandt, um eine Größe, welche in einer sehr verwickelten Relation zu andern steht, und daher auf directem Wege nur sehr mühsam oder vielleicht gar nicht bestimmt werden kann, nach und nach durch immer weiter getriebene Annäherung zu bestimmen, indem man statt des wahren Werths einen ihm nahe kommenden substituirt, und dadurch einen noch näheren Werth oder die Verbesserung des substituirten findet.

Subsuperparticularis ratio heißt in der älteren Arithmetik ein Verhältniß $m : m + 1$, dessen Hinterglied das Vorderglied, welches eine ganze Zahl und größer als 1 ist, um 1 übertrifft. Es ist das umgekehrte von superparticularis ratio, oder von

m + 1 : m. Im Lateinischen werden diese Verhältnisse nach dem Theile $\frac{1}{m}$ mit vorgesetztem sesqui benennt. Z. E. 5 : 4 heißt ratio sesquiquarta, 4:5 aber ratio subsesquiquarta. Man gebraucht diese Benennungen, so wie die im nächsten Art. angezeigten, nicht mehr.

Subsuperpartiens ratio ist ein Verhältniß wie m : m + n, wo m und n relative Primzahlen, jede > 1, sind, und m > n ist. Es ist das umgekehrte von superpartiens ratio oder von m + n : m. Die Benennung wird in beiden Fällen nach dem Bruche $\frac{n}{m}$ eingerichtet. Z. E. 5 : 3 heißt ratio superbipartiens tertias, 3 : 5 hingegen subsuperbipartiens tertias.

Subtangente ist an einer krummen Linie das Stück der Abscissenaxe, welches zwischen der bis zum Durchschnitt mit derselben verlängerten berührenden und der Ordinate zu dem Berührungspuncte liegt. S. berührende Linie. Den Ausdruck Subtangente hat nach Leibnitzens Bemerkung, Opp. T. III. p. 2?0., Huyghens zuerst gebraucht. — Werden die Ordinaten aus einem Puncte oder Pole gezogen, so versteht man unter Subtangente das Stück des im Pole auf die Ordinate an den Berührungspunct errichteten Perpendikels, welches die berührende abschneidet.

Subtraction, Abziehen, ist ein Rechnungsverfahren, wodurch aus einem Ganzen und dem einen Theile desselben der andere Theil gefunden wird. Dieser Theil ist der Unterschied des Ganzen und des ersteren Theils, oder der Überschuß jenes über diesen. Die Subtraction ist das entgegengesetzte der Addition. Sie wird entweder mit bestimmten Zahlen,

oder mit allgemeinen Größenzeichen vorgenommen. Die Größe, von welcher eine andere abgezogen wird, oder das Ganze heißt der Minuendus; die abzuziehende oder der gegebene Theil der Subtrahendus; der Unterschied, Überschuß oder der andere Theil heißt der Rest.

Bey der Subtraction bestimmter ganzen Zahlen, unbenannter oder benannter, wird der Unterschied auch in derselben Form ausgedruckt, welche das Ganze und der gegebene Theil haben, also in der dekadischen, wenn jene dekadisch ausgedruckt sind; in der dodekadischen, wenn Minuend und Subtrahend von dieser Form sind. Daß dieses auf die kürzeste und einfachste Weise geschehe, ist der Zweck der Rechnungsvorschriften, welche hier an einigen Beyspielen erläutert werden sollen.

785364	935478	640004
362152	871693	239479
423212	63785	400525

Die Einer werden unter die Einer gesetzt, damit alle gleichartigen Ziffern unter einander kommen. Man zieht die Einheiten jeder Classe oder Stelle, indem man bey den Einern anfängt, von den darüberstehenden ab, und setzt den Rest in dieselbe Stelle. Sind in einer Stelle des Minuendus nicht so viel Einheiten vorhanden, daß der Abzug geschehen kann, so nimmt man eine Einheit der nächst höheren Gattung, welche 10 solcher Einheiten gilt, als wovon der Abzug geschehen soll, hinzu. Fehlt die nächst höhere Gattung, so nimmt man eine Einheit der um zwey Stufen höheren Gattung, und bringt solche mit 9 Einheiten der nächst höheren Gattung und 10 Einheiten der Gattung, in welcher der Abzug geschieht, in Rechnung. Fehlt auch die um zwey Stufen höhere Gattung, so verfährt man auf eine ähnliche Art, indem man von den Einheiten der um drey Stufen höheren Gattung eine nimmt u. s. w. —

Statt die einer Ziffer des Minuendus, wovon der Abzug nicht geschehen kann, zugelegten 10 Einheiten als eine Einheit der nächst höheren Gattung von den Einheiten dieser oder der folgenden Gattungen des Minuendus abzurechnen, kann man sie auch mit der nächsthöheren Ziffer des Subtrahendus zugleich wieder wegnehmen, indem man diese um eins vermehrt abzieht.

Dieses Verfahren gewährt mehr Gleichförmigkeit und erfordert weniger Aufmerksamkeit als das erste, ist also für die Ausübung bequemer.

Beyspiele für die dodekadische Form.

9.	6.	11.	5.	10.	4
4.	2.	4.	3.	6.	1
5.	4.	7.	2.	4.	3

10.	6.	0.	0.	4.	7
4.	2.	0.	10.	8.	11
6.	3.	11.	1.	7.	8

Beyspiele für die dyadische Form.

```
110010110        100111001101
 10110011           110110111
---------        -------------
 11100011        1000000010110
```

Die Probe der Subtraction zu machen addire man die subtrahirte Zahl zu dem Reste, so muß die Summe dem Minuendus, als dem Ganzen, gleich seyn.

Von der Neuner- und Eilferprobe der Subtraction s. Rechnungsprobe.

Daß die Subtraction sich bequem in eine Addition der arithmetischen Complemente oder Ergänzungen verwandeln lasse, ist in dem Art., Complement, in Bezug auf Logarithmen erinnert. Es können aber auch sonst Fälle vorkommen, wo jene Verwandlung vortheilhaft ist. Z. E.

A	23478		D	14325
B	9543		E	8704
C	86204		F	24398
G	85675			
H	91296			
I	75602			
	~~3~~71798			

Um von der Summe der Zahlen A, B, C, die Summe der Zahlen D, E, F zu subtrahiren, werden statt dessen zu A, B, C die arithmetischen Ergänzungen von D, E, F zu 100000, welche sind G, H, I, addirt und von der Summe 100000 so viel mal weg geworfen, als arithmetische Ergänzungen sind, so entsteht das Gesuchte. Man wird den Grund hiervon bald auffinden, wenn man bemerkt, daß z. E. 8 von 15 subtrahirt eben so viel läßt als 8 + 2 von 15 + 2, wo 2 die arithmetische Ergänzung von 8 zu 10 ist.

Das Zeichen der Subtraction ist —, welches zwischen den Minuendus und Subtrahendus gesetzt wird.

Subtraction benannter Zahlen. Man subtrahirt die gleichnamigen Größen von einander, indem man bey den Einheiten der geringsten Sorte anfängt, und nach und nach zu den höheren fortgeht. Kann der Abzug bey einer Sorte nicht geschehen, so nimmt man eine Einheit der nächsthöheren Sorte, von welcher bekannt seyn muß, wie viel Einheiten der geringeren Sorte darauf gehen, dazu, und rechnet dieselbe von den Einheiten der nächsthöheren Sorte des Minuendus ab, oder nimmt sie wieder mit den Einheiten der nächsthöheren Sorte des Subtrahendus zugleich weg.

8347 Rthl.	15 gl.	7 pf.	648°	7′	11″
4958 "	20 "	10 "	293 "	9 "	8 "
3388 Rthl.	18 gl.	9 pf.	354°	10′	3″

Im zweyten Exempel sind die Einheiten: Ruthe, Fuß und Zoll des Duodecimalmaßes.

Subtraction der Brüche. S. Bruchrechnung und Decimalbruch.

Subtraction allgemeiner Größen oder algebraische. S. Buchstabenrechnung.

Subtraction der Verhältnisse, schicklicher Zerlegung der Verhältnisse. S. Verhältniß.

Subtrahendus. S. Subtraction.

Subtrahiren heißt den Unterschied zweyer gleichartigen Größen, oder, um wie viel die eine größer als die andere ist, finden.

Subtensa s. Chorde.

Subtriplicata ratio ist das durch Theilung eines Verhältnisses in drey gleiche entstehende Verhältniß. Wenn z. E. das Verhältniß a:b durch Einschaltung zweyer Mittelproportionalen in drey gleiche Verhältnisse getheilt wird, so entsteht die Progression a, $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, b, wo $a : a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} : b = a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}}$ $= \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ das subtriplicirte Verhältniß von a:b ist.

Subtriplum ist so viel als ein Drittel. Z. E. 2 ist das Subtriplum von 6. — Subtripla ratio ist ein Verhältniß, wie 2:6 oder 3:9, überhaupt jedes, das = 1:3 ist.

Summe ist eine Größe, welche mehreren anderen als ihren Theilen zusammengenommen gleich ist. Diese Summe, bey welcher jeder Theil durch sein Hinzukommen die anderen vergrößert, ist die Summe im eigentlichen Sinne, und heißt daher auch die arithmetische zum Unterschiede von der algebraischen Summe, welche in uneigentli-

chem Sinne Summe heißt, indem sie, bey dem Zusammenkommen entgegengesetzter Größen, auch eine Differenz seyn kann. Man gebraucht die algebraische Summe vorzüglich, um Sätze, welche man sonst theilen oder der beyzufügenden Einschränkungen und Bedingungen wegen sehr weitläufig ausdrucken müßte, kurz und doch allgemein auszudrucken. So wird in der Statik gesagt: daß beym Gleichgewichte mehrerer an einem Hebel wirkenden und in einer Ebene liegenden Kräfte die Summe ihrer Momente Null ist.

Summe einer Reihe von irgend einer endlichen Anzahl Glieder ist ein analytischer aus dieser Zahl und gegebenen Größen zusammengesetzter Ausdruck, dessen Werth dem Aggregat von so vielen Gliedern der Reihe, als die Zahl angiebt, gleich ist. — Die Summe einer Reihe von unendlich vielen Gliedern, wenn sie eine endliche Größe hat, ist entweder eine absolute Zahl, welcher sich das Aggregat der Glieder (die algebraische Summe, wenn die Glieder nicht durchaus einerley Vorzeichen haben) immer mehr nähert, je mehr Glieder zusammengenommen werden, oder wenn keine Annäherung zu einem bestimmten Werthe Statt hat, der Unterschied zweyer Reihen, deren Summen unendlich groß sind. — Nimmt die Summe einer Reihe immer fort zu, je mehr Glieder genommen werden, so ist die Summe der in's Unendliche fortgesetzten Reihe zwar unendlich groß, mag aber doch mit der Anzahl der Glieder oder einer Potenz derselben verglichen werden.

Beyspiele. I. Die Summe der arithmetischen Reihe $a;\ a+d;\ a+2d;\ \ldots\ldots\ a+(x-1)d$ ist $= \frac{1}{2}(2a+(x-1)d)x$.

Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen $1+4+9+16+\ldots\ldots+x^2$ ist $= \ldots\ldots \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$.

Die Summe der Producte je zweyer nächsten ungeraden Zahlen $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2x-1)(2x+1)$ ist $= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(2x-1)(2x+1) \times (2x+3)$.

Die Summe der Brüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{x(x+1)}$ ist $= 1 - \frac{1}{x+1}$.

Die Summe der geometrischen Reihe $a + ae + ae^2 + \ldots + ae^{x-1} = \frac{ae^x - a}{e-1} = \frac{a(e^x-1)}{e-1}$,

II. In einer geometrischen Reihe sey der Exponent e ein eigentlicher Bruch, so ist die Summe der ganzen ohne Ende fortgesetzten Reihe $a + ae + ae^2$ + etc. in inf. $= \frac{a}{1-e}$.

Die Summe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$ + etc. in inf. ist $= \frac{1}{6}\pi^2$, wo π der halbe Umfang des Kreises für den Halbmesser, Eins, ist.

Die Summe der reciproken Biquadrate der natürlichen Zahlenreihe $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4}$ + etc. in inf. ist $= \frac{1}{90}\pi^4$

Die Summe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} +$ etc. in inf. ist $= \frac{1}{12}\pi^2$

Die Summe der reciproken Biquadrate derselben Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen $\frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} +$ etc. in inf. ist $= \frac{7}{720}\pi^4$

Die Summe der Brüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$ etc. in inf. deren Nenner die doppelten Trigonalzahlen sind, ist $= 1$

Die Summe der Quotienten $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} +$ etc. in inf. ist $= \frac{1}{12}$

III. Die Summe der Reihe $1 - e + e^2 - e^3 + e^4 -$ etc. in inf. ist der Unterschied der Brüche $\frac{1}{1-e^2}$ und $\frac{e}{1-e^2}$, welcher ist $\frac{1-e}{1-e^2} = \frac{1}{1+e}$. Jeder von jenen beiden Brüchen ist für $e = 1$ unendlich groß, die Summe der Reihe in diesem Falle aber $= \frac{1}{2}$. Für $e > 1$ ist die Reihe eine divergirende, und das Wort Summe in diesem, wie in dem vorigen Falle so zu nehmen, wie in dem Artikel, Reihe, 34. angegeben ist.

Die Summe der Reihe $1 - 8x + 27x^2 - 64x^3 + 125x^4 -$ etc. in inf. ist der Unterschied der Brüche

$\frac{(1+x^2)(1+22x^2+x^4)}{(1-x^2)^4}$ und $\frac{8x(1+4x+x^2)}{(1-x^2)^4}$, deren jeder für $x = 1$ unendlich wird. Da aber jener Unterschied $= \frac{1-8x+23x^2-32x^3+23x^4-8x^5+x^6}{(1-x^2)^4}$ $= \frac{1-4x+x^2}{(1+x)^4}$, so ist die Summe der Reihe für $x=1$, $= -\frac{1}{8}$. Für $x > 1$ ist die Reihe einer divergente.

IV. Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen $1+4+9+16+$ etc. wächst ohne Gränzen. Da die Summe derselben von 1 bis $x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ $+ \frac{1}{6}x$ ist, so verhält sie sich zu $x \cdot x^2$ d. i. zu x^3 wie $\frac{1}{3} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2}$ zu 1, also für ein unendliches x wie $\frac{1}{3} : 1$ oder wie $1:3$.

Die Summe aller Würfel der natürlichen Zahlen von 1 bis x^3 verhält sich zu x^4 desto näher wie $1:4$, je größer x ist.

Wegen der hier angeführten Summen s. die Artikel: arithmetische Reihe, geometrische Reihe, Potenzen, rücklaufende Reihe.

Summirbare Reihe ist, deren Summe durch einen endlichen Ausdruck sich angeben läßt. Befaßt dieser Ausdruck jede beliebige Anzahl von Gliedern vom ersten an, so ist die Reihe allgemein summirbar. Aus dieser allgemeinen Summe ergiebt sich die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe immer, aber nicht umgekehrt aus der Summe von einer unendlichen An-

Anzahl Glieder stets die von einer endlichen Anzahl. Z. E. aus der Summe der Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} +$ etc. in inf. welche $= 2$ ist, läßt sich die Summe von n Gliedern derselben $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)}$ nicht ableiten. In andern Fällen aber kann dieses geschehen. Z. E. die Summe der ins Unendliche fortgeführten geometrischen Reihe $1 + e + e^2 + e^3 +$ etc. in inf. ist $= \frac{1}{1-e}$. Verlangt man die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe, so suche man die Summe der vom $(n+1)$ten Gliede an ins Unendliche fortgesetzten Reihe, welche ist $e^n + e^{n+1} + e^{n+2} +$ etc. in inf. $= e^n(1 + e + e^2 + e^3 +$ etc. in inf.$) = \frac{e^n}{1-e}$. Diese von jener abgezogen läßt die Summe der ersten n Glieder $1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1} = \frac{1-e^n}{1-e}$.

1. Da sich die allgemeine Auflösung des Problems: jede vorgelegte Reihe zu summiren, schwerlich je wird geben lassen, so hat man schon längst die Sache umgekehrt, und auf verschiedenen Wegen Reihen gesucht, welche sich summiren lassen, um in dem, was sich hierbey bemerken läßt, Mittel zur Summirung vorgegebener Reihen zu entdecken, wie man es sonst auch in der Mathematik macht. Die vorzüglichsten Verfahrungsarten zur Erfindung summirbarer Reihen möchten folgende seyn.

2. Wenn A, B, C, D, E, ... eine Reihe von Größen ist, welche immerfort abnehmen, so bilden die Unterschiede derselben A — B, B — C, C — D, D — E .... eine neue Reihe, deren Summe dem Überschusse des ersten über das letzte Glied der ersten Reihe gleich ist, wie denn (A — B) + (B — C) + (C — D) + (D — E) = A — E. Verschwindet also, wenn die Reihe A, B, C, D, ... ins Unendliche fortgesetzt wird, das letzte Glied, so ist die Summe der Unterschiede (A — B) + (B — C) + (C — D) + etc. in inf. bloß dem ersten Gliede A der zum Grunde gelegten Reihe gleich. Ferner bilden die Unterschiede A — C, B — D, C — E, ..., welche entstehen, wenn man von jedem Gliede der Reihe A, B, C, D, E .... das zweyte nach ihm abzieht, eine neue Reihe, deren Summe gleich ist dem Überschusse der Summe der beiden ersten Glieder der Grundreihe über die der beiden letzten Glieder, da (A — C) + (B — D) + (C — E) + (D — F) + (E — G) = A + B — (F + G). Verschwinden also bey Fortsetzung der ersten Reihe A, B, C, D .... ins Unendliche die beiden letzten Glieder derselben, so ist die Summe der Unterschiede (A — C) + (B — D) + (C — E) + etc. in inf. bloß der Summe der beiden ersten Glieder A + B gleich. Eben so ist, wenn man in der ersten Reihe die Unterschiede zwischen jedem Gliede und dem rten nach ihm nimmt, die Summe derselben so groß als die Summe der r ersten weniger der Summe der r letzten Glieder der ersten Reihe, folglich, wenn die letztere Summe bey Fortsetzung der Reihe ins Unendliche verschwindet, bloß der ersteren Summe gleich. Hiernach lassen sich aus einer einzigen Grundreihe eine große Menge summirbarer Reihen ableiten.

3. Legt man z. E. die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ + etc. in inf. zum Grunde, so sind die Unterschiede

der Glieder $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots$ und es ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} +$ etc. in inf. $= 1$, also, wenn man auf beiden Seiten mit 2 multiplicirt, die Summe der reciproken Trigonalzahlen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} +$ etc. in inf. $= 2$. Bricht man die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ mit dem $(n+1)$ten Gliede $\frac{1}{n+1}$ ab, so findet man auf diese Art die Summe der n ersten reciproken Trigonalzahlen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}$.

Nimmt man in der Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ + etc. in inf. wieder die Unterschiede, so wird $\frac{2}{3} + \frac{3}{18} + \frac{4}{60} + \frac{5}{150} +$ etc. in inf. $= 1$, also nach Multiplication mit $\frac{3}{2}$, die Summe der reciproken Pyramidalzahlen $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} +$ etc. in inf. $= \frac{3}{2}$. Die endliche Summe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1.2.3}{n(n+1)(n+2)}$ findet sich $= \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

Auf diese Weise lassen sich, wenn man weiter geht, die Summen der reciproken figurirten Zahlen von allen höheren Ordnungen finden.

4. Nimmt man in der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. in inf. die Unterschiede zwischen jedem Gliede und dem zweyten nach ihm, so wird $\frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} +$ etc. in inf. $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, also durch Division mit 2, $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} +$ etc. in inf. oder $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{5^2-1}$ + etc. in inf. $= \frac{3}{4}$, welches eine von Leibnitz gegebene Summation ist, die Jakob Bernoulli nach einer dem hier angewandten Verfahren ähnlichen und mit ihm auf einerley Grunde beruhenden Methode fand.

5. Statt des von Jakob Bernoulli gebrauchten Verfahrens, von irgend einer angenommenen unendlichen Reihe, deren Glieder unendlich abnehmen, sie selbst mit Ausschluß des ersten, oder der beiden ersten, oder der drey ersten Glieder u. s. w. zu subtrahiren, da dann der Unterschied dem ersten, oder den beiden ersten, oder den drey ersten Gliedern u. s. w. zusammen genommen gleich ist, setzte Moivre ein mehr analytisches, das er in den Miscell anal. Lib. VI. cap. 3. erklärt. Es besteht darin, irgend eine unendliche Reihe, deren Glieder nach den Potenzen der unbestimmten x fortschreiten, und in welcher die Coefficienten unendlich abnehmen, mit einem aus bestimmten

Größen und der unbestimmten x zusammengesetzten zwey- oder mehrtheiligen Factor zu multipliciren, dann diesen Factor o zu setzen, wodurch ein Werth von x sich ergiebt, welcher auch das Product aus der angenommenen Reihe in jenen Factor o macht. Legt man also der unbestimmten x diesen Werth bey, und setzt die ersten Glieder des Products auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, so ist die übrige unendliche Reihe den herübergesetzten Gliedern gleich.

6. Multiplicirt man z. B. die Reihe $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 +$ etc. in inf. $= S$ mit $x - 1$, so wird $-1 + \frac{1}{1.2}x + \frac{1}{2.3}x^2 + \frac{1}{3.4}x^3 +$ etc. in inf. $= (x-1)S$, also $\frac{1}{1.2}x + \frac{1}{2.3}x^2 + \frac{1}{3.4}x^3 + \ldots = 1 + (x-1)S$. Setzt man nun $x - 1 = 0$, wodurch $x = 1$ wird, und diesen Werth von x in die letzte Gleichung, so bekommt man $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 1$, wie in (3.).

Wird dieselbe Reihe $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 +$ etc. in inf. $= S$, durch $x^2 - 1$ multiplicirt, und die beiden ersten Glieder des Products auf die andere Seite des Gleichheitszeichens geschafft, so entsteht

$$\frac{2}{1.3}xx + \frac{2}{2.4}x^3 + \frac{2}{3.5}x^4 + \text{etc.} = 1 + \frac{1}{2}x + (xx-1)S$$

Setzt man nun $x = 1$, so wird erhalten

$$\frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \text{etc.} \ldots \text{in inf.} = \frac{3}{2}$$

wie in (4.). Die Multiplication von S mit $x^2 - 1$, und nachherige Annahme $x = 1$, führt also zu demsel-

den Resultate, als wenn man die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ + etc. .... mit Ausschluß der beiden ersten Gliede von sich selbst abgezogen hätte.

Da $xx - 1$ auch für $x = -1$, Null wird, so erhält man noch, wenn man $x = -1$ macht,

$$\frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 5} - \frac{2}{4 \cdot 6} + \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

Multiplicirt man die angenommene Reihe S mit $x^3 - 1$, und setzt nachher $x = 1$, so erhält man dasselbe, als wenn man die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. vom vierten Gliede von sich selbst abzieht.

Wird die Reihe S mit $(x-1)^2$ oder mit $1-2x+x^2$ multiplicirt, und nachher $x = 1$ gesetzt, so ist das so viel, als ob man erst von der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. sie selbst weniger ihrem ersten Gliede abzöge, und mit der hervorgehenden Reihe wieder eben so verführe.

Man multiplicire die angenommene Reihe $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$ etc. in inf. $= S$ mit $2x - 1$, so wird, wenn man das erste Glied des Products auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringt,

$$\frac{3}{1 \cdot 2}x + \frac{4}{2 \cdot 3}xx + \frac{5}{3 \cdot 4}x^3 + \frac{6}{4 \cdot 5}x^4 + \text{etc.} = 1 + (2x - 1)S$$

Setzt man jetzt $2x - 1 = 0$, also $x = \frac{1}{2}$, so wird

$$\frac{3}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2.3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{3.4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{6}{4.5}\cdot\frac{1}{16}+\text{etc.}=1.$$

Wird dieselbe Reihe $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\text{etc.}=S$ mit $(x-1)(2x-1)$, d. i. mit $1-3x+2xx$ multiplicirt, und nachher einmal $x=1$, und dann $2x=1$ gemacht, so entstehen dadurch zwey summirbare Reihen. Es wird nämlich

$$\frac{5}{1.2.3}+\frac{6}{2.3.4}+\frac{7}{3.4.5}+\text{etc. in inf.}=\frac{3}{2}$$

und

$$\frac{5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{6}{2.3.4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{3.4.5}\cdot\frac{1}{16}+\text{etc. in inf.}=\frac{1}{4}$$

7. Es ist nöthig, daß in der angenommenen Reihe S, welche allgemein durch $1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.}$ vorgestellt werden kann, die Coefficienten A, B, C, D .... über alle Gränzen hinaus abnehmen, damit die Producte wie $(x-1)S$, $(x^2-1)S$ u. s. w. für den Werth $x=1$ selbst in dem Falle, daß S für diesen Werth $=\infty$ wäre, (wie, wenn $S=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\text{etc.}$, wirklich der Fall ist) Null werden. Daß dieses aber unter der vorausgesetzten Bedingung Statt hat, erhellt für das Product $(x-1)S$ so. Es ist

$(x-1)S=-1+(1-A)x+(A-B)x^2+(B-C)x^3+\text{etc.}$ also für $x=1$

$(x-1)S=-1+(1-A)+(A-B)+(B-C)+\text{etc.}$

Da aber vermöge der Voraussetzung 1, A, B, C .... eine abnehmende Reihe bilden, deren letztes Glied bey Fortsetzung der Reihe ins Unendliche verschwindet, so ist nach (2.) die Summe der Unterschiede $(1-A)+(A-B)+(B-C)+\text{etc.}=1$, also $(x-1)S=-1+1=0$. Eben so wird der Beweis mit

Hülfe von (2.) für die Producte $(x^2-1)S$, $(x^3-1)S$ u. s. w. geführt.

8. Es lassen sich nach derselben Methode auch endliche summirbare Reihen finden. Multiplicirt man z. E. die Reihe $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}x+\frac{1}{n+3}x^2+$ etc. $=S$ mit $x-1$ und setzt nachher, nachdem das erste Glied des Products, $-\frac{1}{n+1}$, auf die andere Seite der Gleichung gebracht ist, $a=1$, so wird

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\text{etc. in inf.}=\frac{1}{n+1}$$

Nun setze man $n=0$, so wird $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$ in inf. $=1$. Von dieser Reihe subtrahire man die vorige, so wird $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ $=1-\frac{1}{n+1}$.

9. Daß die Summe der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ etc. in inf., wie in (7.) angedeutet ist, unendlich groß sey, erhellt daraus, daß $\log\frac{1}{1-x}=$

$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.},$$

für $x = 1$ also, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$

$= \log \frac{1}{0} = \log \infty$ ist.

Es ist aber gar keine Frage, daß der Logarithme einer unendlich großen Zahl selbst unendlich groß sey, doch ist derselbe von einem unendlich niedrigern Grade als die Zahl selbst, und verschwindet gegen diese. — Hieraus folgt noch, daß die Summe irgend einer harmonischen Reihe $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+2b} + \text{etc.}$ unendlich groß sey. Denn drückt man sie so aus $\frac{c}{a}\left\{\frac{1}{a:b} + \frac{1}{(a:b)+1} + \frac{1}{(a:b)+2} + \text{etc.}\right\}$ so ist, wenn m die nächstgrößere Zahl an $\frac{a}{b}$ ist, die eingeklammerte Reihe $> \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \text{etc.}$ in inf. Diese aber ist die natürliche harmonische, von welcher die $m-1$ ersten Glieder, deren Summe endlich ist, weggekommen sind, also ist die Summe $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \text{etc.}$ gewiß unendlich groß, folglich um so mehr die eingeklammerte, und daher auch die ursprüngliche Reihe $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \text{etc.}$

10. Die Glieder der Reihe A, B, C, D etc. in (2.) können auch Producte von einer immer größer

11. Sind m, $m+p$, $m+q$, $m+r$ etc. in arithmetischer Progression, so ist $\frac{1}{m}+\frac{1}{m+p}+\frac{1}{m+q}+\frac{1}{m+r}+$ etc. in inf. gewiß unendlich groß (9.). Wird also $q=2p$, $r=3p$, $s=4p$ u. s. w. genommen, und $a+p=\beta$ gesetzt, so ist

$$1+\frac{m}{\beta}+\frac{m(m+p)}{\beta(\beta+p)}+\frac{m(m+p)(m+2p)}{\beta(\beta+p)(\beta+2p)}+\text{etc. in inf.}$$
$$=\frac{\beta-p}{\beta-p-m}$$

12. Setzt man in (11.) $p=1$, so entsteht

$$1+\frac{m}{\beta}+\frac{m(m+1)}{\beta(\beta+1)}+\frac{m(m+1)(m+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\text{etc. in inf.}$$
$$=\frac{\beta-1}{\beta-1-m}$$

wo also, damit die Summe nicht unendlich groß werde, $\beta > m+1$ seyn muß.

Nimmt man hier $m=1$, und setzt n statt β, so kommt

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1.2}{n(n+1)}+\frac{1.2.3}{n(n+1)(n+2)}$$
$$+\frac{1.2.3.4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}+\text{etc. in inf.}=\frac{n-1}{n-2}$$

Hieraus ergeben sich, wenn man n nach und nach $=3$, 4, 5, ... setzt, die Summen der reciproken figurirten Zahlen von der 3ten Ordnung an successive, und so kann man noch manche andere Summationen aus der gefundenen ableiten.

Setzt man z. E. $m=p+1$, $\beta=p+f+1$, und dividirt auf beiden Seiten mit $(p+1)(p+2)\ldots\ldots p+f$, so wird

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+f)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)\ldots(p+f+1)}$$

$$+\text{ etc. in inf.} = \frac{1}{f-1}\cdot\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+f-1)}$$

Schreibt man hier $p+x$ statt p, so wird

$$\frac{1}{(p+x+1)(p+x+2)\ldots(p+x+f)}$$

$$+\frac{1}{(p+x+2)(p+x+3)\ldots(p+x+f+1)}$$

$$+\text{ etc. in inf.} = \frac{1}{f-1}\cdot\frac{1}{(p+x+1)(p+x+2)\ldots(p+x+f-1)}$$

Hieraus folgt durch Subtraction

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+f)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)\ldots(p+f+1)}+\ldots$$

$$+\frac{1}{(p+x)(p+x+1)\ldots(p+x+f)}$$

$$= \frac{1}{f-1}\left\{\frac{1}{(p+1)\ldots(p+f-1)}-\frac{1}{(p+x+1)\ldots(p+x+f-1)}\right\}$$

13. Eine dritte Methode summirbare Reihen zu finden, ist, irgend eine Function der Stellenzahl n für die Summe der Reihe anzunehmen, und das allgemeine Glied daraus zu suchen, welches leicht ist. Denn da die Summen von $n-1$ Gliedern der Reihe und von n Gliedern ähnliche Functionen, jene von $n-1$, diese von n sind, beider Summen Unterschied aber das nte oder allgemeine Glied ist, so giebt sich solches ohne Schwierigkeit. Bezeichnet also S die für die Summe angenommene Function von n, s die ähnliche von $n-1$, und T das allgemeine Glied, so ist $S-s=T$.

Beyspiele. I. Es sey $S = An^2 + Bn$, also $s = A(n-1)^2 + B(n-1)$, so ist $T = 2An - A + B$.

Setzt man hier n nach und nach 1, 2, 3, etc., so wird die Reihe $A+B$, $3A+B$, $5A+B$ u. s. w., eine arithmetische der ersten Ordnung, in welcher die Differenz $2A$ ist.

II. Es sey $S=\frac{Ln}{A+Bn}$, also $s=\frac{L(n-1)}{A+B(n-1)}$, folglich $T=L\left\{\frac{n}{A+Bn}-\frac{n-1}{A+B(n-1)}\right\}=\frac{AL}{(A+(n-1)B)(A+nB)}$. Wird n nach und nach 1, 2, 3... gesetzt, so ist

$$\frac{AL}{A(A+B)}+\frac{AL}{(A+B)(A+2B)}+\frac{AL}{(A+2B)(A+3B)}+\ldots$$

$$+\frac{AL}{(A+(n-1)B)(A+nB)}=\frac{Ln}{A+Bn}$$

wo man noch auf beiden Seiten mit L dividiren kann. Nimmt man $n=\infty$, so ist nach Division mit AL,

$$\frac{1}{A(A+B)}+\frac{1}{(A+B)(A+2B)}+\text{etc. in inf.}=\frac{1}{AB}$$

III. Es sey $S=Ak^n$, so ist $s=Ak^{n-1}$, und $T=Ak^{n-1}(k-1)$. Da für $n=1$, $S=T$ werden muß, hier aber $S=Ak$, $T=Ak-A$ wird, so muß man die Constante A, auch von der allgemeinen Summe abziehen, und diese Ak^n-A annehmen. Die Reihe ist $Ak-A$, Ak^2-Ak, Ak^3-Ak^2, etc. eine geometrische mit dem Exponenten k.

Dieses einfache und einleuchtende Verfahren, summirbare Reihe zu finden, hat wesentlichen Bezug auf die Differenzenrechnung.

14. Wenn die Glieder einer Reihe, deren Summe bekannt ist, nach Potenzen einer unbestimmten Größe x fortschreiten, so ist die Summe selbst eine Function

von x. Da nun die Gleichheit zwischen der Reihe und ihrer Summe für jeden Werth von x, also auch für $x + \partial x$ gilt, so ist die Reihe mit ihrem Differential zusammengenommen so groß als die Summe mit ihrem Differential, folglich das Differential der Reihe gleich dem Differential ihrer Summe. Sucht man also diese Differentiale und dividirt beiderseits mit ∂x, so erhält man eine neue Reihe zugleich mit ihrer Summe. Durch wiederholte Anbringung dieses Verfahrens lassen sich also aus einer schon summirten Reihe unzählig viele andere summirbare Reihen ableiten.

So folgt aus der geometrischen Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.} \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

auf die angegebene Weise diese

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \text{etc.} \ldots = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

und aus dieser wieder auf dieselbe Art die Reihe

$$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \text{etc.} \ldots = \frac{2}{(1 - x)^3}$$

oder

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots = \frac{1}{(1 - x)^3}$$

Man erhält hierdurch, wenn man weiter geht, alle Reihen, die aus der Entwickelung von $\frac{1}{(1 - x)^n}$ für ein ganzes n entstehen, und in welchen die figurirten Zahlen der verschiedenen Ordnungen die Coefficienten der Potenzen von x bilden.

15. Das angewiesene Verfahren läßt sich auch dahin abändern, daß man vor der Differentiirung noch mit einer Potenz von x multiplicirt. Hierüber sehe man Eulers Instit. Calc. Diff. P. II. Cap. II. §. 21.

et seqq. — Ferner ist klar, daß, wenn die zum Grunde gelegte Reihe, deren Summe bekannt ist, eine endliche Zahl Glieder hat, dieses auch bey den abgeleiteten Reihen der Fall seyn werde. So findet sich aus

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

wenn man differentiirt, und nachher auf beiden Seiten mit ∂x dividirt

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

und hieraus, nachdem zuvor mit x multiplicirt worden, auf ähnliche Art

$$1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1} = \frac{1+x-(n+1)^2x+(2nn+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

Um hieraus die Summe $1 + 2 + 3 + \dots + n$ zu haben, muß man $x = 1$ setzen. Alsdann aber wird der Ausdruck für die Summe $\frac{0}{0}$. Man macht daher $1 - x = \omega$, also $1 - \omega = x$, so wird der Ausdruck für die Summe $= \frac{n+1 . n}{1.2} + \frac{n+1 . n . n-1}{1.3}\omega$ $+$ etc., also für $\omega = 0$, $\frac{n+1 . n}{1.2}$, wie gehörig.

16. Euler giebt a. a. O. §. 26. eine allgemeine Formel, wodurch sich in mehreren Fällen summirbare Reihen finden lassen. Sie ist folgende: Wenn $a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 +$ etc. $= S$ und $Aa + A'a'x + A''a''x^2 + A'''a''x^3 +$ etc. $= Z$ so ist

$$Z = AS + \frac{x.\Delta A}{1} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{x^2.\Delta^2 A}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{x^3.\Delta^3 A}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

d. i.

d. i. hat man die Summe der Reihe $a + a'x + a''x^2 + \text{etc.} \ldots$ und multiplicirt die Glieder derselben mit den gleichstelligen der Reihe A, A', A'' etc.. so ist die dadurch entstehende Reihe $Aa + A'a'x + A''a''x^2 + \text{etc.}$ summirbar, wenn die Reihe A, A', A''.... zuletzt auf verschwindende Differenzen führt. Der Satz selbst wird in dem Art., Umbildung der Reihen, erwiesen werden. Hier nur ein Beyspiel zur Erläuterung desselben.

Es sey $S = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \text{etc.}$

$= \frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x}$ und die Reihe A, A', A''.... die der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4.... so ist $A = 1$, $\Delta A = 1$, $\Delta^2 A$ und alle folgenden Differenzen $= 0$. Daher wird, weil $\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{1}{xx} \log \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} . \frac{1}{1-x}$

$$Z = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.} \ldots = \frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x}$$

$$- \frac{1}{x} \log \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

wie bekannt.

17. Moivre hat außer der Differentiation auch die Integration angewandt, summirbare Reihen zu finden, Miscell. Analyt. Lib. VI. c. 1. Daß diese hier, und wie sie angewandt werden könne, erhellt aus (14). Wenn nämlich $A + Ax + A'x^2 + A'''x^3 + \text{etc.} = \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ die Function von x bezeichnet, aus deren Entwickelung die Reihe $A + A'x + A''x^2 + \text{etc.}$ hervorgeht, so ist, wenn auf beiden Seiten mit $x^{n-1}\partial x$ multiplicirt, und integrirt wird, $\frac{Ax^n}{n}$

$+ \frac{A' x^{n+1}}{n+1} + \frac{A'' x^{n+2}}{n+2} + \frac{A''' x^{n+3}}{n+3} +$ etc. $=$ $\int x^{n-1} \partial x . \varphi(x)$, wo die Constans offenbar so bestimmt werden muß, daß $\int x^{n-1} \partial x . \varphi(x)$ für $x = 0$ verschwindet. Man erhält auf diesem Wege sowohl unbestimmte als bestimmte summirbare Reihen, wie die folgenden Beyspiele zeigen werden.

18. Es ist $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 +$ etc. $=$ $\log \frac{1}{1-x}$ also, wenn man mit ∂x auf beiden Seiten multiplicirt und integrirt

$$\frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{3.4}x^4 + \frac{1}{4.5}x^5 + \text{etc.} = \int \partial x \log \frac{1}{1-x}$$

Das Integral $\int \partial x \log \frac{1}{1-x}$ wird gefunden, wenn man theilweise integrirt. Es ist nämlich $\int \partial x \log \frac{1}{1-x}$

$$= x \log \frac{1}{1-x} - \int x \partial . \log \frac{1}{1-x} = x \log \frac{1}{1-x} - \int \frac{x \partial x}{1-x}$$

$$= x \log \frac{1}{1-x} + \int \partial x - \int \frac{\partial x}{1-x} = x - (1-x) \log \frac{1}{1-x}$$

wo keine Constans hinzukommt, weil das Integral schon für $x = 0$ verschwindet. Setzt man nun $x = 1$, in welchem Falle $(1-x) \log \frac{1}{1-x}$ Null wird (7), so entsteht die Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} +$ etc. in inf. $= 1$.

Auf ähnliche Art wird, wenn man dieselbe Reihe mit $x^{n-1} \partial x$ multiplicirt, nach vollbrachter Integration

$$\frac{x^{n+1}}{1(n+1)}+\frac{x^{n+2}}{2(n+2)}+\frac{x^{n+3}}{3(n+3)}+\text{etc. in inf.}=$$
$$\frac{1}{n}\left[\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n-1}}{n-1}+\ldots+x\right]-\frac{1-x^n}{n}\log\frac{1}{1-x}$$

also, wenn man $x=1$ setzt,

$$\frac{1}{1(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{3(n+3)}+\frac{1}{4(n+4)}$$
$$+\text{etc. in inf.}=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right\}$$

Ist n gerade und $=2r$, so wird $\frac{1-x^n}{n}\log\frac{1}{1-x}$ auch o für $x=-1$. In diesem Falle hat man also

$$-\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2(2r+2)}-\frac{1}{3(2r+3)}+\frac{1}{4(2r+4)}-\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{2r}\left\{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2r-1}+\frac{1}{2r-2}-\ldots-1\right\}$$

Setzt man aber in der vorigen Reihe $n=2r$, so ist.

$$\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2(2r+2)}+\frac{1}{3(2r+3)}+\text{etc. in inf.}=$$
$$\frac{1}{2r}\left\{\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r-1}+\frac{1}{2r-2}+\ldots+1\right\}$$

Aus dieser und der eben gefundenen entsteht durch Subtraction die neue Reihe

$$\frac{1}{1(2r+1)}+\frac{1}{3(2r+3)}+\frac{1}{5(2r+5)}+\text{etc. in inf.}=$$
$$\frac{1}{2r}\left\{\frac{1}{2r-1}+\frac{1}{2r-3}+\ldots+1\right\}$$

19. Nimmt man die vorhin gefundene Reihe

$$\frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{3.4}x^4 + \frac{1}{4.5}x^5 + \text{etc. in inf.}$$
$$= x - (1-x)\log\frac{1}{1-x}$$

wieder vor, und multiplicirt auf beiden Seiten mit ∂x, so entsteht durch Integration

$$\frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4}x^4 + \frac{1}{3.4.5}x^5 + \text{etc. in inf.} =$$
$$\frac{3}{4}xx - \frac{1}{2}x + \frac{1-2x+xx}{2}\log\frac{1}{1-x}$$

Setzt man hier $1-2x+xx=0$, wodurch $x=1$ wird, so entsteht die Reihe

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \text{etc. in inf.} = \frac{1}{4}$$

Macht man aber $1-2x=0$, also $x=\frac{1}{2}$, so wird

$$\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{3.4.5}\cdot\frac{1}{32} + \text{etc. in inf.}$$
$$= \frac{1}{8}\log 2 - \frac{1}{16}$$

d. i.

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3.4.5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4.5.6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \text{etc.}$$
$$= \log.2 - \frac{1}{2}$$

20. Ein Paar Beyspiele von den Verfahrungsarten in (14.) und (17.) an Reihen, deren Glieder transcendente Functionen sind, mögen hier noch folgen.

In dem Art., Quadratur, 41. *, ist gezeigt, daß

$$\log \varphi = \log.\sin \varphi + \log.\sec \frac{1}{2}\varphi + \log.\sec \frac{1}{4}\varphi + \log.\sec \frac{1}{8}\varphi + \text{etc.}$$

Differentiirt man hier auf beiden Seiten, und dividirt nachher mit $\partial\varphi$, so wird

$$\frac{1}{\varphi} = \cot\varphi + \frac{1}{2}\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\text{tang}\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{8}\ \text{tang}\ \frac{1}{8}\varphi + \text{etc.}$$

also, wenn man $2\cot 2\varphi = \cot\varphi - \text{tang}\varphi$ (Goniom., 44.) subtrahirt,

$$\frac{1}{\varphi} - 2\cot 2\varphi = \text{tang}\varphi + \frac{1}{2}\text{tang}\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\text{tang}\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{8}\text{tang}\frac{1}{8}\varphi + \text{etc.}$$

wie gleichfalls in dem Art., Quadratur, 35., aber auf eine andere Art gefunden ist.

Aus Goniometrie, 73. ist, wenn man daselbst $b = a$ setzt

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a + \text{etc.} = -\frac{1}{2}.$$

Nun sey $a = \pi - \varphi$, also $2a = 2\pi - 2\varphi$, u. s. w., so wird

$$-\cos\varphi + \cos 2\varphi - \cos 3\varphi + \cos 4\varphi - \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

oder $\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}$

Multiplicirt man hier auf beiden Seiten mit $\partial\varphi$, und integrirt, so wird

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{2}\varphi$$

wo dem Integrale rechter Hand des Gleichheitszeichens keine Constans beygefügt ist, weil es für $\varphi = 0$, wie die Reihe linker Hand ausweiset, verschwinden muß.

Auf ähnliche Art findet sich aus

$$\sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \sin 4\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\varphi$$

diese Summation

$$\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi$$
$$= \log. 2 + \log.\cos\frac{1}{2}\varphi$$

21. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe von bekannter Summe Functionen einer veränderlichen Größe sind, die selbst wieder in unendliche nach den Potenzen dieser Größe fortschreitende Reihen sich auflösen lassen, so erhält man durch die wirkliche Entwickelung und Vergleichung mit der bekannten Summe auf einmal eine unzählbare Menge summirbarer Reihen.

Löset man z. E. in der Reihe

$$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - 4\cos\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

die Cosinus in die ihnen gleichgültigen Reihen auf, und ordnet alsdann das Aggregat nach den Potenzen von φ, so wird

$$\left.\begin{aligned} & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ etc.} \\ & - \frac{\varphi^2}{1.2}(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \text{etc.}) \\ & + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4}(1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - \text{etc.}) \\ & - \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}$$

folglich ist

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\text{etc.}=\frac{1}{2}$$

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+\text{etc.}=0$$
$$1^4-2^4+3^4-4^4+5^4-6^4+7^4-8^4+\text{etc.}=0$$

überhaupt für ein ganzes m

$$1^{2m}-2^{2m}+3^{2m}-4^{2m}+5^{2m}-\text{etc.}=0$$

wie in dem Artikel, Potenz, 58. gefunden ist.

Eben so wird, wenn man in der Gleichung

$$\sin\varphi-\sin 2\varphi+\sin 3\varphi-\sin 4\varphi+\text{etc.}=\frac{1}{2}\tan g\frac{1}{2}\varphi$$

auf beiden Seiten die Entwickelungen in Reihen setzt,

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(1-2+3-4+5-\text{etc.})\\ -\dfrac{\varphi^3}{1.2.3}(1^3-2^3+3^3-4^3+5^3-\text{etc.})\\ +\dfrac{\varphi^5}{1\ldots5}(1^5-2^5+3^5-4^5+5^5-\text{etc.})\\ -\text{etc.}\end{array}\right\}=$$

$$\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\varphi+\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1\ldots4}\varphi^3+\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1\ldots6}\varphi^5+\text{etc.}$$

wo $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$ u. s. w. die erste, zweyte, dritte u. s. w. Bernoullische Zahl anzeigen. Hierdurch wird

$$1-2+3-4+5-\text{etc.}=+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2}$$

$$1^3-2^3+3^3-4^3+5^3-\text{etc.}=-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4}$$

$$1^5-2^5+3^5-4^5+5^5-\text{etc.}=+\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{6}$$

überhaupt für ganze m

$$1^{2m-1}-2^{2m-1}+3^{2m-1}-4^{2m-1}+\text{etc.}$$
$$=(-1)^{m-1}.\frac{(2^{2m}-1)\mathfrak{B}^{(m)}}{2m}$$

wie ebenfalls in dem Art., Potenz, 60 und 65 gefunden ist.

In Goniometrie, 73, sey $b = 2a$, so wird

$$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \text{etc.} = 0.$$

und, wenn man $a = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ macht,

$$\sin\varphi - \sin 3\varphi + \sin 5\varphi - \sin 7\varphi \text{ etc.} = 0$$

Aus dieser Reihe folgt auf die vorige Art zu schließen.

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \text{etc.} = 0$$
$$1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \text{etc.} = 0$$

überhaupt für ein ganzes m

$$1^{2m-1} - 3^{2m-1} + 5^{2m-1} - 7^{2m-1} + 9^{2m-1} - \text{etc.} = 0.$$

Aus der Reihe (Goniom., 147.)

$$\cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cos 7\varphi + \text{etc.} = \frac{1}{2}\sec\varphi$$

aber

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$1^4 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - \text{etc.} = +\tfrac{1}{2}\beta$$
$$1^6 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - \text{etc.} = -\tfrac{1}{2}\gamma$$

etc.

$$\text{wo } \sec\varphi = 1 + \frac{\alpha}{1.2}\varphi^2 + \frac{\beta}{1.2.3.4}\varphi^4 + \frac{\gamma}{1.2\ldots6}\varphi^6 + \text{etc.}$$

gesetzt ist. Man sehe auch den Art., Potenz, 96.

22. Da die Glieder einer Reihe unendlich abnehmen können, ohne daß die Reihe convergirt, d. h. eine endliche Summe hat, wie bei der harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$ der Fall ist, so entsteht die Frage: Woran erkennt man, ob eine unendliche Reihe abnehmender Brüche eine endliche Summe habe oder nicht?

Das einfachste Mittel zur Beantwortung dieser Frage scheint die Vergleichung der gegebenenen Reihe mit einer andern, deren Summe schon bekannt ist, zu seyn. Hierdurch erkannte Jakob Bernoulli, daß die Reihe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. in inf. eine endliche Summe habe, weil sie nämlich kleiner ist, als die Summe der reciproken Trigonalzahlen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} +$ etc. welche endlich und $= 2$ ist. Und eben so erhellt, daß die Summe der Reihe $\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} +$ etc. in inf. unendlich sey, weil außer dem ersten jedes Glied derselben größer ist, als das gleichstellige in der natürlichen harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc.

Es lassen sich durch eine solche Vergleichung selbst Gränzen finden, zwischen denen die Summe einer vorgelegten Reihe enthalten ist. Zum Beyspiel diene die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. oder $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} +$ etc. Diese mit der Reihe $\frac{2}{1.5} + \frac{2}{5.9} + \frac{2}{9.13} +$ etc. deren Summe (wie sich aus (11), wenn man dort $m = 1$, $p = 4$, $\beta = 9$ macht, und nachher auf beiden Seiten mit $\frac{2}{1.5}$ multiplicirt, leicht ergiebt) $= \frac{1}{2}$ ist, verglichen, zeigt zuerst, daß $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} +$ etc. $> \frac{1}{2}$ ist, weil nämlich $\frac{2}{1.3} > \frac{2}{1.5}$,

$\frac{2}{5.7} > \frac{2}{5.9}$ u. s. w. Ferner ist $\frac{2}{1.3} : \frac{2}{1.5} = 5:3$

$\frac{2}{5.7} : \frac{2}{5.9} = 9:7 < 5:3$

$\frac{2}{9.11} : \frac{2}{9.13} = 13:11 < 5:3$

etc.

Folglich $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \text{etc.} < \frac{5}{3}\left(\frac{2}{1.5} + \frac{2}{5.9} + \frac{2}{9.13} + \text{etc.}\right) < \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} < \frac{5}{6}$; so daß demnach $\frac{1}{4}\pi$, welches der Werth der vorgegebenen Reihe ist, zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{6}$ fällt.

Man kann auf diesem Wege, wenn man von beiden mit einander verglichenen Reihen eine gleiche Anzahl Glieder vom Anfange an zusammenrechnet, einander viel näher kommende Gränzen finden. Nimmt man z. B. von beiden Reihen die ersten zehn Glieder zusammen, so betragen solche bey der Reihe $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \text{etc.}$ 0,772906; bey der Reihe $\frac{2}{1.5} + \frac{2}{5.9} + \text{etc.}$ hingegen 0,487805, also die übrigen Glieder der letzten Reihe vom 11ten an 0,012195. Hieraus ist $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \text{etc.} > 0{,}772906 + 0{,}012195$ d. i. $> 0{,}785101$ und $< 0{,}772906 + \frac{45}{43} \cdot 0{,}012195$, d. i. $< 0{,}785668$.

Maclaurin hat in der Vergleichung mit der harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ etc. oder auch der allgemeinern $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+2b} +$ etc. ein Mittel zu finden geglaubt, die Convergenz jeder Reihe abnehmender Brüche zu beurtheilen. Er sagt nämlich, (Treatise of fluxions art. 362) daß, wenn A, B, C drey hinlänglich weit vom Anfange entfernte und auf einander folgende Glieder der Reihe sind, und $\frac{A}{C} > \frac{A-B}{B-C}$ d. i. $C < \frac{AB}{2A-B}$ ist, die Summe der Reihe endlich sey. In diesem Falle nämlich nehmen die Glieder von dem Gliede C an stärker ab, als in einer harmonischen Reihe, weshalb denn Maclaurin schließen zu dürfen glaubt, daß die Summe $A + B + C$ etc., und mithin die Summe der ganzen Reihe endlich sey. Allein dieser Schluß ist nicht sicher. Es können nämlich die einzelnen Glieder einer Reihe kleiner, als die der harmonischen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. seyn, ohne daß deswegen die Summe der Reihe endlich wäre, wie dieses mit der Reihe der reciproken Primzahlen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} +$ etc. der Fall ist, von welcher Euler (Introd. in Analys. inf. Lib. I. cap. XV.) gezeigt hat, daß ihre Summe unendlich sey. Denn obgleich das Gesetz des Fortgangs der Primzahlen nicht genau bekannt ist, so ist doch außer Zweifel, daß jedes Glied der Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} +$ etc. kleiner sey als das gleichstellige in der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc.

25. In einer Abhandlung: De progressionibus harmonicis obseruationes, Comment. Petrop. T. VII. giebt Euler als Merkmal, daß die Summe einer unendlichen Reihe abnehmender Brüche endlich sey, folgendes an. Eine solche Reihe, sagt er, hat eine endliche Summe, wenn, indem die Reihe über das Unendliche hinaus fortgeführt wird, dadurch die Summe keinen Zusatz erhält: gegentheils ist die Summe unendlich, wenn, durch Fortführung der Reihe über das Unendliche hinaus, ein Zusatz von endlicher Größe zu der Summe sich ergiebt.

So paradox dieses auch klingen mag, so richtig ist es, wenn es gehörig verstanden wird. Drückt man es so aus: Wenn die Summe von so viel Gliedern der Reihe als man nur will, je weiter das erste derselben vom Anfange der Reihe an genommen wird, desto kleiner wird, und, bey Vergrößerung jener Entfernung über alle Gränzen hinaus, unendlich abnimmt, so ist die Summe der Reihe endlich, im Gegentheil unendlich; so sieht man leicht, daß die ganze Behauptung nichts anders als der entwickelte Begriff der Convergenz ist.

Zum Beyspiel diene die natürliche harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$ Die Summe von $n(i-1)$ Gliedern derselben nach dem nten, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{ni}$, ist wegen der beständigen Abnahme der Glieder $> \frac{n(i-1)}{ni}$ d. i. $> \frac{i-1}{i}$ oder $> 1 - \frac{1}{i}$. Der Ausdruck $1 - \frac{1}{i}$ ist, was auch i seyn mag, weil es nicht < 1 werden kann, allemal endlich und positiv. Also bleibt, man mag auch so viele Glieder der

Reihe vom Anfange an zusammengerechnet haben als man will, immer ein Zusatz von endlicher Größe zu der Summe zu machen übrig, diese kann sich daher keiner bestimmten Gränze nähern, und ist folglich unendlich.

Noch mehr erhellt dieses, wenn man die Eigenschaft jeder harmonischen Proportion, nach welcher die Summe der beiden äußern Glieder größer ist, als das doppelte mittlere, zum Grunde legt. Hieraus folgt nämlich, daß die Summe $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots \frac{1}{ni} >$ ist als $\frac{2}{n(i+1)+1} \times n(i-1)$ d. i. $> \frac{2n(i-1)}{n(i+1)+1}$ oder $> 1 + \frac{n(i-3)-1}{n(i+1)+1}$.

Man kann also, wie weit auch das erste Glied $\frac{1}{n+1}$ vom Anfange der Reihe genommen werden mag, von den übrigen, indem man nur $i = 4$ setzen darf, immer noch so viel dazu nehmen, daß die Summe $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} +$ etc.... $+ \frac{1}{ni}$ mehr als 1 beträgt, und da dies ohne Aufhören geschehen kann, so folgt, daß die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} +$ etc. in inf. keine bestimmte Gränze hat, sondern unendlich ist.

24. Da es indeß in andern Fällen nicht so leicht, wie in dem vorigen, seyn möchte, die Ergänzung der Summe von irgend einer beliebigen Anzahl der ersten Glieder einer Reihe zu schätzen, so bleibt freylich die Vergleichung mit einer summirbaren Reihe immer das sicherste Mittel die Convergenz oder Nichtconvergenz einer Reihe zu beurtheilen. Dieses Mittel hat Gauß

auf eine sehr feine Art zu brauchen gelehrt. In einer Abhandlung: Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 . 2} . \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 . 2 . 3} . \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 +$ etc., Commentatt. Goettingens. T. II. theilt er da, wo von der Summe jener Reihe für den Fall $x = 1$, die Rede ist, einige sehr allgemeine Sätze die Abnahme und das Wachsthum der Glieder einer Reihe, so wie die Convergenz oder Nichtconvergenz betreffend mit, wobey eine Reihe von einem gewissen Gliede an, im ersten Falle mit der obigen $1 + \frac{m}{\beta} + \frac{m(m+1)}{\beta(\beta+1)} +$ etc., im letzten mit der natürlichen harmonischen verglichen wird. Die Sätze selbst sind folgende.

Wenn $M, M', M'', M''' \ldots$ die Glieder einer Reihe sind, welche den Stellenzahlen m, $m+1$, $m+2$, $m+3$ beziehungsweise entsprechen, und der Quotient

$$\frac{M'}{M} = \frac{m^\lambda + Am^{\lambda-1} + Bm^{\lambda-2} + \text{etc.}}{m^\lambda + am^{\lambda-1} + bm^{\lambda-2} + \text{etc.}}$$

ist, die folgenden aber $\frac{M''}{M'}$, $\frac{M'''}{M''}$. etc. aus $\frac{M'}{M}$ entstehen, wenn darin $m+1$, $m+2$ etc. an die Stelle von m gesetzt werden, so werden die Glieder der Reihe M, M', M'', $M''' \ldots$ je nachdem $A < a$ oder $> a$ ist, unendlich abnehmen oder wachsen, in dem Falle, aber, wo $A = a$ ist, einer bestimmten Gränze sich näheren. Ferner wird in dem Falle wo $A < a$ ist, die Summe der Reihe $M + M' + M'' + M''' +$ etc. in inf. entweder endlich oder unendlich seyn, je nachdem $a - A > 1$ oder nicht > 1 ist. Wegen der Beweise dieser Sätze muß die Abhandlung selbst nachgesehen

werden: hier wird es genügen, sie an einem und anderem Beyspiel zu erläutern.

I. Die Reihe sey $1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$ + etc. Hier ist $\frac{M'}{M} = \frac{(2m - 1)^2}{2m(2m+1)} = \frac{4mm - 4m + 1}{4mm + 4m} = \frac{mm - m + \frac{1}{4}}{mm + m.}$; also $A = -1$, $a = 1$, und $A < a$, folglich nehmen die Glieder der Reihe unendlich ab, und weil $a - A = 2$, so ist die Summe der Reihe endlich. Sie ist nämlich $\frac{1}{2}\pi$, wo π der halbe Kreisumfang für den Halbmesser, Eins, ist.

II. Die Reihe sey $1 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7}$ + etc. Hier ist $\frac{M'}{M} = \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2} = \frac{mm + m}{mm + m + \frac{1}{4}}$, folglich $A = a$. Die Glieder nehmer also zwar beständig ab, nähern sich dabey aber einer gewissen endlichen Gränze, welche $= \frac{1}{4}\pi$ ist.

III. Die Reihe sey $1 + \frac{3.5}{2.6} + \frac{3.5.7.9}{2.6.6.10} + \frac{3.5.7.9.11.13}{2.6.6.10.10.14}$ + etc. Hier ist $\frac{M'}{M} = \frac{(4m-1)(4m+1)}{(4m-2)(4m+2)} = \frac{16mm-1}{16mm-4} = \frac{mm - \frac{1}{16}}{mm - \frac{1}{4}}$, also $A = a = 0$. Mithin wachsen die Glieder beständig, aber so, daß sie einer gewissen endlichen Gränze sich näheren, welche $= \sqrt{2}$ ist.

25. Wenn eine Reihe nach den Potenzen einer veränderlichen Größe x fortschreitet, so kann nur die Frage seyn, für welche Werthe von x die Reihe convergire oder nicht. Diese lassen sich durch das Vorige nicht bestimmen, obwohl, wenn ein gewisser Werth von x angenommen wird oder gegeben ist, die Convergenz oder Nichtconvergenz der Reihe häufig nach den obigen Sätzen beurtheilt werden kann. Einige Beyspiele mögen das hierbey zu beobachtende Verfahren andeuten. Die Reihe $1 + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1....4}$ + etc. convergirt, wenn auch nicht gleich anfangs, doch zuletzt gewiß für jeden endlichen Werth von x. Dieses erhellt so.

Das nte Glied dieser Reihe nach dem ersten ist $\frac{x^n}{1.2.3....n}$; für ein unendlich großes n aber $1.2.3....n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen anzeigt, wie in dem Artikel, Summirung der Reihen, bewiesen werden wird. Dadurch ergiebt sich nun $\frac{x^n}{1.2.3...n} = \frac{e^n x^n}{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{ex}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, wo beide Factoren $\left(\frac{ex}{n}\right)^n$ und $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ unendlich klein sind. Also nehmen die Glieder der Reihe für jeden Werth von x wenigstens zuletzt unendlich ab.

Daß aber die Summe der Reihe für jeden Werth von x endlich sey, läßt sich so einsehen. Wenn x kleiner als 1 ist, so nehmen die Glieder der Reihe stärker ab als im Verhältnisse 1 : x, daher ist die Summe der Reihe kleiner als die Summe der abnehmenden geometrischen Reihe $1 + x + x^2 + x^3 +$ etc. also $< \frac{1}{1-x}$. Ist $x = 1$, so ist $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3}$ +

$+ \frac{1}{2.3.4}$ etc. $< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} +$ etc. also < 3. Ist $x > 1$, so sey r die ganze Zahl, welche zunächst kleiner ist als x, und es ist die Reihe $= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^r}{1.2\ldots r}\left(1 + \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)} + \frac{x^3}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \text{etc.}\right)$ wo die Glieder in der eingeklammerten Reihe stärker als in dem Verhältnisse von $r + 1 : x$ abnehmen. Also ist die Summe derselben kleiner als die Summe der abnehmenden geometrischen Reihe $1 + \frac{x}{r+1} + \frac{xx}{(r+1)^2} + \frac{x^3}{(r+1)^3} +$ etc. welche ist $\frac{1}{1 - x:(r+1)} = \frac{r+1}{r+1-x}$. Daher ist die Summe der ursprünglichen Reihe $< 1 + x + \frac{xx}{1.2} + \ldots + \frac{x^r}{1.2.3\ldots r} \cdot \frac{r+1}{r+1-x}$, also gewiß endlich.

Die Reihe $1 + x + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} +$ etc. ist also in jedem Falle zur Berechnung von e^x, wovon sie die Entwickelung ist, brauchbar, obwohl nur für die Werthe von x, welche nicht > 1 sind, bequem.

Die Reihe sey $x + \frac{1}{3} \cdot \frac{xx}{2} + \frac{1.2}{3.5} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.2.3}{3.5.7} \cdot \frac{x^4}{4} +$ etc. also das $n$te Glied derselben $\frac{1.2.3\ldots\ldots n-1}{3.5.7\ldots\ldots 2n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$. Aus dem Art., Binomial-Coefficienten, 15., folgt, daß für ein unendlich großes n $\frac{1.2.3\ldots\ldots n-1}{3.5.7\ldots\ldots 2n-1} = \frac{1}{2^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Hierdurch wird das

unendlich vielte Glied der vorigen Reihe $= \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{n}}$, welches offenbar, so lange x nicht > 2 ist, unendlich klein ist. Der Werth $x = 2$ macht also die Gränze, über welche hinaus die unendliche Abnahme der Glieder aufhört. Daß aber für $x = 2$ die Glieder der Reihe unendlich abnehmen, zeigt auch der Quotient $\frac{M'}{M}$ (man s. hier, 25.), als welcher für die gegenwärtige Reihe, und für den Werth $x = 2$, $\frac{2mm}{2mm + 3m + 1}$ ist. Zugleich erhellt daraus, daß $a - A = \frac{3}{2}$, folglich > 1 ist, die Endlichkeit der Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe.

Die Reihe stellt übrigens die Hälfte des Quadrats eines Kreisbogens dar, dessen Quersinus, den Halbmesser für Eins genommen, x ist. Da es keinen größeren Sinus versus als 2 giebt, so wird begreiflich, warum die Reihe für größere Werthe von x als 2 divergirt. Die Divergenz zeigt hier die Unmöglichkeit der durch die Reihe vorgestellten Größe an.

26. Wenn die Glieder einer Reihe mit abwechselnden Vorzeichen $a - b + c - d + e$ etc. unendlich abnehmen, so erhellt ohne Mühe, daß die Summe der Reihe endlich ist. Denn es ist, wenn s diese Summe bezeichnet $s < a$ und $> a - b$; ferner $s < a - b + c$ und $s > a - b + c - d$ u. s. w. wo die Gränzen, zwischen denen s liegt, immer näher zusammenrücken, und um weniger als eine gegebene Größe verschieden werden können, daher s sich selbst einer gewissen endlichen Gränze nähert, welche die Summe der ohne Ende fortgesetzten Reihe ist.

27. Cauchy hat sich auch mit Untersuchung der Convergenz der Reihen beschäfftigt, und darüber

mehrere Sätze in dem Cours d'Analyse, Part. I. Chap. VI. vorgetragen.

Summirung der Reihen ist der Inbegriff der Verfahrungsarten, wodurch aus dem bekannten Gesetz der Bildung einer Reihe von einer endlichen oder unendlichen Anzahl Glieder die Summe derselben gefunden wird. Da es nämlich keine ganz allgemeine Methode zur Summirung der Reihen giebt, so kann nur von Verfahrungsarten in der Mehrzahl die Rede seyn. Von diesen Verfahrungsarten werden die allgemeineren, welche auf mehrere Arten oder ganze Klassen von Reihen anwendbar sind, den Gegenstand des gegenwärtigen Artikels ausmachen. Die specielleren Verfahrungsarten zur Summirung arithmetischer und geometrischer Reihen sind in den diesen Reihen besonders gewidmeten Artikeln vorgetragen.

1. Ein elementarisches Verfahren zur Summirung unendlicher sowohl als endlicher Reihen ist die Zerlegung derselben in andre summirbare Reihen. Hierdurch lassen sich unter andern alle Reihen summiren, welche entstehen, wenn die Glieder einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung folgweise in die Glieder einer geometrischen, steigenden oder fallenden Reihe multiplicirt werden. Die einfachsten Reihen dieser Art entstehen, wenn die figurirten Zahlen irgend einer Ordnung folgweise in die Glieder einer geometrischen Reihe multiplicirt werden. Diese Reihen selbst sind $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 +$ etc.; $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 +$ etc.; $1 + 3r + 6r^2 + 10r^3 +$ etc.; $1 + 4r + 10r^2 + 20r^3 +$ etc.; u. s. w. Die Summe der ersten, welche eine simple geometrische Reihe ist, ist bekannt, nämlich $= \frac{1}{1 - r}$. Auf sie wird die Summe der zweyten Reihe, auf diese die Summe der dritten u. s. w. zurückgebracht. Die zweyte Reihe läßt sich nämlich in folgende zerlegen

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc. deren Summe} = \frac{1}{1-r}$$

$$r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots = \frac{r}{1-r}$$

$$r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots = \frac{r^2}{1-r}$$

$$r^3 + r^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots = \frac{r^3}{1-r}$$

$$r^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots = \frac{r^4}{1-r}$$

$$+ \text{etc.} \;\ldots\ldots \quad + \text{etc.}$$

Es ist nämlich die zweyte der Partialreihen $= r(1 + r + r^2 + r^3 + \text{etc.})$, also kommt ihre Summe, wenn die der ersten mit r multiplicirt wird. Eben so entsteht jede folgende Partialsumme aus der nächstvorhergehenden. Daher bilden die Partialsummen selbst wieder eine geometrische Reihe mit dem Exponenten r, und die Totalsumme wird $\frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^2}$.

Die dritte Reihe zerlegt sich in folgende Partialreihen

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 5r^4 + 6r^5 + \text{etc.} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

$$r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + 5r^5 + \text{etc.} = \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$r^2 + 2r^3 + 3r^4 + 4r^5 + \text{etc.} = \frac{r^2}{(1-r)^2}$$

$$r^3 + 2r^4 + 3r^5 + \text{etc.} = \frac{r^3}{(1-r)^2}$$

$$r^4 + 2r^5 + \text{etc.} = \frac{r^4}{(1-r)^2}$$

$$r^4 + \text{etc.} = \frac{r^5}{(1-r)^2}$$

$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

wo von den Partialsummen das vorhin bemerkte gilt.

Die Totalsumme ist $\frac{1}{(1-r)^2} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^3}$.

2. Die endlichen Summen der vorigen Reihen lassen sich auf ähnliche Art finden. Kürzer erhält man sie dadurch, daß man die unendlichen Summen von dem Gliede an, welches zunächst auf dasjenige folgt, bis mit zu welchem die Summe verlangt wird, sucht, und solche von den eben gefundenen Summen abzieht.

Soll z. E. die Summe der ersten n Glieder der Reihe $1 + 3r + 6r^2 + 10r^3 +$ etc. gefunden werden, so muß von der vorhin gefundenen Summe der ohne fortgesetzten Reihe die Summe dieser $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} r^n$

$$+ \frac{(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2} r^{n+1} + \frac{(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2} r^{n+2} + \text{etc.}$$

in inf. abgezogen werden. Nun ist jede Triangularzahl die Summe aus der nächstvorhergehenden und der Stellenzahl, also

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + n + 1$$

$$\frac{(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} + n + 2$$

$$= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + 2n + 3$$

$$\frac{(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2} + n + 3$$

$$= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + 3n + 6$$

etc. etc.

Die vorgegebene Reihe zerfällt also in diese drey

$$\frac{n(n+1)}{1.2} r^n (1 + r + r^2 + r^3 + \text{etc. in inf.})$$

$$+ \quad nr^n (1 + 2r + 3r^2 + r^3 + \text{etc. in inf.})$$

$$+ \quad r^n (1 + 3r + 6r^2 + 10r^3 + \text{etc. in inf.})$$

deren Summen sind $\frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{r^n}{1-r}$; $\frac{nr^n}{(1-r)^2}$; $\frac{r^n}{(1-r)^3}$.

Daher ist $1 + 3r + 6r^2 + 10r^3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2} r^{n-1} =$

$$\frac{1-r^n}{(1-r)^3} - \frac{nr^n}{(1-r)^2} - \frac{\frac{n(n+1)}{1.2} \cdot r^n}{1-r}.$$

Man wird hieraus leicht den Schluß ziehen, daß die Summe der Reihe, welche entsteht, wenn die n ersten figurirten Zahlen von der Ordnung m (1, 1, 1, 1, etc. für die Zahlen der ersten Ordnung genommen) beziehungsweise in die n ersten Glieder der geometrischen Reihe 1, r, r^2, r^3 u. s. w. multiplicirt werden, ist

$$\frac{1-r^n}{(1-r)^m} - \frac{\mathfrak{A}r^n}{(1-r)^{m-1}} - \frac{\mathfrak{B}r^n}{(1-r)^{m-2}} - \text{etc.} \ldots - \frac{\overset{-1}{\mathfrak{M}}r^n}{1-r}.$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.... $\overset{-1}{\mathfrak{M}}$ die $m-1$ ersten Coefficienten aus der Entwickelung von $(1-z)^{-m}$ sind.

Wie hieraus die Summen für den Werth $r = 1$ abzuleiten sind, ist in dem Artikel, Summirbare Reihe, 15., gezeigt.

3. Da die Potenzen der natürlichen Zahlen sich aus den figurirten Zahlen zusammensetzen lassen, jede Quadratzahl nämlich aus zwey zunächst auf einander folgenden Triangularzahlen, jede Cubikzahl aus drey

nächst auf einander folgenden Pyramidalzahlen, jedes Biquadrat aus vier nächst auf einander folgenden figurirten Zahlen der 5ten Ordnung u. s. w., indem nämlich

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$n^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$n^4 = \frac{n \ldots (n+3)}{1 \ldots 4} + 11 \cdot \frac{(n-1)\ldots(n+2)}{1 \ldots 4} + 11 \cdot \frac{(n-2)\ldots(n+1)}{1 \ldots 4} + \frac{(n-3)\ldots n}{1 \ldots 4}$$

u. s. w.

so sieht man leicht, wie die Summen der Reihen

$$1^2 + 2^2 r + 3^2 r^2 + 4^2 r^3 + 5^2 r^4 + \text{etc.}$$
$$1^3 + 2^3 r + 3^3 r^2 + 4^3 r^3 + 5^3 r^4 + \text{etc.}$$
$$1^4 + 2^4 r + 3^4 r^2 + 4^4 r^3 + 5^4 r^4 + \text{etc.}$$

u. s. w. die unendlichen sowohl als die endlichen sich vermittelst der vorigen Summirungen bestimmen lassen. Es wird nämlich

$$1 + 4r + 9r^2 + 16r^3 + 25r^4 + \text{etc. in inf.} = \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

$$1 + 8r + 27r^2 + 64r^3 + 125r^4 + \text{etc. in inf.} = \frac{1+4r+r^2}{(1-r)^4}$$

$$1 + 16r + 81r + 256r^3 + 625r^4 + \text{etc. in inf.} = \frac{1+11r+11r^2+r^3}{(1-r)^5}$$

u. s. w.

Die endlichen Summen einer jeden dieser Reihen werden aus der unendlichen Summe derselben Reihe und aller vorhergehenden, wie es auch in (2) der Fall war, zusammengesetzt. Um dieß kurz zu über-

sehen, bezeichne $Sx^m . r^x$ die Summe der unendlichen Reihe $1^m . r + 2^m . r^2 + 3^m . r^3 +$ etc., $Sn^m . r^n$ aber die Summe der n ersten Glieder derselben. so ist

$$Sx^m . r^x = Sn^m . r^n + (n+1)^m r^{n+1} + (n+2)^m r^{n+2} + (n+3)^m r^{n+3} + \text{etc. in inf.}$$

d. i., wenn man $(n+1)^m$, $(n+2)^m$, $(n+3)^m$ u. s. w. nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, und mit Euler die Binomialcoefficienten zur mten Potenz nach der Reihe durch $\left[\frac{m}{1}\right], \left[\frac{m}{2}\right], \left[\frac{m}{3}\right] \dots \left[\frac{m}{m}\right]$ bezeichnet

$$= Sn^m . r^n + n^m . r^n (r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{etc. in inf.})$$

$$+ \left[\frac{m}{1}\right] n^{m-1} . r^n (r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \text{etc. in inf.})$$

$$+ \left[\frac{m}{2}\right] n^{m-2}\, r^n (1^2 . r + 2^2 . r^2 + 3^2 . r^3 + 4^2 . r^4 + \text{etc in inf.})$$

$$\vdots$$

$$+ \left[\frac{m}{m}\right] . r^n (1^m . r + 2^m . r^2 + 3^m . r^3 + 4^m . r^4 + \text{etc. in inf.})$$

$$= Sn^m . r^n + r^n \Big(n^m . Sx^0 . r^x + \left[\frac{m}{1}\right] n^{m-1} . Sx . r^x + \left[\frac{m}{2}\right] n^{m-2} . Sx^2 . r^x + \left[\frac{m}{3}\right] n^{m-3} . Sx^3 . r^x + \dots + \left[\frac{m}{m}\right] . Sx^m . r^x \Big)$$

Hieraus ist

$$Sn^m . r^n = Sx^m . r^x - n^m . \frac{r^{n+1}}{1-r} - r^n \Big(\left[\frac{m}{1}\right] n^{m-1} . Sx . r^x + \left[\frac{m}{2}\right] n^{m-2} . Sx^2 . r^x + \left[\frac{m}{3}\right] n^{m-3} . Sx^3 . r^x + \dots + \left[\frac{m}{m}\right] . Sx^m . r^x \Big)$$

Die hier vorkommenden unendlichen Summen $Sx.r^x$, $Sx^2.r^x$, u. s. w. sind die vorigen $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \text{etc.}$, $1 + 4r + 9r^2 + 16r^3 + \text{etc.}$, $1 + 8r + 27r^2 + 64r^3 + \text{etc.}$ u. s. w. mit r multiplicirt.

4. Es sey allgemein die Reihe $a + a'r + a''r^2 + a'''r^3 + \text{etc. in inf.}$, von welcher die Coefficienten a, a', a'', a''', etc. eine arithmetische Reihe der mten Ordnung bilden, zu summiren. Bezeichnet man nun die Binomialcoefficienten wie in (3), die Anfangsglieder der Differenzreihen aber durch D', D'', ... $D^{(m)}$, so ist (Arithm. Reihen höherer Ordnung, 7.) das allgemeine Glied unserer Reihe, dessen Stelle nach dem ersten durch p ausgedrückt wird

$$r^p\left(a + \left[\frac{p}{1}\right]D' + \left[\frac{p}{2}\right]D'' + \ldots + \left[\frac{p}{p}\right]D^{(p)}\right)$$

Setzt man hier p nach und nach $= 0, 1, 2, 3 \ldots$ etc., so wird die vorgegebene Reihe in folgende $m+1$ Partialreihen zerlegt

$$\begin{array}{l}
a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \text{etc.} \\
+ D'r + 2D'r^2 + 3D'r^3 + 4D'r^4 + 5D'r^5 + \text{etc.} \\
\quad + D''r^2 + 3D''r^3 + 6D''r^4 + 10D''r^5 + \text{etc.} \\
\quad\quad + D'''r^3 + 4D'''r^4 + 10D'''r^5 + \text{etc.} \\
\quad\quad\quad + D''''r^4 + 5D''''r^5 + \text{etc.} \\
\quad\quad\quad\quad + D'''''r^5 + \text{etc.} \\
\quad\quad\quad\quad\quad + \text{etc.}
\end{array}$$

Die Summe der ersten ist $\frac{a}{1-r}$, der zweyten $\frac{D'r}{(1-r)^2}$ der dritten $\frac{D''r^2}{(1-r)^3}$, ... der letzten oder $(m+1)$ten $\frac{D^{(m)}r^m}{(1-r)^{m+1}}$. Daher ist die Summe der vorgegebenen Reihe

$$= \frac{a}{1-r} + \frac{D'r}{(1-r)^2} + \frac{D''r^2}{(1-r)^3} + \frac{D'''r^3}{(1-r)^4} + \ldots$$

$+ \frac{D^{(m)}r^m}{(1-r)^{m+1}}$. Man setze sie $= \frac{A + A'r + A''r^2 + \ldots\ldots + A^{(m)}r^m}{(1-r)^{m+1}}$. Bringt man nun alles auf einerley Benennung, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten A, A', A'' .... folgende Gleichungen

$$A = a$$

$$A' = D' - \left[\frac{m}{1}\right] a$$

$$A'' = D'' - \left[\frac{m-1}{1}\right] D' + \left[\frac{m}{2}\right] a$$

$$A''' = D''' - \left[\frac{m-2}{1}\right] D'' + \left[\frac{m-1}{2}\right] D' - \left[\frac{m}{3}\right] a$$

überhaupt

$$A^{(\lambda)} = D^{(\lambda)} - \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right] D^{(\lambda-1)} + \left[\frac{m-\lambda+2}{2}\right] D^{(\lambda-2)} - \ldots\ldots \mp \left[\frac{m-1}{\lambda-1}\right] D' \pm \left[\frac{m}{\lambda}\right] a$$

wo die oberen Vorzeichen für ein gerades λ, die unteren für ein ungerades gelten.

Um in den Ausdruck dieser Coefficienten wieder die Glieder der Reihe a, a', a'' u. s. w. einzuführen, ist aus (Arithmet. Reihen höherer Ordnung, 2.)

$$D' = a' - a$$

$$D'' = a'' - 2a' + a$$

$$D''' = a''' - 3a'' + 3a' - a.$$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

$$D^{(\lambda)} = a^{(\lambda)} - \left[\frac{\lambda}{1}\right] a^{(\lambda-1)} + \left[\frac{\lambda}{2}\right] a^{(\lambda-2)} - \ldots \pm \left[\frac{\lambda}{\lambda-1}\right] a' \pm \left[\frac{\lambda}{\lambda}\right] a.$$

Die oberen Vorzeichen für ein gerades λ, die unteren für ein ungerades genommen.

Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke für $A^{(\lambda)}$, und setzt den dadurch hervorgehenden Ausdruck von $A^{(\lambda)} = a^{(\lambda)} - c' a^{(\lambda-1)} + c'' a^{(\lambda-2)} - c''' a^{(\lambda-3)} + \ldots \mp c^{(\lambda-1)} a' \pm c^{(\lambda)} a$, wo die oberen Vorzeichen für ein gerades λ, die unteren für ein ungerades gelten, so ist

$$c' = \left[\frac{\lambda}{1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]$$

$$c'' = \left[\frac{\lambda}{2}\right] + \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]\left[\frac{\lambda-1}{1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+2}{2}\right]$$

$$c''' = \left[\frac{\lambda}{3}\right] + \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]\left[\frac{\lambda-1}{2}\right] + \left[\frac{m-\lambda+2}{2}\right]\left[\frac{\lambda-2}{1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+3}{3}\right]$$

überhaupt

$$c^{(\sigma)} = \left[\frac{\lambda}{\sigma}\right] + \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]\left[\frac{\lambda-1}{\sigma-1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+2}{2}\right]\left[\frac{\lambda-2}{\sigma-2}\right] + \ldots + \left[\frac{m-\lambda+\sigma-1}{\sigma-1}\right]\left[\frac{\lambda-\sigma+1}{1}\right] + \left[\frac{m-\lambda+\sigma}{\sigma}\right]$$

Dieser Ausdruck für $c^{(\sigma)}$ läßt sich noch weiter zusammenziehen. Es ist nämlich aus dem Art. Binomialcoefficienten, 22. VII., wenn man die dortigen Bezeichnungen in die hier gebrauchten umsetzt,

$$\left[\frac{\beta}{n}\right] + \left[\frac{\alpha}{1}\right]\left[\frac{\beta}{n-1}\right] + \left[\frac{\alpha}{2}\right]\left[\frac{\beta}{n-2}\right] + \ldots + \left[\frac{\alpha}{n-1}\right]\left[\frac{\beta}{1}\right] + \left[\frac{\alpha}{n}\right] = \left[\frac{\alpha+\beta}{n}\right]$$

Setzt man hier $-\beta$, $-\alpha$ statt β, α, welches verstattet ist, und verwandelt alsdann die Coefficienten der

negativen Potenzen in die ihnen gleichgeltenden der positiven nach der Formel

$$\left[\frac{-p}{q}\right] = \pm \left[\frac{p+q-1}{q}\right]$$

wo das obere Vorzeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades q genommen wird, so erhält man

$$\left[\frac{\beta+n-1}{n}\right] + \left[\frac{\alpha}{1}\right]\left[\frac{\beta+n-2}{n-1}\right] + \left[\frac{\alpha+1}{2}\right]\left[\frac{\beta+n-3}{n-2}\right]$$

$$+\ldots+\left[\frac{\alpha+n-2}{n-1}\right]\left[\frac{\beta}{1}\right]+\left[\frac{\alpha+n-1}{n}\right]=\left[\frac{\alpha+\beta+n-1}{n}\right]$$

Macht man nun hier $n = \sigma$, $\beta + n - 1 = \lambda$, $\alpha = m - \lambda + 1$, folglich $\alpha + \beta + n - 1 = m + 1$, so wird

$$\left[\frac{\lambda}{\sigma}\right] + \left[\frac{m-\lambda+1}{1}\right]\left[\frac{\lambda-1}{\sigma-1}\right] + \ldots$$

$$+ \left[\frac{m-\lambda+\sigma-1}{\sigma-1}\right]\left[\frac{\lambda-\sigma+1}{1}\right]$$

$$+ \left[\frac{m-\lambda+\sigma}{\sigma}\right] = \left[\frac{m+1}{\sigma}\right]$$

also

$$\mathfrak{b}^{(\sigma)} = \left[\frac{m+1}{\sigma}\right]$$

Demnach ist

$$A^{(\lambda)} = a^{(\lambda)} -$$

$$\left[\frac{m+1}{1}\right]a^{(\lambda-1)} + \left[\frac{m+1}{2}\right]a^{(\lambda-2)} - \left[\frac{m+1}{3}\right]a^{(\lambda-3)} + \ldots$$

$$\mp \left[\frac{m+1}{\lambda-1}\right]a' \pm \left[\frac{m+1}{\lambda}\right]a.$$

5. Zu dem eben gefundenen Resultate gelangt man kürzer, wenn man die vorgegebene Reihe $a + a'r + a''r^2 + a'''r^3 + a''''r^4 + \ldots a^{(\lambda)}r^{\lambda} + \text{etc.}$ mit

$(1-r)^{m+1}$ multiplicirt, und das Product $= A + A'r + A''r^2 + A'''r^3 +$ etc. setzt.

Um alsdann $A^{(\lambda)}$ zu finden, darf man nur die Glieder der Entwickelung von $(1-r)^{m+1}$ vom ersten an bis zu dem, welches in r^λ multiplicirt ist, in umgekehrter Ordnung unter die Glieder der Reihe $a + a'r + a''r^2 + \ldots + a^{(\lambda)}r^\lambda +$ etc. setzen, und jedes untere Glied in das darüber stehende multipliciren, so erhält man alle Producte, welche in r^λ multiplicirt sind, und so den vorigen Ausdruck für $A^{(\lambda)}$.

$A^{(m+1)}$ wird hiernach

$$= a^{(m+1)} - \left[\frac{m+1}{1}\right] a^{(m)} + \left[\frac{m+1}{2}\right] a^{(m-1)} - \ldots$$

$$\mp \left[\frac{m+1}{1}\right] a' \pm a$$

wo das obere Vorzeichen für ein ungerades, das untere für ein gerades m gilt, und die letzten Coefficienten nach der Formel $\left[\frac{m+1}{p}\right] = \left[\frac{m+1}{m-p+1}\right]$ anders ausgedrückt sind.

Da aber $a, a', a'', \ldots$ in einer arithmetischen Reihe der mten Ordnung sind, so ist (Arithmetische Reihen höherer Ordnungen, 3.) der in der vorigen Gleichung, rechter Hand des Gleichheitszeichens stehende Ausdruck, und also auch $A^{(m+1)} = 0$, und eben so $A^{(m+2)}$, $A^{(m+3)}$ u. s. w. $= 0$, so daß $A^{(m)}r^m$ das letzte Glied des Products ist.

Wird dieses Product nun wieder durch $(1-r)^{m+1}$ dividirt, so entsteht

$$a + a'r + a''r^2 + a'''r^3 + a''''r^4 + \text{ etc. in inf.}$$

$$= \frac{A + A'r + A''r^2 + \ldots + A^{(m)}r^m}{(1-r)^{m+1}}$$

welches mit dem vorhin gefundenen übereinstimmt.

6. Ist das allgemeine Glied $a^{(x-1)}$ der Reihe a, a', a'', etc. eine solche Function der Stellenzahl x, welche für $x = 0$ verschwindet, so ist, wenn man 0 als das Anfangsglied der Reihe ansieht (und das darf man in Beziehung auf die mte beständige Differenz, oder noch höhere), die $(m+1)$te Differenz, d. i.

$$a^{(m)} - \left[\frac{m+1}{1}\right]a^{(m-1)} + \left[\frac{m+2}{2}\right]a^{(m-2)} - \ldots$$
$$\mp \left[\frac{m+1}{1}\right]a'$$

auch $= 0$, d. i., $A^{(m)} = 0$. In diesem Falle bricht also das Product in (5) mit $A^{(m-1)}r^{m-1}$ ab, welches zugleich das höchste Glied des Zählers ist.

7. Die mten Potenzen der natürlichen Zahlenreihe 1^m, 2^m, 3^m, etc. bilden eine Reihe der mten Ordnung von der eben angezeigten Art, daher ist

$$1^m + 2^m.r + 3^m.r^2 + 4^m.r^3 + \text{etc. in inf.}$$
$$= \frac{A + A'r + A''r^2 + A'''r^3 + \ldots + A^{(m-1)}r^{m-1}}{(1-r)^{m+1}}$$

wo

$$A = 1^m$$

$$A' = 2^m - \left[\frac{m+1}{1}\right].1^m$$

$$A'' = 3^m - \left[\frac{m+1}{1}\right].2^m + \left[\frac{m+1}{2}\right].1^m$$

.

.

.

$$A^{(m-1)} = m^m - \left[\frac{m+1}{1}\right](m-1)^m$$
$$+ \left[\frac{m+1}{2}\right](m-2)^m - \ldots \mp \left[\frac{m+1}{3}\right].2^m$$
$$\pm \left[\frac{m+1}{2}\right].1^m$$

die oberen Vorzeichen für ein ungerades, die unteren für ein gerades m genommen.

Hier sind nun noch die Coefficienten, welche vom ersten und letzten gleichweit abstehen, einander gleich, nämlich $A = A^{(m-1)}$, $A' = A^{(m-2)}$, $A'' = A^{(m-3)}$ u. s. w. Denn für ein ungerades m ist, wenn man den Werth von $A^{(m-1)}$ rückwärts schreibt

$$A^{(m-1)} - A = (-1)^m - \left[\frac{m+1}{1}\right].0^m + \left[\frac{m+1}{2}\right].1^m - \left[\frac{m+1}{3}\right].2^m + \ldots - \left[\frac{m+1}{1}\right](m-1)^m + m^m.$$

d. i. $= 0$, weil $(-1)^m$, 0^m, 1^m, 2^m.... Glieder einer arithmetischen Reihe der mten Ordnung sind. (Arithmet. Reihen höherer Ordn., 3). Ist m gerade, so ist auf eben die Art

$$A - A^{(m-1)} = (-1)^m - \left[\frac{m+1}{1}\right].0^m + \left[\frac{m+1}{2}\right].1^m - \left[\frac{m+1}{3}\right].2^m + \ldots + \left[\frac{m+1}{1}\right](m-1)^m - m^m.$$

und aus gleichen Gründen $= 0$; also ist beiden Fällen $A = A^{(m-1)}$.

Auf ähnliche Weise erhellt, daß $A' = A^{(m-2)}$, $A'' = A^{(m-3)}$ u. s. w. Ist also m ungerade, so giebt es einen mittelsten Coefficienten, welcher ist $A^{\frac{m-1}{2}}$. Alles dieses kann man sich an den in (3) aufgeführten Summen erläutern.

8. Setzt man $r = -1$, und läßt m erstlich gerade $= 2p$ seyn, so wird

$$1^{2p} - 2^{2p} + 3^{2p} - 4^{2p} + 5^{2p} - \text{etc.} = \frac{A - A' + A'' - A''' + A^{(2p-2)} - A^{(2p-1)}}{2^{m+1}}$$

Aber der Zähler des rechter Hand stehenden Bruches ist 0, weil $A = A^{(2p-1)}$, $A' = A^{(2p-2)}$, ... $A^{(p-1)} = A^{(p)}$, daher ist

$1^{2p} - 2^{2p} + 3^{2p} - 4^{2p} + 5^{2p} - \text{etc. in inf.} = 0$ übereinstimmig mit (Potenz, 58.) und (summirbare Reihe, 21.).

Ist zweytens m ungerade $= 2p-1$, so wird

$$1^{2p-1} - 2^{2p-1} + 3^{2p-1} - 4^{2p-1} + 5^{2p-1} - \text{etc. in inf.}$$

$$= \frac{A - A' + A'' - A''' + \ldots\ldots - A^{(2p-2)} + A^{(2p-1)}}{2^{2p}}$$

also, wenn man die gleichen Glieder zusammennimmt,

$$= \frac{A - A' + A'' - \ldots\ldots\ldots \mp A^{(p-2)} \pm \frac{1}{2} A^{(p-1)}}{2^{2p-1}}$$

das obere Vorzeichen für ein ungerades p, das untere für ein gerades genommen. Diese Summe ist aber auch (Potenz, 60, und 65. oder, Summirbare Reihe, 21.)

$= (-1)^{p-1} \cdot \dfrac{(2^{2p}-1)\mathfrak{B}^{(p)}}{2p}$, wo $\mathfrak{B}^{(p)}$ die pte Bernoullische Zahl anzeigt. Daher entsteht folgender, ganz independence Ausdruck für die Bernoullischen Zahlen

$$\mathfrak{B}^{(p)} = \pm \frac{2p}{(2^{2p}-1)} \cdot \frac{A - A' + A'' - \ldots \mp A^{(p-2)} \pm \frac{1}{2} A^{(p-1)}}{2^{2p-1}},$$

wo von den Vorzeichen das vorhin bemerkte gilt.

Laplace hat diesen Ausdruck für $\mathfrak{B}^{(p)}$ auf eine andere, sehr künstliche Art gefunden. Die vorhergehende Ableitung verdanke ich im wesentlichen Pfaff. Die bisher erklärte Summirungsmethode aber hat Jakob Bernoulli zuerst angewandt.

9. Die gefundenen Summationen sind nicht ohne allen praktischen Nutzen, sondern werden zuweilen in

in der Rentenrechnung gebraucht. Man sehe darüber Tetens Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften Th. I. in den Zusätzen zum ersten Kapitel. Um ein einfaches Beyspiel der Anwendung zu haben, setze man, eine Rente werde n Jahre hindurch, am Ende des ersten Jahrs mit a, am Ende des zweyten mit $a+d$, am Ende des dritten mit $a+2d$, und so am Ende jedes folgenden Jahrs mit d mehr als am Ende des nächst vorhergehenden bezahlt, und es solle der baare Werth derselben s gefunden werden, wenn für das Capital 1 an jährlichen Interessen u gerechnet wird.

Es ist

$$s = \frac{a}{1+u} + \frac{a+d}{(1+u)^2} + \frac{a+2d}{(1+u)^3} + \ldots + \frac{a+(n-1)d}{(1+u)^n}$$

$$= \frac{a}{1+u}\left(1 + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+u)^{n-1}}\right)$$

$$+ \frac{d}{(1+u)^2}\left(1 + \frac{2}{1+u} + \frac{3}{(1+u)^2} + \ldots + \frac{n-1}{(1+u)^{n-2}}\right)$$

also nach (2)

$$= \frac{a((1+u)^n-1)}{u(1+u)^n} + d\left\{\frac{(1+u)^{n-1}-1}{u^2(1+u)^{n-1}} - \frac{n-1}{u(1+u)^n}\right\}$$

$$= \frac{\left(a+\frac{d}{u}\right)\left((1+u)^n-1\right)-nd}{u(1+u)^n}.$$

Ist $a=500$, $d=10$, $n=30$, $u=0,04$; daß also 4 Procent jährlich gerechnet werden, so wird

$$a+\frac{d}{u} = 750,\ (1+u)^n = 1,04^{30} = 3,243398,$$

und

$$s = \frac{25(750.\ 2,243398 - 300)}{3,243398}$$
$$= 10719,432$$

In einer zu Leipzig, 1820. herausgekommenen Anweisung zur Waldwerthberechnung von Pernitzsch ist dieses Exempel S. 54. §. 24. nach einer ganz falschen Formel berechnet.

10. Um die Anwendbarkeit der erklärten Summirungsmethode an einem etwas zusammengesetzteren Beyspiele zu zeigen, wähle ich die Reihe

$$\left[\frac{n}{1}\right].\frac{1^n}{n+2}-\left[\frac{n}{2}\right].\frac{2^n}{n+3}+\left[\frac{n}{3}\right].\frac{3^n}{n+4}-\ldots$$
$$+\left[\frac{n}{n}\right].\frac{n^n}{2n+1}.(-1)^{n-1},$$

welche in Fischers Theorie der Dimensionszeichen Th. I. §. 157. vorkommt, und deren Summe S heißen mag.

Da nämlich

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\ldots\mp\frac{b^{r-1}}{a^r}\pm\frac{b^r}{(a+b)a^r}$$

wo die oberen Vorzeichen für ein gerades r, die unteren für ein ungerades gelten, so wird, wenn man $b=n+1$, $r=n-1$ nimmt, und a nach und nach $=1, 2, 3\ldots n$ setzt

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{1}-\frac{n+1}{1^2}+\frac{(n+1)^2}{1^3}-\frac{(n+1)^3}{1^4}+\ldots\mp\frac{(n+1)^{n-2}}{1^{n-1}}$$
$$\pm\frac{(n+1)^{n-1}}{(n+2).1^{n-1}}$$

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{2^2}+\frac{(n+1)^2}{2^3}-\frac{(n+1)^3}{2^4}+\ldots\mp\frac{(n+1)^{n-2}}{2^{n-1}}$$
$$\pm\frac{(n+1)^{n-1}}{(n+3).2^{n-1}}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{n}-\frac{n+1}{n^2}+\frac{(n+1)^2}{n^3}-\frac{(n+1)^3}{n^4}+\ldots\mp\frac{(n+1)^{n-2}}{n^{n-1}}$$
$$\pm\frac{(n+1)^{n-1}}{(2n+1)^{n-1}}$$

Durch Substitution dieser Reihenausdrücke für $\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3} \ldots \frac{1}{2n+1}$ wird die vorgegebene Reihe in n Partialreihen zerlegt, so daß

$$S =$$

$$\left[\frac{n}{1}\right].1^{n-1} - \left[\frac{n}{2}\right].2^{n-1} + \left[\frac{n}{3}\right].3^{n-1} - \ldots \pm n^{n-1}$$

$$-(n+1)\left(\left[\frac{n}{1}\right].1^{n-2} - \left[\frac{n}{2}\right].2^{n-2} + \left[\frac{n}{3}\right].3^{n-2} - \ldots \pm n^{n-2}\right)$$

$$+(n+1)^2\left(\left[\frac{n}{1}\right].1^{n-3} - \left[\frac{n}{2}\right].2^{n-3} + \left[\frac{n}{3}\right].3^{n-3} - \ldots \pm n^{n-3}\right)$$

$$- \text{etc.}$$

$$\mp(n+1)^{n-2}\left(\left[\frac{n}{1}\right].1 - \left[\frac{n}{2}\right].2 + \left[\frac{n}{3}\right].3 - \ldots \pm n\right)$$

$$\pm(n+1)^{n-1}\left(\left[\frac{n}{1}\right].\frac{1}{n+2} - \left[\frac{n}{2}\right].\frac{2}{n+3} + \left[\frac{n}{3}\right].\frac{3}{n+3} \ldots \pm \frac{n}{2n+1}\right)$$

ist, wo die oberen Vorzeichen überall für ein ungerades n gelten.

Es ist (Arithmetische Reihen höherer Ordnungen, 2.)

$$\pm\left(0^m - \left[\frac{n}{1}\right].1^m + \left[\frac{n}{2}\right].2^m - \left[\frac{n}{3}\right].3^m + \ldots \pm n^m\right)$$

das Anfangsglied der nten Unterschiedsreihe für die Hauptreihe $0^m, 1^m, 2^m \ldots n^m$, also (a. a. O. 20.

§. 6.) $= 0$, so lange $m < n$ ist. Daher fallen von den vorstehenden Reihen alle bis auf die letzte aus, und es ist

$$S = \pm (n+1)^{n-1} \left\{ \left[\frac{n}{1}\right] \cdot \frac{1}{n+2} \right.$$

$$\left. - \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \frac{2}{n+3} - \left[\frac{n}{3}\right] \cdot \frac{3}{n+4} + \ldots \pm \frac{n}{2n+1} \right\}$$

oder

$$= \pm n(n+1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{n+2} \right.$$

$$- \left[\frac{n-1}{1}\right] \cdot \frac{1}{n+3} + \left[\frac{n-1}{2}\right] \cdot \frac{1}{n+4} \cdot$$

$$\left. \mp \left[\frac{n-1}{1}\right] \cdot \frac{1}{2n} \pm \frac{1}{2n+1} \right\}$$

Es ist, das obere Vorzeichen für ein ungerades n genommen,

$$\pm \left[\frac{1}{n+2} - \left[\frac{n-1}{1}\right] \cdot \frac{1}{n+3} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{n-1}{2}\right] \cdot \frac{1}{n+4} - \ldots \pm \frac{1}{2n+1} \right]$$

das Anfangsglied der $n-1$ten Differenzreihe für die Hauptreihe

$$\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \frac{1}{n+4}, \frac{1}{n+5}, \ldots\ldots \frac{1}{2n+1}, \text{ etc.}$$

Sucht man die Anfangsglieder der Differenzreihen durch wirkliche Subtraction, so wird

die erste Differenzreihe

$$-\frac{1}{(n+2)(n+3)}, -\frac{1}{(n+3)(n+4)}, -\frac{1}{(n+4)(n+5)}, \text{ etc.}$$

die zweyte

$$+\frac{1.2}{(n+2)(n+3)(n+4)}, +\frac{1.2}{(n+3)(n+4)(n+5)} \text{ etc.}$$

die dritte . . . . . $-\frac{1.2.3}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$ etc.
u. s. w.

also das Anfangsglied der $(n-1)$ten Unterschiedsreihe
$\pm\frac{1.2.3\ldots\ldots n-1}{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots 2n+1}$; das obere Vorzeichen für ein ungerades n genommen. Hierdurch wird

$$S = \pm\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots n}{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots\ldots(2n+1)}.(n+1)^{n-1}$$

wo das obere Vorzeichen, wie bisher, für ein ungerades n gilt, oder auch ohne diese Vorschrift

$$S = \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{(n+2)(n+3)(n+4)..(2n+1)}.(n+1)^{n-1}.(-1)^{n-1}.$$

11. Die in dem Art., Summirbare Reihe, 16., mitgetheilte Formel von Euler kann als eine Verallgemeinerung der Formel in (4) in ihrer ersten Gestalt angesehen werden. Ist nämlich

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{ etc.} = S$$

und

$$Aa + A'a'x + A''a''x^2 + A'''a'''x^3 + \text{etc.} = Z$$

so ist, wenn A, A', A'', A'''.... als Glieder einer arithmetischen Reihe einer höheren Ordnung betrachtet werden, allgemein das Glied in Z, dessen Stelle nach dem ersten durch p bezeichnet wird,

$$a^{(p)}x^p\left(A + \left[\frac{p}{1}\right]\Delta A + \left[\frac{p}{2}\right]\Delta^2 A + \ldots \right.$$
$$\left. + \left[\frac{p}{1}\right]\Delta^{p-1}A + \Delta^p A\right)$$

wo ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, u. s. w. die Anfangsglieder der ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Unterschiedsreihe für die Hauptreihe A, A', A'', A''' etc. sind.

Wird nun p nach und nach $=0, 1, 2, 3,$ etc. gesetzt, so wird Z dadurch in mehrere Partialreihen zerlegt, so daß

$$
\begin{aligned}
Z = {} & A(a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{IV}x^4 + \text{etc.}) \\
& + x.\Delta A(a' + 2a''x + 3a'''x^2 + 4a^{IV}x^3 + 5a^{V}x^4 + \text{etc.}) \\
& + x^2.\Delta^2 A(a'' + 3a'''x + 6a^{IV}x^2 + 10a^{V}x^3 + 15a^{VI}x^4 + \text{etc.}) \\
& + x^3\,\Delta^3 A(a''' + 4a^{IV}x + 10a^{V}x^2 + 20a^{VI}x^3 + 35a^{VII}x^4 + \text{etc.}) \\
& + x^4.\Delta^4 A(a^{IV} + 5a^{V}x + 15a^{VI}x^2 + 35a^{VII}x^3 + 70a^{VIII}x^4 + \text{etc.}) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die in A multiplicirte Reihe ist S selbst, die in $x.\Delta A$ multiplicirte, wie man leicht wahrnehmen wird, $\frac{\partial S}{\partial x}$, die in $x^2.\Delta^2 A$ multiplicirte, $\frac{\partial^2 S}{1.2.\partial x^2}$, die in $x^3.\Delta^3 A$ multiplicirte, $\frac{\partial^3 S}{1.2.3.\partial x^3}$, u. s. w.

Folglich

$$
Z = AS + \frac{x.\Delta A}{1} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{x^2.\Delta^2 A}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{x^3.\Delta^3 A}{1.2.3.} \cdot \frac{\partial^3 S}{\partial x^2} + \text{etc.}
$$

Sind A, A′, A″.... wirklich Glieder einer arithmetischen Reihe von irgend einer höheren Ordnung, so daß die Differenzen von einer gewissen Ordnung an sämmtlich verschwinden, so findet man hierdurch wirklich die Summe von Z, vorausgesetzt, daß die Reihe S oder $a + a'x + a''x^2 +$ etc. selbst nicht irgendwo abbricht, in welchem Falle einer der Differentialquotienten $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}$, u. s. w. und alle ihm folgenden Null werden würde. Sonst erhält man nur statt der ursprünglichen Reihe Z eine andre, die manchmal schneller convergirt, als jene.

12. Verwandt der obigen Summirungsmethode ist diejenige, nach welcher die einzelnen Glieder einer zu summirenden unendlichen Reihe selbst wieder in unendliche Reihen aufgelös't werden, deren Glieder in ei-

ner andern Verbindung als der ursprünglichen wieder neue summirbare Reihen bilden. Diese Methode ist von Pfaff in einer kleinen Schrift: Versuch einer neuen Summationsmethode. Berlin, 1788. vorgetragen, und durch viele wichtige Anwendungen erläutert worden. Man wird sich von ihr einigermaßen einen Begriff machen können, wenn man in dem Art., Summirbare Reihe, 21. die Summe der daselbst in die Potenzen von φ multiplicirten unendlichen Reihen als anders woher (z. B. aus 8. des gegenwärtigen Art.) bekannt ansiehet; es wird nämlich alsdann umgekehrt in Beziehung auf die dortige Absicht

$$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}$$

welches dort als bekannt angenommen wurde.

13. Wenn das allgemeine Glied einer Reihe als eine Function der Stellenzahl gegeben ist, so hängt die Erfindung des summatorischen Gliedes (s. den Artikel, Reihe, 36.) von der umgekehrten Differenzenrechnung ab. Bezeichnet nämlich y das allgemeine oder der Stelle x angehörige Glied einer Reihe a, a', a'' etc., S das summatorische Glied derselben, so daß $S = a + a' + a'' + \ldots + y$ ist, so ist $S - y$ die Summe dieser Reihe bis zu dem vorletzten Gliede oder von $x - 1$ Gliedern. Wenn also x in $x - 1$ übergeht, so verwandelt sich S in $S - y$, und umgekehrt. Daher ist y die endliche Differenz von $S - y$ für $\Delta x = 1$, d. i., $\Delta(S - y) = y$, also $S - y = \Sigma y + C$, wo Σ das Integrationszeichen für endliche Differenzen ist, und $S = \Sigma y + y + C$. Das Integral Σy muß in der Voraussetzung, daß Δx unveränderlich und $= 1$ ist, gesucht, und die Constante C dadurch bestimmt werden, daß für $x = 1$, $S = a$, oder für $x = 0$, $S = 0$ werden muß. — Da $y = \Sigma \Delta y$ so hat man auch $S = \Sigma y + \Sigma \Delta y + C = \Sigma(y + \Delta y) + C$, wo $y + \Delta y$ das der Stelle $x + 1$ entsprechende Glied ist. Man s. Differenzenrechnung, 66. und folgg.

14. Beyspiele von Reihen, auf welche diese Summirungsmethode anwendbar ist, giebt der Art. Differenzenrechnung, 72. — 81; nur hätte dort das Zeichen S nicht gleichbedeutend mit Σ gebraucht werden sollen. Unter den Reihen, deren allgemeines Glied eine algebraische Function der Stellenzahl ist, werden, wie aus den dortigen Beyspielen zum Theil erhellt, nach dieser Methode sehr leicht summirt diejenigen, deren Glieder Producte aus den auf einander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe sind, diese Glieder immer in gleicher Anzahl und so genommen, daß der erste Factor jedes Products mit dem zweyten des nächstvorhergehenden übereinkommt, ferner die Reihen von Brüchen, deren Zähler die Glieder einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung, die Nenner aber Producte von der eben angezeigten Beschaffenheit sind, wobey jedoch die Zahl der Factoren in jedem Nenner die Ordnungszahl der arithmetischen Reihe der Zähler wenigstens um 2 übertreffen muß, wovon der Grund ist, daß $\Sigma\frac{1}{x}$ sich nicht algebraisch angeben läßt. Aber auch Reihen, deren allgemeines Glied eine transcendente Function der Stellenzahl ist, entziehen sich dieser Summirungsmethode nicht. In dem angezogenen Art. findet man z. B. die Reihen summirt, deren Glieder die Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Winkels α sind. Hier soll noch die Anwendung auf die rücklaufenden Reihen gemacht werden, unter welchen die arithmetischen jeder Ordnung und die geometrischen begriffen sind.

15. Die jetzt vorzunehmende Summirung rücklaufender Reihen setzt die Kenntniß des allgemeinen Gliedes derselben voraus. In dem Art., Rücklaufende Reihe, ist gezeigt, wie dasselbe aus dem erzeugenden Bruche gefunden werde. Es kann aber solches auch, nach der dort in (29) geschehenen Anzeige, auf andere Art, durch Integrirung einer linearen Gleichung mit

endlichen Differenzen, aus einer hinlänglichen Anzahl der ersten Glieder, und der Beziehungsscale gefunden worden seyn, ohne erst zu dem Urbruche zurückzugehen. Ein zweytes Erforderniß zu der durch die obige Summirungsmethode zu bewerkstelligenden Summation rücklaufender Reihen ist, daß man Σa^x, $\Sigma x a^x$, $\Sigma x^2 a^x$ u. s. w. anzugeben wisse. Da der Artikel, Differenzenrechnung, hierüber nichts enthält, so soll das nöthige davon hier erst beygebracht werden, und zwar unter der allein hier brauchbaren Voraussetzung, daß $\Delta x = \omega$ eine unveränderliche Größe ist.

16. Da $\Delta . a^x = a^{x+\omega} - a^x = a^x(a^\omega - 1)$, so ist umgekehrt $\Sigma\Delta . a^x = (a^\omega - 1)\Sigma a^x$, d. i.

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^\omega - 1} + C.$$

Ferner ist

$$\Delta . x a^x = (x + \omega)a^{x+\omega} - x a^x$$
$$= x a^x(a^\omega - 1) + \omega a^\omega . a^x$$

also umgekehrt

$$(a^\omega - 1)\Sigma x a^x = \Sigma\Delta x a^x - \omega a^\omega . \Sigma a^x$$
$$= x a^x - \frac{\omega a^{x+\omega}}{a^\omega - 1} + C$$

und

$$\Sigma x a^x = \frac{x a^x}{a^\omega - 1} - \frac{\omega a^{x+\omega}}{(a^\omega - 1)^2} + C.$$

Auf diese Art kann man weiter gehen, und $\Sigma x^2 a^x$ aus Σa^x, $\Sigma x a^x$ u. s. w. finden.

17. Nun sey die rücklaufende Reihe

1, 4, 14, 46, 146, etc.

gegeben, deren allgemeines, der Stelle $x + 1$ angehöriges Glied, wie aus dem Art., Rücklaufende Reihe, 15. erhellt, $- 2^x + 2 . 3^x$ ist, so wird das summatorische Glied derselben $S = - \Sigma . 2^x + 2 . \Sigma . 3^x$ d. i., nach der vorigen Formel für Σa^x, wenn ω darin $= 1$ gemacht wird, $= - 2^x + 3^x + \text{Const.}$ Für $x = 0$

wird $S = 0$, also Const. $= 0$, und S schlechthin $= -2^x + 3^x$. Für $x = 5$ hat man also

$$1 + 4 + 14 + 46 + 146 = -2^5 + 3^5$$
$$= -32 + 243$$
$$= 211$$

wie auch durch wirkliche Zusammenrechnung der Glieder gefunden wird.

Die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe als Werth des Urbruchs für $z = 1$ genommen, kann, weil dabey die Anzahl der Glieder nicht in Betracht kommt, keine andere, als die gefundene Constante seyn, welche $= 0$ ist. Und so findet sich auch dieselbe aus dem Urbruche $\frac{1 - z}{1 - 5z + 6z^2}$, wenn man darin $z = 1$ setzt.

18. Die Reihe sey

1, 3, 11, 43, 167, 631, etc.

von welcher das allgemeine der Stelle $x + 1$ angehörige Glied (Rücklaufende Reihe, 16.) $\frac{2}{3}x \cdot 3^x - 3^x + 2 \cdot 2^x$ ist. Für diese wird also $S = \frac{2}{3}\Sigma x . 3^x - \Sigma 3^x + 2 . \Sigma . 2^x$, d. i., nach den obigen Formeln ($\omega = 1$ gesetzt) $= \frac{2}{3}\left(\frac{x \cdot 3^x}{2} - \frac{3^{x+1}}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot 3^x + 2 \cdot 2^x +$ Const. $= x . 3^{x-1} - 3^x + 2^{x+1} +$ Const. Die Constans wird, da S für $x = 0$, auch $= 0$ wird, $= -1$. Daher ist $S = (x - 3)3^{x-1} + 2^{x+1} - 1$. Für $x = 6$ wird also

$$1 + 3 + 11 + 43 + 167 + 631 = 3 . 3^5 + 2^7 - 1$$
$$= 729 + 128 - 1$$
$$= 856$$

wie sich auch durch wirkliches Zusammenrechnen findet.

Die Constante -1 giebt den Werth des Urbruchs $\frac{1-5z+8z^2}{1-8z+21z^2-18z^3}$ für $z=1$.

19. Ist das allgemeine Glied einer rücklaufenden Reihe durch Winkelfunctionen gegeben, so möchte es am kürzesten seyn, statt dieser ihre Werthe in Exponentialausdrücken zu setzen, um alsdann von den vorigen Formeln Gebrauch machen zu können.

Ist z. B. das der Stelle $x+1$ angehörige Glied $\frac{f^x}{\sin\varphi}(a\sin(x+1)\varphi+\frac{b}{f}\sin x\varphi)$, wo f und φ aus der Scale der Relation, a und b aber aus den beiden ersten oder irgend ein Paar andern Gliedern der Reihe bestimmt werden, so erhält man dafür, wenn

$$f(\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1})=p$$
$$\text{und } f(\cos\varphi-\sin\varphi.\sqrt{-1})=q$$

gemacht wird, den Ausdruck $\frac{a(p^{x+1}-q^{x+1})}{p-q}$

$$+\frac{b(p^x-q^x)}{p-q}=\frac{ap+b}{p-q}.p^x-\frac{aq+b}{p-q}.q^x$$

also $S=\frac{ap+b}{p-q}.\Sigma p^x-\frac{aq+b}{p-q}.\Sigma q^x$

$$=\frac{ap+b}{p-q}.\frac{p^x}{p-1}-\frac{aq+b}{p-q}.\frac{q^x}{q-1}+C.$$

Und nach Bestimmung der Constans aus dem Falle $S=0$, für $x=0$

$$S=\frac{apq-ap+bq-b}{(p-q)(p-1)(q-1)}p^x-\frac{apq-aq+bp-b}{(p-q)(p-1)(q-1)}.q^x$$

$+\frac{a+b}{(p-1)(q-1)}$, und wenn man f und φ statt p und q wieder herstellt,

$$S = \frac{af^2 - b}{1-2f\cos\varphi+f^2} \cdot \frac{f^x \sin x\varphi}{\sin\varphi} - \frac{a}{1-2f\cos\varphi+f^2} \cdot \frac{f^{x+1}\sin(x+1)\varphi}{\sin\varphi}$$
$$+ \frac{bf^2}{1-2f\cos\varphi+f^2} \cdot \frac{f^{x-1}\sin(x-1)\varphi}{\sin\varphi} + \frac{a+b}{1-2f\cos\varphi+f^2}$$

Exempel. Für die Reihe

$$1,\ 3,\ 2,\ -1,\ -3,\ -2,\ 1,\ \text{etc.}$$

ist (Rücklaufende Reihe, 19) $a = 1$, $b = 2$, $f = 1$,

$\varphi = \frac{1}{3}\pi$; also wird für dieselbe

$$S = \frac{2\sin(x-1)\varphi - \sin(x+1)\varphi - \sin x\varphi}{\sin\varphi} + 3$$

$$= \frac{\sin(x-1)\varphi - \sin x\varphi}{\sin\varphi} - 2\cos x\varphi + 3.$$

Für $x = 6$ erhält man hiernach

$$S = \frac{\sin\frac{5}{3}\pi - \sin\frac{6}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} - 2\cos\frac{6}{3}\pi + 3$$

$$= -1 - 2 + 3 = 0$$

Und es ist auch $1 + 3 + 2 - 1 - 3 - 2 = 0$.

Die Constante 3 ist auch hier der Werth des Un-

bruchs $\frac{1+2z}{1-z+z^2}$ für $z = 1$.

20. Die Summen rücklaufender Reihen lassen sich übrigens, wenn außer der Beziehungsscale so viele von den ersten und letzten Gliedern der Reihe gegeben sind, als die Scale der Relation Glieder hat, auf eine elementarische, schon von Moivre gewiesene Art finden.

Es seyn nämlich A, B, C, ... G, H Glieder einer solchen Reihe, deren Beziehungsscale $+\alpha, -\beta$, ist, und $A + B + C + \ldots + G + H = S$, so ist

$$\begin{aligned}
A &= A \\
B &= B \\
C &= B\alpha - A\beta \\
D &= C\alpha - B\beta \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
G &= F\alpha - E\beta \\
H &= G\alpha - F\beta
\end{aligned}$$

also, wenn man auf beiden Seiten addirt,

$S = A + B + (S - A - H)\alpha - (S - G - H)\beta$

und hieraus

$$S = \frac{A + B - (A + H)\alpha + (G + H)\beta}{1 - \alpha + \beta}$$

Auf ähnliche Art läßt sich die Summe der Reihe finden, wenn die Scale der Relation aus drey oder mehr Gliedern besteht.

21. Verlangt man die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe, so fällt die Betrachtung der letzten Glieder aus, und es ist daher in dem angenommenen Falle

$$S = \frac{A + B - A\alpha}{1 - \alpha + \beta}$$

Dieß dient den Urbruch einer rücklaufenden Reihe zu finden, wozu aber die Glieder der Beziehungsscale, so wie die in den Ausdruck für S eingehenden ersten Glieder der Reihe noch in die erforderlichen Potenzen der unbestimmten z zu multipliciren sind.

Für die Reihe

$1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 +$ etc.

z. E. hat man $A = 1$, $B = 4z$, $\alpha = 5z$, $\beta = 6z^2$,

also ist $S = \frac{1 + 4z - 5z}{1 - 5z + 6z^2} = \frac{1 - z}{1 - 5z + 6z^2}$.

22. Da sich aus der Beziehungsscale einer rücklaufenden Reihe der Nenner des erzeugenden Bruches

leicht ergiebt, so läßt sich der Zähler dazu auch durch die Methode der unbestimmten Coefficienten finden. Der Urbruch selbst giebt alsdann, wenn man darin die unbestimmte z, in deren auf einander folgende Potenzen die Glieder der rücklaufenden Reihe multiplicirt werden, $= 1$ setzt, die Summe der ohne Ende fortgesetzten Reihe.

Um nun die Summe bis zu einem gewissen bestimmten Gliede zu erhalten, muß man auf die vorige Art die Summe der unendlichen Reihe, welche das jenem Gliede zunächst folgende zum Anfangsgliede hat, suchen, wozu außer diesem Gliede von der nächstfolgenden noch so viele als die Beziehungsscale Glieder weniger eins enthält, durch Functionen ihrer Stellen gegeben seyn müssen. Der Unterschied beider unendlichen Summen giebt die verlangte endliche.

23. Wenn der Nenner der gebrochenen Function, aus welcher die rücklaufende Reihe entsteht, Null ist für $z = 1$, so läßt sich die Summe eines endlichen Stücks der Reihe durch das Verfahren in (20) nicht finden, indem solches diese Summe $= \frac{0}{0}$ giebt. Bey dem Verfahren in (22) wird, wenn $z = 1$ gemacht wird, diese Summe gleichfalls $\frac{0}{0}$; man muß alsdann die Differentialrechnung nach der in dem Art. Function, 50., gewiesenen Art zu Hülfe nehmen, oder sie durch ein anderes gleichgültiges Verfahren ersetzen, um den Werth der Summe in dem vorliegenden Falle zu erhalten.

Exempel. Von der Reihe 2, 11, 29, 65, etc. für welche die Beziehungsscale $+ 3, - 2$; ist, sucht man die Summe der acht ersten Glieder. Der Urbruch der Reihe ist $\frac{2 + 5z}{1 - 3z + 2z^2}$, und das allge-

meine Glied der aus diesem Bruche entwickelten Reihe $2 + 11z + 29z^2 + \text{etc.} \ldots . (9.2^m - 7)z^m$, also die Reihe vom 9ten Gliede an $2297z^8 + 4601z^9 + 9209z^{10} + \text{etc.} = z^8(2297 + 4601z + 9209z^2 + \text{etc.})$. Der erzeugende Bruch der eingeschlossenen Reihe ist $\frac{2297 - 2290z}{1 - 3z + 2z^2}$

Daher ist

$$2 + 11z + 29z^2 + \ldots . + 1145z^7$$
$$= \frac{2 + 5z - 2297z^8 + 2290z^9}{1 - 3z + 2z^2}$$

welcher Bruch $\frac{0}{0}$ wird für $z = 1$. Differentiirt man Zähler und Nenner jeden für sich, so ist der Quotient der Differentiale $\frac{5 - 2297.8z^7 + 2290.9z^8}{-3 + 2.2z}$ welcher $= 2239$ für $z = 1$ wird. Und dieses ist auch die verlangte Summe.

24. In dem eben erwähnten Falle, wo der Nenner des Urbruchs $1 - z$ oder eine Potenz von $1 - z$ als Factor enthält, kann man auch die Summe einer endlichen Anzahl Glieder der rücklaufenden Reihe dadurch finden, daß man den Urbruch in zwey Brüche, deren einer die Potenz von $1 - z$ zum Nenner hat, zerlegt. Die Reihe, welche aus der Entwickelung dieses Bruchs hervorgeht, ist in Absicht der Coefficienten eine arithmetische von einer um 1 niedrigern Ordnung als der Exponent der Potenz von $1 - z$; der andere Bruch giebt entwickelt eine rücklaufende Reihe, für welche die Voraussetzung in (23) nicht mehr Statt findet. Die vorgegebene Reihe wird also in zwey zerlegt, die einzeln nach Arithmet. Reihen höherer Ordnungen, 12., und nach dem hier gewiesenen Verfahren bis zu irgend welchem Gliede summirt werden können.

25. Will man die Summirung der arithmetischen Reihen höherer Ordnungen nicht aus dem angeführten Artikel voraussetzen, so kann man solche durch die nur erklärte Summirungsmethode finden. Da nämlich das der Stelle $x+1$ entsprechende Glied $y+\Delta y$ einer arithmetischen Reihe, deren erstes Glied A, Anfangsglieder der Differenzreihen ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, u. s. w. sind, ist

$$A + x.\Delta A + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 A + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 A + \text{etc.}$$

so wird, wenn Sy die Summe von x Gliedern der Reihe bezeichnet,

$$Sy = A\Sigma x^0 + \Delta A.\Sigma x + \frac{\Delta^2 A}{1.2}.\Sigma(x-1)x + \frac{\Delta^3 A}{1.2.3}\Sigma(x-2)(x-1)x + \text{etc.}$$

d. i. aus Differenzenrechnung, 1. und 58.,

$$Sy = xA + \frac{(x-1)x}{1.2}\Delta A + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}\Delta^2 A + \frac{(x-3)\ldots x}{1.2\ldots 4}\Delta^3 A + \text{etc.}$$

ohne Constans, weil für $x=0$, auch $Sy=0$ werden muß.

26. Es ist aber zu bemerken, daß Sy sich auch noch auf verschiedene andere Weise ausdrucken läßt. So ist

$$Sy = \frac{x}{1}A_0 + \frac{x(x+1)}{1.2}\Delta A_{-1} + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\Delta^2 A_{-2} + \frac{x(x+1)\ldots(x+4)}{1.2\ldots\ldots 4}\Delta^3 A_{-3} + \text{etc.}\ldots$$

wo A_0, A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, etc. die der Stellenzahlen 0, -1, -2, -3 etc. entsprechenden Glieder anzeigen, also die Reihe rückwärts fortgesetzt werden muß.

Ist z. B. $y = x^4$, so ist $A_0 = 0$, $\Delta A_{-1} = -1$, $\Delta^2 A_{-2} = +14$, $\Delta^3 A_{-3} = -36$, $\Delta^4 A_{-4} = +24$, alle übrigen Differenzen aber $= 0$, daher ist

$$Sx^4 = -1 . \frac{x(x+1)}{1 . \quad 2}$$

$$+ 14 . \frac{x(x+1)(x+2)}{1 . \quad 2 . \quad 3} - 36 . \frac{x(x+1)..(x+3)}{1 . \quad 2 . ... 4}$$

$$+ 24 . \frac{x(x+1).....(x+4)}{1 . \quad 2 . ... 5 .}$$

Herr Prof. Schweins giebt diese Formel nebst mehreren andern in seiner Analysis, S. 326. unter Nr. 565 *), und scheint sie für neu zu halten. Neu ist sie aber nicht, sondern sie steht im wesentlichen eben so, wie hier, ausgedruckt schon in Meißners Stern und Kern der Algebra, wovon die zweyte Ausgabe zu Hamburg, 1740. erschienen ist. Das Verfahren die Glieder der rückwärts fortgesetzten Reihe und deren Differenzen in Betracht zu ziehen wird dort Halcken, einem geschickten Rechner des siebzehnten Jahrhunderts, zugeschrieben.

Die beiden Formeln für Sy sind übrigens bloß besondere Fälle folgender allgemeineren

$$Sy = xA_{-(r-1)} + \frac{x(x+2r-1)}{1 . \quad 2} \Delta A_{-(2r-1)}$$

$$+ \frac{x(x+3r-1)(x+3r-2)}{1 . \quad 2 . \quad 3} \Delta^2 A_{-(3r-1)}$$

$$+ \text{etc.}$$

wo r jede beliebige ganze, positive oder negative, Zahl seyn kann. Für die erste (gewöhnliche) Formel ist $r = 0$, für die zweyte $r = 1$.

*) Wird diese Formel mit Nr. 561., welche dieselben Litteralproducte enthält, zusammengehalten, so zeigt sich, daß letztere unrichtig ist.

Nr

Von der Richtigkeit dieser Formel, deren Herleitung hier zu weitläufig werden würde, kann man sich leicht a posteriori versichern, wenn man $A_{-(r-1)}$, $\Delta A_{-(2r-1)}$, $\Delta^2 A_{-(3r-1)}$, u. s. w. nach (Arithmet. Reihen höherer Ordn., 9.) durch A, ΔA, $\Delta^2 A$, u. s. w. ausdrückt, und die gefundenen Werthe in der obigen Formel substituirt, wodurch sie in die von (25) übergeht. Es ist aber nicht zu übersehen, daß dort das Anfangsglied A die Stellenzahl 0 hat, welche hier 1 ist, daher r, 2r, 3r u. s. w. statt z kommen, um $A_{-(r-1)}$, $A_{-(2r-1)}$, $A_{-(2r-1)}$ zu finden.

Nimmt man $y = x^4$, r aber erstlich $= 2$, und dann $= -1$, so wird

$$Sx^4 = x - 65.\frac{x(x+3)}{1.\ 2} + 194.\frac{x(x+5)(x+4)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$- 132.\frac{x(x+7)(x+6)(x+5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$+ 24.\frac{x(x+9)(x+8)(x+7)(x+6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

und

$$= 16.x + 175.\frac{x(x-3)}{1.\ 2} + 302.\frac{x(x-4)(x-5)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$+ 156.\frac{x(x-5)(x-6)(x-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$+ 24.\frac{x(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

Es wird sich weiterhin Gelegenheit zeigen, die Zahlcoefficienten in den vorigen Formeln für Sx^4 anders auszudrucken.

27. Für die Reihen, deren allgemeines Glied $y = \varphi(x)$ gegeben ist, läßt sich vermittelst des Taylorschen Lehrsatzes leicht ein allgemeiner Summen-Aus-

druck erhalten. Es bezeichne nämlich s die Summe von x Gliedern der Reihe bis mit zu y, so daß
$s = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) \ldots + \varphi(x-1) + \varphi(x)$
so ist

$$\varphi(x) = y$$

$$\varphi(x-1) = y - 1.\frac{\partial y}{\partial x} + 1^2.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - 1^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} + \text{etc.}$$

$$\varphi(x-2) = y - 2.\frac{\partial y}{\partial x} + 2^2.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - 2^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} + \text{etc.}$$

$$\vdots$$

$$\varphi(2) = \varphi(x-(x-2))$$
$$= y - (x-2)\frac{\partial y}{\partial x} + (x-2)^2.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - (x-2)^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} + \text{etc.}$$

$$\varphi(1) = \varphi(x-(x-1))$$
$$= y - (x-1)\frac{\partial y}{\partial x} + (x-1)^2\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - (x-1)^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} + \text{etc.}$$

also durch Zusammenrechnen

$$s = xy - \frac{\partial y}{\partial x}.S(x-1) + \frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2}.S(x-1)^2 - \frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3}.S(x-1)^3 + \text{etc.}$$

wo $S(x-1)$, $S(x-1)^2$, $S(x-1)^3$, etc. aus den in dem Art. Potenz, 39. gegebenen Ausdrücken für

Sx, Sx^2, Sx^3, u. s. w. gefunden werden, wenn man von derselben beziehungsweise x, x^2, x^3 u. s. w. abzieht, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, überall $x-1$ statt x setzt.

Man kann aber leicht Sx, Sx^2, Sx^3 u. s. w. selbst in den Summenausdruck bringen, wenn man das

$$\text{Glied } \varphi(0) = y - x.\frac{\partial y}{\partial x} + x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - \text{etc.}$$

noch mit einrechnet, und dann wieder abzieht. Da dieses der Stelle o entsprechende Glied nach der in (13) angenommenen Bezeichnung durch $'a$ vorzustellen ist, so wird

$$s = (x+1)y - {}'a - \frac{\partial y}{\partial x}.Sx + \frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2}.Sx^2 - \frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3}.Sx^3 + \text{etc.}$$

28. Nach Eulers Bemerkung, welcher den ersten Ausdruck für s in den Institt. calc. diff. P. II. §. 60. den andern ebendaselbst §. 136. giebt, sind diese Ausdrücke zur wirklichen Summirung der Reihen wenig brauchbar, weil für große x die Coefficienten sehr groß werden. Um den zweyten Summenausdruck indeß durch ein Exempel zu erläutern, sey $y = x^n$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} =$ $n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, u. s. w., also, weil $'a = 0$ ist,

$$Sx^n = (x+1)x^n - \frac{n}{1}.x^{n-1}.Sx + \frac{n(n-1)}{1.2}.x^{n-2}Sx^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}.x^{n-3}Sx^3 + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.\ 2.\ldots n}Sx^n.$$

Setzt man $n = 1$, so wird

$$Sx = (x + 1)x - Sx$$

also $Sx = \frac{x(x+1)}{1.\ 2.}$

Für $n = 2$ ist

$$Sx^2 = (x + 1)x^2 - 2x . Sx + Sx^2$$

welches wieder auf das vorige führt, so daß die Formel die Summen der geraden Potenzen unbestimmt läßt, die der ungeraden Potenzen aber auf eine doppelte Art giebt.

29. Da durch das Taylorsche Theorem die Differenz Δy durch Δx und die successiven Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, u. s. w. ausgedruckt wird, und daraus weiter $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ u. s. w. durch eben diese Größen ausgedruckt sich finden lassen *), so lassen sich auch umgekehrt die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. s. w. durch Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ u. s. w. und durch Δx ausdrucken. Durch eine Ausführung, welche für diesen Art. zu weitläufig werden würde, hat Lagrange zuerst gefunden, und Laplace erwiesen, daß allgemein

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} . \Delta x^n = \left[\log(1+\Delta y)\right]^n$$

ist, vorausgesetzt, daß man in dem Gliede rechter Hand bey der Entwickelung die Exponenten des Potenzirens von Δy in Exponenten des Differenzirens umwandelt.

Hiernach ist also, Δx, wie es hier der Fall ist, $= 1$ gesetzt

*) Man sehe Eulers Institt. calc. diff. P. II. c. III. §. 56.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \Delta y - \frac{1}{2}\Delta^2 y + \frac{1}{3}\Delta^3 y - \frac{1}{4}\Delta^4 y + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \Delta^2 y - \Delta^3 y + \frac{11}{12}\Delta^4 y - \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \Delta^3 y - \frac{3}{2}\Delta^4 y + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial^4 x} = \Delta^4 y - \text{etc.}$$

u. s. w. *). u. s. w.

Bringt man diese Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. s. w., so wie diejenigen von $S(x-1)$, $S(x-1)^2$, $S(x-1)^3$ u. s. w. in den ersten Ausdruck für s, so wird durch Zerfällung der Coefficienten von Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^4 y$ u. s. w. in ihre Factoren

$$s = xy - \frac{(x-1)x}{1.\ 2}\Delta y + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^2 y$$
$$- \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\Delta^3 y + \text{etc.}$$

Dieser Ausdruck ist zwar nur durch Induction gefunden, man kann sich aber sehr leicht von der Richtigkeit desselben a posteriori überzeugen, wenn man darnach die Summe einer geometrischen Reihe sucht, und solche mit dem bekannten Werthe derselben vergleicht. Zu dem Ende sey $y = e^x$, so ist $\Delta y = e^{x+1} - e^x = (e-1)e^x$, und eben so $\Delta^2 y = (e-1)^2 e^x$, $\Delta^3 y = (e-1)^3 e^x$ u. s. w. Da nun $s = \frac{e^{x+1} - e}{e-1} = \frac{(e^x - 1)e}{e-1}$ ist, so muß seyn

*) Man leitet diese Formeln auch leicht aus den Eulerischen a. a. O. ab.

$$\frac{(e^x - 1)e}{e - 1} = x.e^x - \frac{(x-1)x}{1.\ 2}(e-1)e^x$$
$$+ \frac{(x-1)x(x+1)}{1.\ 2.\ 3}(e-1)^2 e^x$$
$$- \frac{(x-1)x \ldots x+2}{1.\ 2. \ldots 4}(e-1)^3 e^x + \text{etc.}$$

oder

$$(e^x - 1)e = e^x\Big((e-1)x - \frac{(x-1)x}{1.\ 2}(e-1)^2$$
$$+ \frac{(x-1)x(x+1)}{1.\ 2.\ 3}(e-1)^3 - \text{etc.}\Big)$$
$$= e^x\Big(e - \Big(1 - \frac{x-1}{1}.(e-1) + \frac{(x-1)x}{1.\ 2}(e-1)^2$$
$$- \frac{(x-1)x(x+1)}{1.\ 2.\ 3}(e-1)^3 + \text{etc.}\Big)\Big)$$
$$= e^x(e - (1 + e - 1)^{-(x-1)}) = e^x(e - e^{-(x-1)})$$
$$= e^{x+1} - e.$$

wie gehörig.

30. Exempel. Es sey $y = x^4$, so wird

$$Sx^4 = x.x^4 - \frac{(x-1)x}{1.\ 2}\Delta x^4 + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.\ 2.\ 3}.\Delta^2 x^4$$
$$- \frac{(x-1)x \ldots x+2}{1.\ 2. \ldots 4}\Delta^3 x^4 + \frac{(x-1)x \ldots x+3}{1\ 2 \ldots 5}.\Delta^4 x^4.$$

Die Differenzen Δx^4, $\Delta^2 x^4$, $\Delta^3 x^4$ u. s. w. lassen sich als Summe von Combinationen, in welcher die verbundenen Elemente Factoren sind, darstellen, und zwar hier, wo $\Delta x = 1$ ist, aus den Elementen x, $x+1$, $x+2$ u. s. w. Da eine umständlichere, tiefer geschöpfte Ausführung hier nicht an ihrem Orte seyn würde, so muß eine elementarische Darstellung ihre Stelle vertreten.

Es ist mit Zuziehung von (Buchstabenrechnung, 18 x.)

$$\Delta x^4 = (x+1)^4 - x^4 = ((x+1)-x)((x+1)^3+(x+1)^2 x + (x+1)x^2 + x^3)$$

$$= 1.(x^3 + x^2(x+1) + x(x+1)^2 + (x+1)^3)$$

und hieraus

$$\Delta^2 x^4 = 1. \left\{ (x+1)^3 + (x+1)^2(x+2) + (x+1)(x+2)^2 + (x+2)^3 - (x+1)^3 - x(x+1)^2 - x^2(x+1) - x^3 \right\}$$

$$= 1 ((x+2-x)(x+1)^2 + ((x+2)^2 - x^2)(x+1) + (x+2)^3 - x^3)$$

Aber

$$(x+2)^2 - x^2 = (x+2-x)((x+2)+x)$$

$$(x+2)^3 - x^3 = (x+2-x)((x+2)^2 + (x+2)x + x^2)$$

Dadurch wird, wenn man alles gehörig ordnet,

$$\Delta^2 x^4 = 1.2 \left\{ x^2 + x(x+1) + x(x+2) + (x+1)^2 + (x+1)(x+2) + (x+2)^2 \right\}$$

und hieraus

$$\Delta^3 . x^4 = 1.2 \left\{ (x+1)^2 + (x+1)(x+2) + (x+1)(x+3) + (x+2)^2 + (x+2)(x+3) + (x+3)^2 - (x+1)^2 - (x+1)(x+2) - x(x+1) - (x+2)^2 - x(x+2) - x^2 \right\}$$

$$= 1.2 \left\{ (x+3-x)(x+1) + (x+3-x)(x+2) + (x+3)^2 - x^2 \right\}$$

$$= 1.2.3 \left(x + (x+1) + (x+2) + (x+3) \right)$$

Hieraus endlich

$$\Delta^4 x^4 = 1.2.3\Big((x+1-x) + (x+2-(x+1)) + (x+3-(x+2)) + (x+4-(x+3))\Big) = 1.2.3.4$$

wie bekannt.

Bedient man sich also der Hindenburgischen Zeichen (Combinatorische Analysis, 25.) und erinnert sich, daß $x^4 = xxxx$, so ist

$$S.x^4 = x.{}'\underset{(x)}{D} - \frac{1}{2}(x-1)x.{}'\underset{(x,x+1)}{C} + \frac{1}{3}(x-1)(x+1).\ {}'\underset{(x,x+1,x+2)}{B} - \frac{1}{4}(x-1)x(x+1)(x+2).\ {}'\underset{(x,x+1,x+2,x+3)}{A} + \frac{1}{5}(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3).$$

So hat Herr Prof. Schweins in seiner Analysis die von ihm für $S.x^4$ gegebenen Ausdrücke eingerichtet. Den eben gefundenen hat er nicht.

31. Behandelt man den zweyten Ausdruck für s in (27) eben so, wie jetzt mit dem ersten geschehen ist, oder kürzer, setzt man in dem transformirten Ausdrucke in (28) $x+1$ statt x, wobey aber y als terminus a quo sammt den davon abhängenden Δy, $\Delta^2 y$ u. s. w. ungeändert bleibt, so wird nach Abrechnung des der Stelle o entsprechenden und mit eingerechneten Gliedes $'a$

$$s = (x+1)y - \frac{x(x+1)}{1.\ 2}\Delta y + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^2 y - {}'a - \frac{x(x+1)\ldots x+3}{1.\ 2.\ldots\ldots 4}\Delta^3 y + \text{etc.}$$

Diese Formel läßt sich mit der ersten in (26) für Sy vergleichen.

32. Exempel. Ist $y = x^4$, so ist $'a = 0$, und es wird

$$Sx^4 = (x+1)x^4 - \frac{x(x+1)}{1.\ 2} \Delta x^4 + \frac{x(x+1)(x+2).}{1.\ 2.\ 3} \Delta^2 x^4 - \frac{x(x+1) \ldots\ldots (x+3)}{1.\ 2 \ldots\ldots\ldots 4} . \Delta^3 x^4 + \frac{x(x+1) \ldots\ldots (x+4)}{1.\ 2 \ldots\ldots\ldots 5} . \Delta^4 x^4$$

$$= (x+1).\underset{(x)}{'D} - \frac{1}{2} x(x+1).\underset{(x,x+1)}{'C} + \frac{1}{3} x(x+1)(x+2).\underset{(x,x+1,x+2)}{'B} - \frac{1}{4} x(x+1)(x+2)(x+3).\underset{(x,x+1,x+2,x+3)}{'A} + \frac{1}{5} x(x+1) \ldots\ldots (x+4).$$

Da $S.x^4$ auch $= S.(x+1)^4 - (x+1)^4$, so wird nach eben dieser Formel, weil $(x+1)(x+1)^4 - (x+1)^4 = x(x+1)^4$

$$Sx^4 = x.\underset{(x+1)}{'D} - \frac{1}{2} x(x+1).\underset{(x+1,x+2)}{'C} + \frac{1}{3} x(x+1)(x+2).\underset{(x+1,x+2,x+3)}{'B} - \frac{1}{4} x(x+1)(x+2)(x+3).\underset{(x+1,x+2,\ldots x+4)}{'A} + \frac{1}{3}.x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

Diesen Ausdruck hat Herr Prof. Schweins unter Nr. 563.

33. Vermittelst der vorhin gelehrten Zurückführung von Δx^4, $\Delta^2 x^4$ u. s. w. auf Summen von Producten nach den Combinationsclassen mit Wieder-

holungen lassen sich nun auch die Ausdrücke für Sx^4 in (26) anders darstellen. Der erste und letzte geben

$$Sx^4 = -\frac{1}{2}x(x+1).\,'C_{(1)} + \frac{1}{3}x(x+1)(x+2).\,'B_{(1,2)}$$
$$-\frac{1}{4}x(x+1)(x+2)(x+3).\,'A_{(1,2,3)}$$
$$+\frac{1}{5}x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$
$$= x.\,'D_{(2)} + \frac{1}{2}x(x-3)\,'C_{(3,4)} + \frac{1}{3}x(x-4)(x-5).\,'B_{(4,5,6)}$$
$$+\frac{1}{4}x(x-5)(x-6)(x-7).\,'A_{(5,6,7,8)}$$
$$-\frac{1}{5}x(x-6)(x-7)(x-8)(x-9).$$

34. Da die Bernoullischen Zahlen nichts anders als die Coefficienten von x in den Summen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis x oder in Sx^2, Sx^4, Sx^6 u. s. w. ohne Rücksicht auf die Vorzeichen sind, so sieht man, wie mittels jener Summen, wenn sie nach der hier gewiesenen Art gesucht und dargestellt worden, sich die Bernoullischen Zahlen durch Producte der natürlichen Zahlen, 1, 2, 3 . . . . nach den Combinationsclassen mit Wiederholungen ausdrucken lassen. So erhält man z. B. für die zweyte Bernoullische Zahl $\mathfrak{B}^{(2)}$ aus dem Ausdrucke für Sx^4 in (30) und dem letzten Ausdrucke in (32) wenn man, nachdem jeder mit x dividirt worden, $x=0$ setzt

$$\mathfrak{B}^{(2)} = -\left(\frac{1}{2}\,'C_{(1)} - \frac{1.1}{3}\,'B_{(1,2)} + \frac{1.1.2}{4}\,'A_{(1,2,3)} - \frac{1.1.2.3}{5}\right)$$
$$= -\left('D_{(1)} - \frac{1}{2}.\,'C_{(1,2)} + \frac{1.2}{3}\,'B_{(1,2,3)} - \frac{1.2.3}{4}\,'A_{(1,2,3,4)} + \frac{1.2.3.4}{5}\right)$$

Aus den beiden Ausdrücken für $S.x^4$ in (33) aber wird

$$\mathfrak{B}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot {}'C_{(1)} - \frac{1.2}{3}\, {}'B_{(1,2)} + \frac{1.2.3}{4} \cdot {}'A_{(1,2,3)} - \frac{1.2.3.4}{5}.$$

$$= -\left\{ {}'D_{(2)} - \frac{3}{2}\, {}'C_{(3,4)} + \frac{4.5}{3}\, {}'B_{(4,5,6)} - \frac{5.6.7}{4}\, {}'A_{(5,6,7,8)} + \frac{6.7.8.9}{5} \right\}$$

Es dürfte nicht schwer seyn, diese Formeln, wovon die erste die einfachste, die dritte die zierlichste ist, allgemein zu machen, wenn es von Nutzen seyn könnte.

35. Da die Coefficienten in der ersten allgemeinen Summationsformel in (27) veränderliche Größen sind, die zweyte aber in (29) außer dieser Unbequemlichkeit auch noch die hat, daß darin die successiven endlichen Differenzen des allgemeinen Gliedes y vorkommen, wodurch ihr Gebrauch fast nur auf solche Reihen beschränkt wird, deren allgemeines Glied eine ganze rationale Function von x ist, so ist es nöthig eine andere Formel zu suchen, welche von diesen Unbequemlichkeiten frey ist. Eine solche erhält man auf folgendem Wege.

Man setze in der ersten Formel in (27) statt $S(x-1)$, $S(x-1)^2$, $S(x-1)^3$ u. s. w. ihre durch die Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$ u. s. w. ausgedruckten Werthe aus (Potenz, 44.) z. B.

$$S(x-1)^6 = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{2}\mathfrak{B}^{(1)}.x^5 - \frac{6.5.4}{2.3.4}\mathfrak{B}^{(2)}x^3 + \frac{6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}\mathfrak{B}^{(3)}x.$$

und ordne das Aggregat so, daß alles was in dieselbe Bernoullische Zahl multiplicirt ist, zusammengenommen wird. Setzt man nun die Rechnung weit genug fort, so findet sich

$$S = xy - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{\partial^2 y}{1.2.\partial x^2} - \frac{x^4}{4} \cdot \frac{\partial^3 y}{1.2.3 \partial x^3} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{\partial^3 y}{1.2.\partial x^3} - \frac{x^4}{4} \cdot \frac{\partial^4 y}{1.2.3.\partial x^4} + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \left(x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{\partial^4 y}{1.2.\partial x^4} - \frac{x^2}{4} \cdot \frac{\partial^5 y}{1.2.3.\partial x^5} + \text{etc.} \right)$$

$$- \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \left(x \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{\partial^6 y}{1.2.\partial x^6} - \frac{x^4}{4} \cdot \frac{\partial^7 y}{1.2.3.\partial x^7} + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2 \ldots 6} \left(x \cdot \frac{\partial^6 y}{\partial x^6} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial^7 y}{\partial x^7} + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{\partial^8 y}{1.2.\partial x^8} - \frac{x^4}{4} \cdot \frac{\partial^9 y}{1.2.3.\partial x^9} + \text{etc.} \right)$$

$$- \text{etc.}$$

Die hier in $\frac{1}{2}$, $\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}$, $\frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1 \ldots 4}$, u. s. w. multiplicirten Reihen entstehen offenbar aus der ersten $xy - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} +$ etc. wenn man darin y nach und nach mit $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ u. s. w. vertauscht. Läßt sich also für die erste Reihe ein geschlossener Ausdruck geben, so hat man auch einen solchen für die übrigen. Die erste Reihe ist aber keine andere als die Bernoullische Integrationsreihe (Integralformel, 145.), wel-

che sich aus dem Taylorschen Lehrsatze auf folgende Art ergiebt.

Es sey z eine Function von $x = \varphi x$, so ist

$$\varphi(x+\omega) = z + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\omega + \frac{\partial^2 z}{1.2.\partial x^2}\cdot\omega^2$$

$$+ \frac{\partial^3 z}{1.2.3.\partial x^3}\cdot\omega^3 + \text{etc.}$$ Nun sey $\omega = -x$, so wird $\varphi(x+\omega) = \varphi(0) = \text{Const.}$, und

$$\text{Const.} = z - x.\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x^2}{2}.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{x^3}{3}.\frac{\partial^3 z}{1.2.\partial x^3} + \frac{x^4}{4}.\frac{\partial^4 z}{1.2.3.\partial x^4} - \text{etc.}$$

also mit Beyseitesetzung der Constans

$$z = x.\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x^2}{2}.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{x^3}{3}.\frac{\partial^3 z}{1.2.\partial x^3} - \frac{x^4}{4}.\frac{\partial^4 z}{1.2.3.\partial x^4} + \text{etc.}$$

Setzt man nun hier zuerst $z = \int y \partial x$, wo dann $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial x}$ u. s. w. wird, so verwandelt sich die Reihe rechter Hand des Gleichheitszeichens in die erste der obigen Reihen in dem Ausdrucke für s. Setzt man $z = y$, so entsteht die zweyte, in $\frac{1}{2}$ multiplicirte, Reihe. Wird $z = \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, u. s. w. genommen, so entstehen die dritte, vierte, fünfte u. s. w., in $\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}, \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1...4}, \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1...6}$ u. s. w. multiplicirten, Reihen. Daher ist nach Wiederherstellung der Constanten

$$s = \int y \partial x + \frac{1}{2} y + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$
$$+ \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2 \ldots 6} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.} \quad + \text{Const.}$$

wo die Const. aus den Constanten aller Partialreihen zusammengesetzt ist, und dadurch bestimmt wird, daß für $x = 0$, auch $s = 0$ werden, oder überhaupt für einen gewissen Werth von x der durch die Formel für die Summe von so viel Gliedern der Reihe, als jener Werth von x angiebt, gefundene Werth mit dem, auf gewöhnlichem Wege erhaltenen Werthe dieser Summe übereinkommen muß.

Die so eben gewonnene Summationsformel unterscheidet sich von der, aus welcher sie abgeleitet worden, dadurch, daß die Coefficienten der Differentialquotienten in ihr bestimmte Zahlgrößen sind, daß diese Differentialquotienten nur eine ungerade Ordnungszahl haben, und daß ein Glied der Formel eine Integrationsgröße ist. Euler hat in den Institt. Calc. Diff. P. I. c. 5. diese Formel auf einem andern, etwas umständlicheren Wege, entwickelt, allein seine Absicht dabey war mit auf die Darstellung der Relationen der Bernoullischen Zahlen gerichtet. Hier kam es auf eine kurze Herleitung an, wobey der Zusammenhang der Formel mit der in (27) klar dargelegt werden konnte.

35. Führt man in die gefundene Summationsformel wieder Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ u. s. w. ein, indem man statt $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. s. w. ihre durch Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ u. s. w. ausgedruckten Werthe aus (29) und statt $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$ u. s. w. die numerischen Werthe derselben setzt, so erhält man eine neue Summationsformel, nach welcher

$$s = \int y \partial x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{12} \Delta y - \frac{1}{24} \Delta^2 y + \frac{19}{720} \Delta^3 y - \frac{3}{160} \Delta^4 y$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \text{Const.}$$

Um durchaus abwechselnde Vorzeichen in den Reihenausdruck zu bringen, und das Gesetz der Coefficienten besser zu erkennen, bemerke man, daß $s = \Sigma y + y$ + Const. ist. Setzt man diesen Werth in die Formel, so wird

$$\Sigma y = \int y \partial x - \frac{1}{2} y + \frac{1}{12} \Delta y - \frac{1}{24} \Delta^2 y + \frac{19}{720} \Delta^3 y - \text{etc.} + \text{Const.}$$

Nun sey

$$\Sigma y = \int y \partial x + \alpha' y + \alpha'' \Delta y + \alpha''' \Delta^2 y + \text{etc.} + C.$$

Die Coefficienten α', α'', α''', u. s. w. können nach folgender Methode bestimmt werden, die derjenigen nachgebildet ist, welche Euler in den Nov. Act. Petrop. T. XI. zur Bestimmung der Coefficienten gelehrt hat, wenn $\frac{b}{1 + \cos\varphi}$, $(1 + a\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}$, und ähnliche Ausdrücke in Reihen von der Form $A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi +$ etc. zu entwickeln sind.

Man setze, weil α', α'', α''' u. s. w. bestimmte Zahlen sind, also gar nicht davon abhängen, welche Function y von x ist, statt y solche rationale ganze Functionen, bey denen sich nicht allein Σy, sondern auch Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, u. s. w. leicht bestimmen lassen. Hierdurch erhält man, weil einmal eine der successiven Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, beständig, alle folgenden aber 0 werden, in jedem besonderen Falle aus der obigen Annahme $\Sigma y = \int y \partial x + \alpha' y + \alpha'' \Delta y +$ etc. + Const. eine Gleichung mit einer endlichen Anzahl Glieder, indem die Reihe rechter Hand irgendwo abbricht. Ist y so gewählt, daß es mit den sämmtlichen Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, u. s. w. bis auf die letzte beständige für $x = 0$ verschwindet, so fällt, wenn man die Integrale Σy, $\int y \partial x$ mit $x = 0$ anfangen läßt, das in die beständige Differenz multiplicirte Glied, indem es mit der Const. zusammen 0 wird, aus. Verschwindet nun

nun überdieß y und das einseitig bestimmte Σy, so wie die veränderlichen Differenzen bis auf eine für einen gewissen andern Werth von x, wie 1, so kann man durch Annahme dieses Werths von x alle Glieder jener Gleichung bis auf $\int y \partial x$, welches nun ein bestimmtes Integral wird, und dasjenige Glied, welches die nicht für $x = 1$ verschwindende Differenz zum Factor hat, wegschaffen, und so einen der Coefficienten α', α'', α''', u. s. w. durch ein bestimmtes Integral ausdrucken, wie sich sogleich zeigen wird.

Man mache zuerst $y = x$, so ist $\Sigma y = \frac{(x-1)x}{1.2}$, welches für $x = 0$ schon verschwindet, und $\int y \partial x = \int x \partial x$; ferner $\Delta y = 1$ (weil $\Delta x = 1$ ist), $\Delta^2 y = 0$ u. s. w. Daher

$$\frac{(x-1)x}{1.2} = \int x \partial x + \alpha' x + \alpha'' + \text{Const.}$$

Das Integral $\int x \partial x$ werde so genommen, daß es für $x = 0$ verschwinde, so wird, wenn $x = 0$ gemacht wird, Const. $= -\alpha''$, also

$$\frac{(x-1)x}{1.2} = \int x \partial x + \alpha' x.$$

Wird hier nun $x = 1$ gesetzt, so folgt

$$\alpha' = - \int x \partial x$$

das Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen.

Zweytens sey $y = \frac{(x-1)x}{1.2}$, so ist (Differenzenrechnung, 58.) $\Sigma y = \frac{(x-2)(x-1)x}{1.\ 2.\ 3}$, Δy (ebendas. 9.) $= x$, $\Delta^2 y = 1$, $\Delta^3 y = 0$, u. s. w. Daher

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} = \int \frac{x(x-1)}{1.\ 2} \partial x + \frac{x(x-1)}{1.\ 2} \alpha' + \alpha'' x + \alpha''' + \text{Const.}$$

So

Nimmt man das Integral $\int \frac{x(x-1)}{1.\ 2} \partial x$ so, daß es für $x=0$ verschwindet, so wird für $x=0$, Const. $=-\alpha'''$, und wenn man nun $x=1$ setzt,

$$\alpha'' = -\int \frac{x(x-1)}{1.\ 2} \partial x$$

das Integral innerhalb der Gränzen $x=0$ und $x=1$ genommen.

Drittens sey $y = \frac{(x-2)(x-1)x}{1.\ 2.\ 3}$, so ist $\Sigma y = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, $\Delta y = \frac{(x-1)x}{1.\ 2}$, $\Delta^2 y = x$, $\Delta^3 y = 1$, $\Delta^4 y$ u. s. w. $=0$. Mithin

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \int \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} \partial x + \alpha' . \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} + \alpha'' . \frac{x(x-1)}{1.\ 2} + \alpha''' x + \alpha^{\mathrm{IV}} + \text{Const.}$$

Hieraus folgt nach derselben Art zu schließen wie vorhin

$$\alpha''' = -\int \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} \partial x$$

das Integral von $x=0$ bis $x=1$ erstreckt.

Das Gesetz der Fortschreitung zeigt sich nun klar, und es ist allgemein

$$\alpha^{(r)} = -\int \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-r+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots\ldots r} \partial x$$

Das Integral von $x=0$ bis $x=1$ genommen. Hieraus entwickelt man leicht folgende Ausdrücke für die Coefficienten α', α'', α''' ......

$$\alpha' = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha'' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\underset{(1)}{A'}\right)$$

$$\alpha''' = -\frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}A' + \frac{1}{2}B'\right)_{(1,2)}$$

$$\alpha^{IV} = -\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}A' + \frac{1}{3}B' - \frac{1}{2}C'\right)_{(1,2,3)}$$

$$\alpha^{V} = -\frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}A' + \frac{1}{4}B' - \frac{1}{3}C' + \frac{1}{2}D'\right)_{(1,2,3,4)}$$

etc.

wo die Zeichen A', B', C' .... Summen von Producten der natürlichen Zahlen, welche der jedesmalige Zeiger angiebt, nach den Combinationsclassen ohne Wiederholungen anzeigen.

Das Bildungs-Gesetz dieser Coefficienten läßt sich auch noch auf eine andere Weise darstellen, nämlich folgendergestalt.

Man formire eine nach den Potenzen einer unbestimmten u fortschreitende Reihe
$\beta + \beta' u + \beta'' u^2 + \beta''' u^3 + \beta^{IV} u^4 +$ etc. wo
$\beta = \int \partial x$, $\beta' = \int x \partial x$ $\beta'' = \int \frac{x(x-1)}{1.\ 2} \partial x$, $\beta''' =$
$\int \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} \partial x$ u. s. w., die Integrale so genommen, daß sie für $x = 0$ verschwinden, und β', β'', β''' u. s. w. für den Werth $x = 1$ sich in $-\alpha'$, $-\alpha''$, $-\alpha'''$ u. s. w. verwandeln. Man setze nun die Summe der obigen Reihe P, wo P eine gewisse Function von x und u ist, so wird, wenn man beiderseits die Differentiale nach x nimmt,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\partial x = \partial x\left(1 + xu + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}u^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}u^3 + \text{etc.}\right)$$
$$= \partial x(1+u)^x$$

folglich durch Integration (in Beziehung auf x)

$$P = \frac{(1+u)^x}{\log(1+u)} + \text{Const.}$$

Da P für $x = 0$ verschwinden muß, so wird Const. $= -\frac{1}{\log(1+u)}$, also

$$P = \frac{(1+u)^x - 1}{\log(1+u)}$$

Setzt man $x = 1$, so verwandelt sich P in $1 - \alpha' u - \alpha'' u^2 - \alpha''' u^3 -$ etc. Daher ist

$$1 - \alpha' u - \alpha'' u^2 - \alpha''' u^3 - \text{etc.} = \frac{u}{\log(1+u)}$$

oder $\frac{1}{u} - \alpha' - \alpha'' u - \alpha''' u^2 - \text{etc.} = \frac{1}{\log(1+u)}$

so daß sich α', α'', α''' u. s. w. auch durch die Entwickelung des Quotienten $\frac{1}{\log(1+u)}$ oder der Potenz $[\log(1+u)]^{-1}$ bestimmen lassen. Man erhält dadurch für α', α'', α''' u. s. w. folgende recurrirende Formeln

$$\alpha' = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha'' = \frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{3}$$

$$\alpha''' = \frac{1}{2}\alpha'' - \frac{1}{3}\alpha' - \frac{1}{4}$$

$$\alpha^{IV} = \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{1}{3}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha' + \frac{1}{5}$$

$$\alpha^{V} = \frac{1}{2}\alpha^{IV} - \frac{1}{3}\alpha''' + \frac{1}{4}\alpha'' - \frac{1}{5}\alpha' - \frac{1}{6}$$

Beyläufig kann man bemerken, daß hieraus, $u=1$ gesetzt, folgt

$$\int\partial x + \int x\partial x + \int\frac{x(x-1)}{1.\ 2}\partial x + \int\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}\partial x$$

$$+ \text{etc. in inf.} = \frac{2^x - 1}{\log 2}$$

wo die Integrale so genommen werden, daß sie sämmtlich für $x=0$ verschwinden. Setzt man noch $x=1$, so wird

$$1 - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \alpha^{\text{IV}} - \text{etc.} = \frac{1}{\log 2}$$

also die Summe der unendlichen Reihe

$$\alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{\text{IV}} + \text{etc. in inf.} = 1 - \frac{1}{\log 2}$$

Setzt man aber $u=-1$, so wird $P=0$, also

$$\beta - \beta' + \beta'' - \beta''' + \beta^{\text{IV}} - \text{etc.} = 0$$

und nun $x=1$ gemacht,

$$1 + \alpha' - \alpha'' + \alpha''' - \alpha^{\text{IV}} + \text{etc.} = 0$$

also

$$-\alpha' + \alpha'' - \alpha''' + \alpha^{\text{IV}} - \alpha^{\text{V}} + \text{etc.} = 1.$$

Da die Coefficienten α', α'', α''' u. s. w. abwechselnd negativ und positiv sind, so bekommen in der Reihe $-\alpha' + \alpha'' - \alpha''' + \text{etc.}$, wenn statt α', α'', α''' u. s. w. ihre numerischen Werthe gesetzt werden, sämmtliche Glieder das Vorzeichen $+$. Hieraus folgt, daß die Glieder dieser Reihe $-\alpha'$, $+\alpha''$, $-\alpha'''$, ohne Ende abnehmen, und zuletzt unendlich klein werden müssen, weil sonst die Summe der Reihe nicht endlich und $=1$ seyn könnte. Dieses Ergebniß ist nicht unwichtig.

36[b]. Die eben entwickelte Summenformel ergiebt sich auch aus dem oben in (28) angeführten Satze von Lagrange, wenn man darin $n=-1$, und $\int y\partial x$, Σy und y beziehungsweise statt $\frac{\partial^{-1}y}{\partial x^{-1}}$, $\Delta^{-1}y$ und $\Delta^0 y$ setzt,

übrigens bey der Entwickelung von $[\log(1 + \Delta y)]^{-1}$ nach der dortigen Regel verfährt. Es wird nämlich auf diese Weise, $\Delta x = \omega$ gesetzt,

$$\frac{\int y \partial x}{\omega} = [\log(1 + \Delta y)]^{-1}$$

$$= \Sigma y - \alpha' y - \alpha'' \Delta y - \alpha''' \Delta^2 y - \text{etc.};$$

woraus unsere Formel dadurch, daß man $\omega = 1$ setzt, und eine willkührliche Constans beyfügt, hervorgeht.

57. Auch die Summenformel in (35) ist in jenem Lagrangischen Satze enthalten, dessen allgemeinster Ausdruck eigentlich ist

$$(\Delta y)^n = \left(e^{\omega \frac{\partial y}{\partial x}} - 1\right)^n$$

wo e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems anzeigt, und vorausgesetzt wird, daß man die Exponenten des Potenzirens von Δy und ∂y mit den Zeichen Δ und ∂ selbst verbindet, und die Differenzen und Differentiale mit negativen Exponenten in Integrale umwandelt, also $\Sigma^m y$ statt $\Delta^{-m} y$ und $\int^m y \partial x^m$ statt $\frac{\partial^{-m} y}{\partial x^{-m}}$ schreibt.

Um vermittelst dieser Formel Σy, welches ihr zufolge $= \left(e^{\omega \frac{\partial y}{\partial x}} - 1\right)^{-1}$ mit den angegebenen Einschränkungen ist, zu entwickeln, bedarf es der Entwickelung von $(e^u - 1)^{-1}$ in eine nach den Potenzen von u fortschreitende Reihe. Diese ergiebt sich so.

Es ist

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{e^{-\frac{1}{2}u}}{e^{\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u}}$$

mithin, wenn man $u = \varphi\sqrt{-1}$ macht

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}}$$

d. i. nach Th. I. S. 877.

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi - \sqrt{-1}.\sin\frac{1}{2}\varphi}{2\sqrt{-1}.\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}.\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}$$

also aus Cyklometrie, 16., wenn man die dortige Bezeichnung der Bernoullischen Zahlen mit der hier gebrauchten vertauscht,

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\varphi - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\varphi^3 - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2..6}\varphi^5 - \text{etc.}\right) - \frac{1}{2}$$

und wenn man u wieder herstellt, d. i. $\varphi = -u\sqrt{-1}$ setzt,

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\sqrt{-1}}{u} + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}u\sqrt{-1} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}u^3.\sqrt{-1} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2....6}u^5.\sqrt{-1} - \text{etc}\right) - \frac{1}{2}$$

$$= u^{-1} - \frac{1}{2}u^0 + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}u - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}u^3 + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2....6}u^5 - \text{etc.}$$

Entwickelt man hiernach $\left(e^{\omega\frac{\partial y}{\partial x}} - 1\right)^{-1}$ mit den vorgeschriebenen Veränderungen, so wird

$$\Sigma y = \frac{1}{\omega}\int y\partial x - \frac{1}{2}y + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}\omega}{1.2}.\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}\omega^3}{1.2.3.4}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}\omega^5}{1.2...6}.\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

In dieser allgemeinern Form ist die Formel in dem Art., Quadratur, 134. angeführt. Auf der zweyten Formel für $\frac{\int y \partial x}{\omega}$ in (36) beruht die in eben dem Art. 150., mitgetheilte Formel von Laplace zu den mechanischen Quadraturen. Bey der Anwendung auf die Summirung der Reihen ist $\Sigma y = Sy + y$ oder $= s + y$, und $\omega = 1$, mit Beyfügung einer willkührlichen Constans zu dem einen oder andern Theile der Formeln, welche auch sonst, wenn sie nicht ausdrücklich hinzugesetzt wird, als in Σy oder $\int y \partial x$ mit begriffen gedacht werden muß.

38. Was nun den Gebrauch der beiden zuletzt, nämlich in (34) und (35), gefundenen Summationsformeln betrifft, so bricht sowohl die eine als die andere ab, wenn y oder das allgemeine Glied der zu summirenden Reihe eine rationale ganze Function der Stellenzahl x ist. Denn alsdann verschwinden nicht bloß die Differentialquotienten, sondern auch die Differenzen derjenigen Ordnungen, welche höher sind als der Exponent der höchsten Potenz von x in y. Ist dieses nicht der Fall, so erhält man durch die eine Formel sowohl als durch die andere für die Summe einer Reihe selbst wieder eine Reihe, und zwar mit unendlich vielen Gliedern, wo es alsdann darauf ankommt, ob solche sich dem Totalwerthe schneller nähert, als die vorgegebene zu summirende Reihe. Sollte dieses aber auch nicht seyn, so mag sie doch in analytischer Rücksicht, durch die veränderte Form der Summe, brauchbar seyn. Die erste Formel hat vor der zweyten den Vorzug, daß darin die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$ u. s. w. vorkommen, welche fast ohne Ausnahme nicht allein ungleich leichter zu finden sind, son-

dern auch einfacher ausgedruckt werden, als die successiven Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ u. s. w. Dagegen nehmen in der zweyten Formel die numerischen Coefficienten ohne Ende ab, da in der ersten die Bernoullischen Zahlen eine höchstdivergente Reihe bilden, wodurch der nach der Formel gefundene Summenausdruck in bestimmten Fällen, wenigstens in den weiter vom Anfange entferntern Gliedern, gleichfalls divergent werden wird. — Es ist jetzt noch der Gebrauch der gefundenen Formeln durch einige Beyspiele zu erläutern.

39. Es sey die Summe der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x} = s$$

zu finden. Hier ist $y = \frac{1}{x}$, also $\int y \partial x = \log x$,

$\frac{\partial y}{\partial x} = -1 . x^{-2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -1 . 2 . 3 . x^{-4}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = \ldots$ $- 1 . 2 . 3 . 4 . 5\ x^{-6}$ u. s. w. Daher nach der ersten Formel in (34)

$$s = C + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{8x^8} - \frac{\mathfrak{B}^{(5)}}{10x^{10}} + \text{etc.}$$

Da die Constante C aus dem Falle $x = 0$ nicht bestimmt werden kann, so setze man $x = 1$. Für diesen Werth von x ist $s = 1$, also

$$1 = C + \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6} + \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{8} - \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6} - \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{8} + \text{etc.}$$

Da die Bernoullischen Zahlen eine divergirende Reihe bilden, so ist diese Reihe zur Bestimmung der

Constante nicht tauglich. Weil indeß die Vorzeichen in ihr abwechseln, so wird der Totalwerth, wenn man zur Berechnung desselben stets ein Glied mehr zuzieht, immer zwischen zwey Gränzen eingeschränkt, die, so lange die Reihe convergirt, immer näher zusammen rücken. Hält man sich an die vier ersten Glieder, weil das fünfte schon eine Entfernung von dem Totalwerthe bewirken würde, so findet sich

$$C > 0,5$$
$$< 0,58333$$
$$> 0,57500$$
$$< 0,57897.$$

Daß die Constans wirklich zwischen diese Gränzen fällt, zeigt sich, wenn man sie auf einem andern Wege sucht. Wendet man nämlich zur Summirung der vorgegebenen Reihe die zweyte Formel in (35) an, so ist $\Delta y = -\frac{1}{x(x+1)}$, $\Delta^2 y = +\frac{1.\ 2}{x(x+1)(x+2)}$, $\Delta^3 y = -\frac{1.\ 2.\ 3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$, u. s. w. *), also

$$s = C' + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x(x+1)}$$
$$- \frac{1}{24} \cdot \frac{1.\ 2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{19}{720} \cdot \frac{1.\ 2.\ 3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$- \text{etc.}$$

*) Der allgemeine Ausdruck für $\Delta^n y$ ergiebt sich leicht nach der Formel $\Delta^n y = (y - \frac{n}{1} \cdot y' + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} y'' - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} y''' + \text{etc.}) \cdot (-1)^n$

vermittelst des Satzes, daß

$$\frac{1}{m} - \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{m+r} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \cdot \frac{1}{m+2r} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{1}{m+3r} + \text{etc.}$$
$$= \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots n.\ r^n}{m(m+r)(m+2r)\ldots(m+nr)},$$

welcher aus der oben (4.) angeführten und gebrauchten Relation der Binomial-Coefficienten abgeleitet werden kann.

Die Constante hier, C′, ist mit der vorigen einerley, wie sogleich erhellt, wenn man x unendlich groß setzt. Es wird nämlich aus der ersten Formel für s, wenn n eine unendlich große Zahl ist,

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Aus der zweyten Formel für s aber bey derselben Annahme des Werthes von x

$$C' = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Daher $C' = C$.

Um nun C′ oder C vermittelst der zweyten Formel bequem zu berechnen, suche man die Summe der zehn ersten Glieder der Reihe durch wirkliche Addition. Heißt solche der Kürze wegen h, so ist $x = 10$ gemacht,

$$h = C' + \log 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10.11} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1.2}{10.11.12}$$

$$- \frac{19}{720} \cdot \frac{1.2.3}{10.11.12.13} - \frac{3}{160} \cdot \frac{1.2.3.4}{10.11\ldots14} - \text{etc.}$$

also

$$C' = h - \log 10 - \frac{1}{20} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10.11} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1.2}{10.11.12}$$

$$+ \frac{19}{720} \cdot \frac{1.2.3}{10.11.12.13} + \text{etc.}$$

Die Reihe convergirt durchaus (35), obwohl immer langsamer. Sie giebt, wenn die zwölf ersten Glieder in Rechnung gebracht werden, und diese selbst mit acht Decimalstellen geführt wird,

$$C' = 0,57721566.$$

Dieser Werth von C′ oder C, welcher höchstens in der letzten Decimalstelle fehlerhaft seyn kann, fällt zwischen die oben angegebenen Gränzen, und zeigt dadurch, daß die Reihe für C in ihrem convergenten Stücke doch eine Annäherung an C gewährt.

Um jetzt C in mehreren Decimalstellen genau zu erhalten, setze man in der ersten Reihe für s gleichfalls $x = 10$, so wird

$$C = h - \log 10 - \frac{1}{20} + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2.10^2} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4.10^4} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6.10^6} - \text{etc.}$$

und hieraus, indem $h = \frac{7381}{2520}$,

$$C = 0,5772156649015328606065$$

wo zu der Berechnung nur das convergirende Stück der Reihe zugezogen wird. Die Reihe nämlich gehört so wie die erste für s selbst, wie groß man auch x nehmen mag, zu der Gattung der halbconvergirenden (Reihe, 32ᵃ.). Der divergente Theil derselben ist die Entwickelung einer Function, welche sich häufig auf ein bestimmtes Integral bringen, und so mit dem letzten in Rechnung gezogenen Gliede vergleichen läßt. Namentlich ist dieses bey unserer Reihe der Fall. Man sehe darüber Erchingers schöne Ausführung in Schraders Commentatio de summatione seriei $\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \text{etc.}$ §. 16. Hier mag die Übereinstimmung des gefundenen Werths von C in den acht ersten Decimalstellen mit dem, auf einem andern Wege erhaltenen, welche Uebereinstimmung nicht zufällig seyn kann, hinreichen, die Sicherheit der Anwendung der Reihe für C zu bewähren.

40. Setzt man $x = 1$ in der zweyten Reihe für s, so wird, weil alsdann $s = 1$ ist,

$$C' = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{3} + \frac{19}{720} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{160} \cdot \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

Dieses ist auch der Werth der bey dem Integral-

logarithmen oder der Function $\int \frac{\partial x}{\log x}$ vorkommenden Constante. Da nämlich

$$\log.\,\text{int.}(1-x) = \int \frac{-\partial x}{\log(1-x)}$$

$$= \text{Const.} + \log x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{24}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{19}{720}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{3}{160}\cdot\frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

so wird, wenn log. int. $0 = 0$ seyn soll, für $x = 1$,

$$0 = \text{Const.} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{3} + \frac{19}{720}\cdot\frac{1}{4} - \text{etc.}$$

also

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{3} + \frac{19}{720}\cdot\frac{1}{4} + \text{etc.}$$
$$= C'.$$

Mascheroni und Soldner haben dieses Ergebniß, jeder auf einem andern Wege, herausgebracht.

41. Man kann der ersten Summenformel in (34) eine etwas veränderte Einrichtung geben, so daß die darnach gefundenen Summen der Reihen, wofern kein geschlossener Ausdruck dafür gefunden werden kann, durch etwas convergentere Reihen dargestellt werden. Dieses geschieht auf folgende Art.

Da $y = \varphi x$, so sey $T = \varphi(x + \frac{1}{2})$, so daß y aus T wird, wenn statt x gesetzt wird $x - \frac{1}{2}$.

Weil nun T selbst wieder eine Function von x ist, so giebt der Taylorsche Lehrsatz

$$y = T - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{1.2\partial x^2} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{\partial^3 T}{1.2.3\partial x^3} + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{\partial^4 T}{1.2.3.4\partial x^4} - \text{etc.}$$

also

$$Sy = ST - \frac{1}{2} \cdot S\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{2.4} S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{2.4.6} S\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{1}{2.4.6.8} S\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \text{etc.}$$

wo S das Summenzeichen ist. Man suche nun nach der Formel in (34)

$$Sy = \text{Const.} + \int y\partial x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{12} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{720} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{1}{30240} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

die Werthe von ST, $S\frac{\partial T}{\partial x}$, $S\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, u. s. w., indem man für y nach und nach T, $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ u. s. w. setzt, und substituire solche in dem obigen Ausdrucke für Sy, so wird nach gehöriger Reduction erhalten

$$Sy = \text{Const.} + \int T\partial x - \frac{1}{24} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{7}{5760} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \frac{31}{967680} \cdot \frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + \text{etc.}$$

Um zur Einsicht des Gesetzes, nach welchem die Coefficienten dieser Reihe gebildet werden, zu gelangen, sey

$$Sy = \text{Const.} + \int T\partial x + \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \beta \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \gamma \cdot \frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + \delta \cdot \frac{\partial^7 T}{\partial x^7} + \text{etc.}$$

Da die Coefficienten α, β, γ .... zu den Differentialquotienten $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}$ bestimmte Zahlen sind, deren Werth sich nicht ändert, die Function T oder y mag seyn, welche sie will, so kann man zur Bestimmung derselben jede beliebige Function von x für y wählen.

Man nehme eine solche, bey welcher sich nicht allein Sy, sondern auch $\int y \partial x$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. s. w., mithin auch $\int T \partial x$, $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$ u. s. w. leicht bestimmen lassen. Dieß trifft ein für $y = e^{mx}$, wo e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist. Es wird nämlich bey dieser Annahme

$$Sy = e^m + e^{2m} + e^{3m} + \ldots + e^{mx}$$
$$= \frac{e^m(e^{mx} - 1)}{e^m - 1}.$$

Ferner ist $T = e^{mx + \frac{m}{2}}$, also $\int T \partial x = \frac{1}{m} e^{mx + \frac{1}{2}m} = \frac{1}{m} T$, $\frac{\partial T}{\partial x} = m.\, T$, $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = m^3.\, T$ u. s. w., folglich nach der Formel

$$Sy = \text{Const.} + e^{mx + \frac{m}{2}} \left(\frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5 + \text{etc.} \right)$$

Weil Sy für $x = 0$ verschwindet, so ist

$$\text{Const.} = - e^{\frac{1}{2}m} \left(\frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5 + \text{etc.} \right)$$

mithin

$$\frac{e^m(e^{mx} - 1)}{e^m - 1} = e^{\frac{m}{2}}(e^{mx} - 1) \left\{ \frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5 + \delta m^7 + \text{etc.} \right\}$$

oder

$$\frac{e^{\frac{m}{2}}}{e^m - 1} = \frac{1}{e^{\frac{m}{2}} - e^{-\frac{m}{2}}} = \frac{1}{m} + \alpha m + \beta m^3 + \gamma m^5 + \delta m^7 + \text{etc.}$$

Man setze $m = \varphi\sqrt{-1}$, so wird

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1} \cdot \left\{ -\frac{1}{\varphi} + \alpha\varphi - \beta\varphi^3 + \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 + \text{etc.} \right\}$$

also wenn man auf beiden Seiten mit $2\sqrt{-1}$ multiplicirt

$$\frac{1}{(e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}) : 2\sqrt{-1}} = \frac{2}{\varphi} - 2\alpha\varphi + 2\beta\varphi^3 - 2\gamma\varphi^5 + 2\delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

Aber $\dfrac{e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin\frac{1}{2}\varphi$, daher

$$\frac{2}{\varphi} - 2\alpha\varphi + 2\beta\varphi^3 - 2\gamma\varphi^5 + 2\delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

$$= \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\varphi$$

$$= \frac{2}{\varphi} + \frac{2(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2}\varphi + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\,2.\,3.\,4.\,2^3}\varphi^3 + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.\,2\,\ldots\,6.\,2^5}\varphi^5 + \text{etc.}$$

aus Cyklometrie, 21. Die Vergleichung der Coefficienten zu den gleichnamigen Potenzen von φ giebt

$$\alpha = -\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2}$$

$$\beta = +\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4.\,2^3}$$

$\gamma =$

$$\gamma = -\frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2.\ldots.6.2^6}$$

$$\delta = +\frac{(2^7-1)\mathfrak{B}^{(4)}}{1.2.\ldots.8.2^7}$$

etc.

Demnach ist Sy oder

$$s = \text{Const.} + \int T\partial x - \frac{2-1}{2}.\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}.\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$+ \frac{2^3-1}{2^3}.\frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}.\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$$

$$- \frac{2^5-1}{2^5}.\frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots6}.\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}$$

$$+ \text{etc.}$$

wo $y = \varphi x$ und $T = \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ist.

Diese Formel, in welcher die Coefficienten etwas kleiner sind, als in der ursprünglichen, läßt sich mit der in dem Art. Quadratur, 137. angeführten zweyten Maclaurinschen Formel vergleichen oder ist vielmehr mit derselben einerley. Nach ihr wird, weil für die harmonische Reihe $y = \frac{1}{x}$ also $T = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$, $\int T\partial x = \log\left(x + \frac{1}{2}\right)$ u. s. w. ist, die Summe derselben so ausgedruckt.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}$$

$$= \text{Const.} + \log\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{2-1}{2}.\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{2(x+\frac{1}{2})^2}$$

$$- \frac{2^3-1}{2^3}.\frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{4(x+\frac{1}{2})^4} + \frac{2^5-1}{2^5}.\frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{6(x+\frac{1}{2})^6}$$

$$- \text{etc.}$$

Tt

oder $x - \frac{1}{2}$ statt x gesetzt.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$$

$$= \text{Const.} + \log x + \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2.\ 2x^2}$$

$$- \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.\ 4x^4} + \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5.\ 6x^6} - \text{etc.}$$

Die Constans ist mit der vorigen C dieselbe, wie sich sogleich ergiebt, wenn x unendlich groß gesetzt wird.

Setzt man in der letzten Formel $x - \frac{1}{2} = 10$, so wird

$$\text{Const.} = h - \log 21 + \log 2 - \frac{1\ \mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 21^2} + \frac{7\ \mathfrak{B}^{(2)}}{2.\ 21^4}$$

$$- \frac{31\ \mathfrak{B}^{(3)}}{3.\ 21^6} + \frac{127\ \mathfrak{B}^{(4)}}{4.\ 21^8} - \text{etc.}$$

Die gefundene Summirung der harmonischen Reihe giebt zu mehreren merkwürdigen Folgerungen Gelegenheit; wovon hier nur die Platz finden mag, welche aus dem letzten Ausdrucke sich ergiebt.

$$\log\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+\frac{3}{2}} + \frac{1}{x+\frac{5}{2}} + \ldots + \frac{1}{x+y-\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2.\ 2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+y)^2}\right)$$

$$- \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.\ 4}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{(x+y)^4}\right)$$

$$+ \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5.\ 6}\left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{(x+y)^6}\right)$$

Übrigens sehe man Euleri Institt. Calc. Diff. P. II. c. VI. §. 145.

41. Die zu summirende Reihe sey die der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{x^2}.$$

Hier ist $y = \frac{1}{x^2}$, also $\int y\partial x = -\frac{1}{x}$,

$\frac{\partial y}{\partial x} = -1.\,2\,x^{-3}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -1.\,2.\,3.\,4\,x^{-5}$; $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = -1.\,2.\,\ldots\ldots\ldots\,6\,x^{-7}$; u. s. w. Ferner

$T = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2}$ und $\int T\partial x = -\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$; $\frac{\partial T}{\partial x} = -1.\,2\,(x+\frac{1}{2})^{-3}$; $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = -1.\,2.\,3.\,4\,(x+\frac{1}{2})^{-5}$; etc. Also

$$S\frac{1}{x^2} = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{x^5} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{x^3} + \text{etc.}$$

$$= C' - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} + \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2(x+\frac{1}{2})^3} - \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.(x+\frac{1}{2})^5} + \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5(x+\frac{1}{2})^7} - \text{etc.}$$

Die Constanten C und C' sind gleich, weil die eine sowohl als die andere der Totalwerth der ins Unendliche fortgesetzten Reihe ist. Um sie bequem zu bestimmen, suche man die Summe der 10 ersten Glieder der Reihe durch wirkliche Addition, und setze solche h, so ist $h = 1{,}54976773 1166\ldots\ldots$ und nun, $x = 10$ gemacht,

$$C = h + \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{10^3} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{10^5} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{10^7} - \text{etc.}$$

$$= h + \frac{2}{21} - 4\left\{\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{21^3} - \frac{7\mathfrak{B}^{(2)}}{21^5} + \frac{31\mathfrak{B}^{(3)}}{21^7} - \text{etc.}\right\}$$

Die ausgeführte Rechnung giebt

$$C = 1{,}644934066848\ldots$$

Da die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe auch $\frac{\pi\pi}{6}$ ist (Potenz, V. 3), so folgt, $C = \frac{\pi\pi}{6}$, wie es auch die wirkliche Berechnung ausweiset. Dieses zeigt wieder, daß das convergente Stück der Reihe für C, welche zuletzt divergent wird, sicher zur Berechnung von C gebraucht werden kann.

42. Es sey $y = \frac{1}{x^3}$, so daß

$$s = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{x^3}$$

ist. Man hat nun $\int y\,\partial x = -\frac{1}{2x^2}$; $\frac{\partial y}{\partial x} = -3x^{-4}$;

$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -3.4.5\,x^{-6}$; $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = -3.4\ldots 7x^{-8}$; etc.

Ferner $\int T\partial x = -\frac{1}{2(x+\frac{1}{2})^2}$, $\frac{\partial T}{\partial x} = -3(x+\frac{1}{2})^{-4}$;

$\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = -3.4.5(x+\frac{1}{2})^{-6}$; $\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} = -3.4\ldots 7(x+\frac{1}{2})^{-8}$;

u. s. w. Daher $S\frac{1}{x^3}$ oder

$$s = C - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{3\mathfrak{B}^{(1)}}{2x^4} + \frac{5\mathfrak{B}^{(2)}}{2x^6} - \frac{7\mathfrak{B}^{(3)}}{2x^8} + \text{etc.}$$

$$= C' - \frac{1}{2(x+\frac{1}{2})^2} + \frac{3(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2^2(x+\frac{1}{2})^4} - \frac{5(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^4(x+\frac{1}{2})^6} + \frac{7(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^6(x+\frac{1}{2})^8} - \text{etc.}$$

wo aus demselben Grunde wie vorhin $C' = C$ ist.

Die Summe der ersten 10 Glieder der Reihe, durch wirkliche Addition gesucht, ist

$$h = 1,197531985674....$$

und

$$C = 1,202056903159....$$

welches auch der Totalwerth der ins Unendliche fortlaufenden Reihe ist.

43. Auf dieselbe Art werden die Summen aller Reihen der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen gefunden. Die Summen der geraden Potenzen sind Potenzen desselben Grades von π mit einem Factor multiplicirt, der durch den Exponenten der Potenzen bestimmt wird. Euler giebt diese Summen bis zu der von der 16ten Potenz in den Institt. Calc. diff. P. II. §. 151. auf 16 Decimalstellen. In 15 Decimalstellen berechnet stehen sie bis mit zu der von der 35. Potenz in Legendre's Exercices de Calc. integr. IV. Part. §. 73., wo zugleich einige Fehler in den Eulerischen Angaben berichtiget sind.

44. Es sey $y = \log x$, so daß
$s = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \ldots. + \log x$,
so ist $\int y \partial x = \int \partial x \log x = x \log x - x$ nach Integralformel, 93. Ferner $\frac{\partial y}{\partial x} = x^{-1}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 1.\,2.\,x^{-3}$;
$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 1.\,2.\,3.\,4.\,x^{-5}$; u. s. w. Also

$$s = C + x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,x} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\,4.\,x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\,6.\,x^5} - \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{7.\,8.\,x^7} + \text{etc.}$$

Da die Constans aus dem Falle $x = 0$ nicht bestimmt werden kann, der Fall, $x = 1$ aber wo $s = \log 1 = 0$ ist, eine, wegen der bald eintretenden Divergenz, zur Berechnung von C nicht sehr taugliche

Reihe giebt, so setze man $x = 10$, und $\log 1 + \log 2 + \ldots + \log 10 = \log 3628800 = h$, so ist $h = 15{,}104412573075$ und

$$C = k - \frac{21}{2}\log 10 - 10 - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.10} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.10^3} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.10^5} + \text{etc.}$$

Die ausgeführte Rechnung giebt

$$C = 0{,}91893853205$$

Der Werth dieser Constante läßt sich aber auch durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen, und zwar, welches merkwürdig ist, durch einen von der halben Peripherie π zum Halbmesser 1 abhängigen. Da nämlich, wie Wallis gefunden hat,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ 12.\ \text{etc.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ \ 9.\ 11.\ 11.\ \text{etc.}}$$

so ist wenn man im Nenner mit einem ganzen Paar Factoren $(2x-1)^2$ abbricht, und x unendlich groß setzt,

$$\log\pi - \log 2 = 2\left\{\log 2 - \log 1 + \log 4 - \log 3 + \log 6 - \log 5 + \ldots + \log 2x - \log(2x-1)\right\} - \log 2x$$

Für ein unendlich großes x aber ist nach der Formel

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log x$$
$$= C + (x + \tfrac{1}{2})\log x - x$$

also $2x$ statt x gesetzt

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log 2x$$
$$= C + (2x + \tfrac{1}{2})\log 2x - 2x$$

und $\log 2 + \log 4 + \log 6 + \ldots + \log 2x$

$$= x\log 2 + \log 1 + \log 2 + \ldots + \log x$$
$$= C + x\log 2x + \tfrac{1}{2}\log x - x$$

mithin, wenn man die letzte Reihe von der vorletzten abzieht,

$\log 1 + \log 3 + \log 5 + \ldots\ldots + \log(2x-1)$
$= (x+\frac{1}{2})\log 2x - \frac{1}{2}\log x - x$
und diese Reihe wieder von der letzten subtrahirt
$\log 2 - \log 1 + \log 4 - \log 3 + \log 6 - \log 5 + \ldots$
$+ \log 2x - \log(2x-1) = C - \frac{1}{2}\log 2x + \log x$
Dadurch wird

$$2C - 2\log 2x + 2\log x = \log\frac{\pi}{2}$$

d. i.
$$2C - \log 4 = \log\frac{\pi}{2}$$

also
$$2C = \log 2\pi$$

und
$$C = \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Hierdurch ist also

$$s = \frac{1}{2}\log 2\pi + (x+\tfrac{1}{2})\log x - x + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.x}$$
$$- \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.x^5} - \frac{\mathfrak{B}^{(4)}}{7.8.x^7} + \text{etc.}$$

45. Da in dem vorigen Beyspiele $y = \log x$, so wird $T = \log(x+\frac{1}{2})$, $\int T\partial x = \int \partial x \log(x+\frac{1}{2})$ $x\log(x+\frac{1}{2}) - x + \frac{1}{2}\log(x+\frac{1}{2})$. Man erhält für dieses Integral, wenn man $x + \frac{1}{2}$ statt x in $\int y\partial x$ schreibt $(x+\frac{1}{2})\log(x+\frac{1}{2}) - (x+\frac{1}{2})$, welches mit dem vorigen auf eins hinauskommt, weil der Unterschied von $\frac{1}{2}$ mit zur Constans gezogen werden kann. Ferner ist $\frac{\partial T}{\partial x} =$ $(x+\frac{1}{2})^{-1}$; $\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = 1.2\,(x+\frac{1}{2})^{-3}$; $\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} =$ $1.2.3.4(x+\frac{1}{2})^{-5}$; etc. Folglich

$$s = C' + (x+\tfrac{1}{2})\log(x+\tfrac{1}{2}) - (x+\tfrac{1}{2}) - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2.1.2.(x+\tfrac{1}{2})} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.3.4(x+\tfrac{1}{2})^3} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5.5.6(x+\tfrac{1}{2})^5} + \text{etc.}$$

Die Constante hier, C', ist mit der vorigen C einerley, wie theils die unmittelbare Berechnung aus dem Falle $x=10$ lehrt, theils so erhellt. Man setze $x=\frac{1}{2}$, so wird, da nach (Einschaltung, 51) das in der Reihe

Stellenzahlen	0,	1,	2,	3,	4,	u. s. w.
Glieder	1,	1,	1.2.	1.2.3.	1.2.3.4	u. s. w.

der Stelle $\frac{1}{2}$ angehörige Glied $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ist, $s = \frac{1}{2}\log\pi - \log 2 = \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{3}{2}\log 2$; daher

$$C - \frac{3}{2}\log 2 = C' - 1 - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2.1.2} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{2^3.3.4} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{2^5.5.6} + \text{etc.}$$

Setzt man in (44) statt C seinen aus dem Falle $x=1$ gefundenen Werth, welcher ist

$$C = 1 - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6} + \text{etc.}$$

so wird

$$s = (x+\tfrac{1}{2})\log x - (x-1) - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}.\frac{x-1}{x} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4}.\frac{x^3-1}{x^3} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6}.\frac{x^5-1}{x^5} + \text{etc.}$$

und nun $x=2$ gemacht, wo $s = \log 1 + \log 2 = \log 2$ ist,

$$\log 2 = \frac{5}{2}\log 2 - 1 - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.2} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.2^3} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.2^5} + \text{etc.}$$

d. i.

$$\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2} - \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\,4.\,2^3} + \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\,6.\,2^5} + \text{etc.}$$

Dieser Werth von $\frac{3}{2}\log 2$ giebt, in die Gleichung zwischen C und C′ gebracht,

$$C = C'$$

Also ist

$$s = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{1}{2}\right) - \left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.2(x+\frac{1}{2})} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.2^3(x+\frac{1}{2})^3} - \text{etc.}$$

oder $x - \frac{1}{2}$ statt x gesetzt

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \ldots + \log\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\log 2\pi + x\log x - x - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2x} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\,4.\,(2x)^3} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\,6.\,(2x)^5} + \text{etc.}$$

46. Die gefundenen Formeln für die Summe einer Anzahl von Logarithmen der natürlichen Zahlen gelten für hyperbolische oder natürliche Logarithmen. Wird die Summe derselben Anzahl gewöhnlicher oder Briggischer Logarithmen verlangt, so sind die gefundenen Ausdrücke noch auf beiden Seiten mit dem Modulus der gewöhnlichen Logarithmen
$k = 0{,}4342944819032 5\ldots.$ zu multipliciren. Dadurch verwandeln sich in dem Summenausdrucke

$\frac{1}{2}\log 2\pi$, $x\log x$, u. s. w. in $\frac{1}{2}$ log. vulg. 2π; x log. vulg. x; u. s. w., die übrigen Glieder aber wie x, $\frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2x}$, $\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.2x}$, u. s. w. bekommen noch den Factor k.

So wird nach der letzten Formel die Summe s der ersten 500 gewöhnlichen Logarithmen

$$=\frac{1}{2}\text{log. vulg. }2\pi+\frac{1001}{2}(\text{log. vulg. }1001-\text{log. vulg. }2)-\frac{1001}{2}k$$

$$-k\left\{\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.1001}-\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.1001^3}+\frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.1001^5}-\text{etc.}\right\}$$

$\frac{1}{2}$ log. vulg. 2π = 0,39908 99341 7906

$\frac{1001}{2}$(log. v. 1001 − log. v. 2)

= 1351,05174 29485 7639

Summe = 1351,45083 28827 5545 = O

$\frac{1001}{2}k$ = 217,36438 81925 7754

$+\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.1001}k$ = + 0,00003 61550 5177

217,36442 43476 2931

$-\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.1001^3}k$ = − 0,00000 00000 0842

Rest = 217,36442 43476 2089 = P

S = O − P = 1134,08640 85351 3456

Moivre hat, als ihm die Summenformel noch nicht bekannt war, diese Summe durch wirkliche Ad-

dition gesucht, und solche = 1134,0864179378358 gefunden, Miscell. analyt. p. 104. Es müssen aber beträchtliche Rechnungsfehler vorgefallen seyn. Denn schon die Summe der ersten 10 Logarithmen ist in der 5ten Decimalstelle, wo eine 7 statt 6 steht, fehlerhaft. Nachher hat Moivre selbst die erste Summenformel, nämlich die in (44) hier, in dem Suppl. ad miscell anal. bekannt gemacht. Die zweyte Formel in (45) giebt Stirling, Method. diff. Prop. XXVIII., welcher auch zuerst bemerkt hat, daß der Werth der Constante C oder $C' = \frac{1}{2}\log 2\pi$ ist.

47. Wenn x unendlich groß genommen wird, so folgt aus der ersten Summenformel

$$\log(1.2.3.4\ldots\ldots x) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x$$

d. i.

$$= \log.\sqrt{2\pi} + \log x^{x+\frac{1}{2}} - \log e^x$$

also, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen zurückgeht,

$$1.2.3.4.\ldots\ldots x = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x}.\sqrt{2\pi}.$$

Das Ergebniß, welches die zweyte Formel für ein unendlich großes x liefert,

$$1.2.3\ldots\ldots x = \frac{(x+\frac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}}}{e^{x+\frac{1}{2}}}\sqrt{2\pi}.$$

ist von dem vorigen nicht verschieden, da $(x+\frac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}} = x^{x+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$, und für ein unendlich großes i ist $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$, wodurch $\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$, mithin $(x+\frac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}} = x^{x+\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{2}}$ wird.

Von dieser Formel ist in dem Art., Summirbare Reihe, 25. Gebrauch gemacht.

Aus der gefundenen Formel folgt

$$1.2.3\ldots\ldots(x+z)=\frac{(x+z)^{x+z+\frac{1}{2}}}{e^{x+z}}.\sqrt{2\pi}$$

also diese Formel durch jene dividirt,

$$(x+1)(x+2)\ldots.(x+z)=\frac{(x+z)^{x+z+\frac{1}{2}}}{e^{z}.x^{x+\frac{1}{2}}}$$

und wenn man hier mit $1.2.3\ldots\ldots z=\frac{z^{z+\frac{1}{2}}}{e^{z}}\sqrt{2\pi}$

dividirt, wo z gleichfalls unendlich groß ist,

$$\frac{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+z)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots\ldots z}=\frac{(x+z)^{x+z+\frac{1}{2}}}{x^{x+\frac{1}{2}}z^{z+\frac{1}{2}}.\sqrt{2\pi}}$$

$$=\frac{(x+z)^{x+z}}{x^{x}z^{z}}.\sqrt{\frac{x+z}{2\pi xz}}$$

und, $x+z=w$ gesetzt, wodurch $x+1=w-z+1$ wird,

$$\frac{w(w-1)(w-2)..(w-z+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots z}=\frac{w^{w}}{(w-z)^{w-z}.z^{z}}\sqrt{\frac{w}{2\pi z(z-w)}}$$

Das ist ein Näherungsausdruck für einen weit vom Anfange oder vom Ende der Entwickelung entfernten Binomialcoefficienten, dessen Stelle durch z angegeben wird, in einer sehr hohen Potenz.

Wenn $w=2n$, $z=n$ ist, so wird

$$\frac{2n.\,2n-1\ldots\ldots\ldots n+1}{1,\quad 2\ldots\ldots\ldots\ldots n}=\frac{(2n)^{2n}}{n^{n}.n^{n}}.\sqrt{\frac{2n}{2\pi nn}}$$

$$=2^{2n}.\sqrt{\frac{2}{2n\pi}},$$

Dieß ist die größere Gränze für den mittlern Coefficienten in der Potenz 2n. Man s. Binomial-

coefficienten, 16. Wir werden aber sogleich Mittel finden, diesen Coefficienten genauer zu bestimmen.

48. Es sey $X = \varphi(x)$; $X' = \varphi(x+1)$; $X'' = \varphi(x+2)$; u. s. w. Man soll die Summe der unendlichen Reihe mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder

$$X - X' + X'' - X''' + X^{v} - \text{etc.}$$

bestimmen.

Es bezeichne S diese Summe, welche also eine Function von $x = \psi x$ seyn wird, so daß

$$X - X' + X'' - X''' + X^{iv} - \text{etc.} = S$$

ist. Setzt man nun überall $x + 1$ statt x, so wird $X' - X'' + X''' - X^{iv} + X^{v} - \text{etc.} = S' = \psi(x+1)$ also

$$S + S' = X.$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatze ist

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

mithin

$$2S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.} = X$$

Hieraus ist näherungsweise zuerst $S = \frac{1}{2}X$.

Genauer noch $S = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}.\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}.\frac{\partial X}{\partial x}$.

Man setze also

$$S = \frac{1}{2}X + \alpha.\frac{\partial X}{\partial x} + \beta.\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \gamma.\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

Da die Coefficienten α, β, γ... zu den Differentialquotienten bestimmte Zahlen sind, deren Werth sich nicht ändert, die Function X mag seyn, welche sie will, so kann man zur Bestimmung derselben jede beliebige Function von x für X wählen. Es sey

Euler bringt diese Formel auf einem etwas weitläufigeren Wege heraus, Nou. Act. Petrop. T. II. Übrigens ist zu bemerken, daß nach ihr nur in dem Falle, wo $X(\infty)$; $X(\infty+1)$; $X(\infty+2)$ u. s. w. sämmtlich verschwinden, die wahre arithmetische Summe erhalten wird, in jedem anderen Falle ist die Summe bloß eine analytische. Dieses erhellt aus der Art, wie die Gleichung

$$S + S' = X$$

gefunden worden.

49. Es sey $X = x^3$, so ist $\frac{\partial X}{\partial x} = 3x^2$,

$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = 3.\ 2.\ 1$, $\frac{\partial^5 X}{\partial x^5} = 0$; etc. Daher

$$x^3 - (x+1)^3 + (x+2)^3 - (x+3)^3 + (x+4)^3 - \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{2}x^3 - 3.\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2}x^2 + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4}.$$

also $x = 0$ gemacht, und auf beiden Seiten das Entgegengesetzte genommen

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \text{etc. in inf.} = -\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4}.$$

So lassen sich die Summen aller Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen finden. Umgekehrt, werden diese Summen als bekannt vorausgesetzt, so ergiebt sich die Formel leicht durch wiederholte Anwendung des Taylorschen Lehrsatzes wie die in (37).

Setzt man in der erhaltenen Summirung

$$x^3 - (x+1)^3 + (x+2)^3 - (x+3)^3 + \text{etc. in inf.}$$
$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}$$

$x = \frac{1}{2}$, und multiplicirt mit 2^3 auf beiden Seiten,

so

so wird

$$1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \text{etc. in inf.} = 0$$

wie bekannt.

Hier zeigt sich nun auch ein Mittel, wenn $\sec\varphi$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1.2}\varphi^2 + \frac{\beta}{1.2.3.4}\varphi^4 + \frac{\gamma}{1.2.3.4.5.6}\varphi^4 + \text{etc.} \ldots$$

gesetzt wird, die Größen α, β, γ durch die Bernoullischen Zahlen lineärisch auszudrucken. Sucht man z. B. $1^4 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - \text{etc.}$ auf die vorige Art, so erhält man, da diese Summe auch $= \frac{1}{2}\beta$ ist

$$\frac{\beta}{1.2.3.4} = \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{2^2}{1.2.3} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{2^4}{1}.$$

Aus $1^6 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - \text{etc.} = -\frac{1}{2}\gamma$ aber wird

$$\frac{\gamma}{1.2.3..6} = -\left\{ \frac{1}{1.2...6} - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{2^2}{1.2.3.4.5} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{2^4}{1.2.3} - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots\ldots6} \cdot \frac{2^6}{1} \right\}$$

welche Formeln leicht verallgemeinert werden können, und sich auch mittels der Gleichung $\sec\varphi = \cos\varphi + \tang\varphi \cdot \sin\varphi$ ergeben, wenn statt $\cos\varphi$, $\tang\varphi$, $\sin\varphi$, ihre Entwickelungen in Reihen gesetzt werden.

50. Die Summe der Reihe

$$X - X' + X'' - X''' + X^{IV} - \text{etc.}$$

läßt sich auch noch auf eine andere Art ausdrucken.

$C = -\frac{1}{2}\gamma$; $D = +\frac{1}{2}\delta$; etc. wo das Gesetz für die Zahlen α, β, γ.... aus dem vorhergehenden bekannt ist.

Demnach ist

$$T = \frac{1}{2}X - \frac{\alpha}{2^3}\cdot\frac{\partial^2 X}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\beta}{2^5}\cdot\frac{\partial^4 X}{1.2.3.4\,\partial x^4} - \frac{\gamma}{2^7}\cdot\frac{\partial^6 X}{1.2\ldots\ldots 6\partial x^6} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2}X - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{\partial^2 X}{1.2\,\partial x^2} + \frac{5}{2^5}\cdot\frac{\partial^4 X}{1.2.3.4\,\partial x^4} - \frac{61}{2^7}\cdot\frac{\partial^6 X}{1.2\ldots 6\partial x^6} + \frac{1385}{2^9}\cdot\frac{\partial^8 X}{1.2\ldots\ldots 8\partial x^3} - \text{etc.}$$

woraus alsdenn S leicht gefunden wird. Euler giebt diese Formel ebenfalls a. a. O. Zugleich erhellt, daß wenn $Y = \varphi(x + \frac{1}{2})$, also $Y' = \varphi(x + \frac{3}{2})$, $Y''' = \varphi(x + \frac{5}{2})$ u. s. w. ist, die Summe der Reihe

$$Y - Y' + Y'' - Y''' + \text{etc. in inf.}$$

sey

$$\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{\partial^2 Y}{1.2\,\partial x^2} + \frac{5}{2^3}\cdot\frac{\partial^4 Y}{1.2.3.4\,\partial x^4} - \frac{61}{2^5}\cdot\frac{\partial^6 Y}{1.2\ldots\ldots 6\partial x^4} + \text{etc.}$$

51. Exempel. Es sey $X = x^4$, so ist $\frac{\partial X}{\partial x} = 4x^3$; $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 4.3\,x^2$; $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = 4.3.2.1$; $\frac{\partial^6 X}{\partial x^6} = 0$; etc. Daher

$$T = \frac{1}{2}x^4 - \frac{\alpha}{2^3}\cdot\frac{4.3}{1.2}x^2 + \frac{\beta}{2^5}\cdot\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}.$$

Also

$$x^4-(x+1)^4+(x+2)^4-(x+3)^4+(x+4)^4- \text{etc.}$$
$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{\alpha}{2^3}\cdot\frac{4.3}{1.2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\beta}{2^5}.$$

und nun $x=\frac{1}{2}$ gemacht

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{5}{2}\right)^4-\left(\frac{7}{2}\right)^4-\left(\frac{9}{2}\right)^4$$
$$- \text{etc.} = \frac{\beta}{2^5}$$

folglich

$$1^4-3^4+5^4-7^4+9^4- \text{etc.} = \frac{1}{2}\beta.$$

52. Es darf wohl kaum angemerkt werden, daß weder die eine noch die andere der beiden Summirungsformeln in (48) und (50) abbricht, wenn X eine rationale ganze Function von x ist, sondern in diesem Falle nur eine Umbildung der vorgegebenen Reihe darbietet, die aber wegen schnellerer Convergenz in den Totalwerth zur Berechnung desselben den Vorzug vor der ursprünglichen Reihe haben kann.

Dieses ist der Fall in dem folgenden Beyspiele.

Es sey $X=\frac{1}{x}=x^{-1}$, so ist $\frac{\partial X}{\partial x}=-1.x^{-2}$;
$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=1.2x^{-3}$; $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}=-1.2.3x^{-4}$; $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}=$
$1.2.3.4x^{-5}$; etc. also nach der ersten Formel

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+ \text{etc. in inf.}$$
$$=\frac{1}{2x}+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{2x^2}-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{4x^4}+\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{6x^6}$$
$$- \text{etc.}$$

+ etc. den log. 2. in mehreren Decimalstellen genau zu berechnen, ist von selbst klar. Auch erhellt aus dem obigen, daß Newton die Ergänzung eines Stücks der Leibnitzischen Reihe sehr richtig geschätzt hat, in dem zweyten Schreiben an Oldenburg, Opusc. Tom. I. p. 345.

Nach der zweyten Summenformel ist

$$T = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^3 . x^3} + \frac{5}{2^5 . x^5} - \frac{61}{2^7 . x^7} + \text{etc.}$$

also $x - \frac{1}{2}$ statt x gesetzt

$$S = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} - \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{(2x-1)^3} + \frac{5}{(2x-1)^5} - \frac{61}{(2x-1)^7} + \text{etc.}$$

Hieraus folgt auf ähnliche Art wie vorhin

$$\frac{1}{m(m+n)} + \frac{1}{(m+2n)(m+3n)} + \frac{1}{(m+4n)(m+5n)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{(2m-n)n} - \frac{n}{(2m-n)^3} + \frac{5n^3}{(2m-n)^5} - \frac{61n^5}{(2m-n)^7} + \frac{1385n^7}{(2m-n)^7} - \text{etc.}$$

Für $m = 101$, $n = 3$ geben die vier ersten Glieder der summatorischen Reihe die Summe von

$$\frac{1}{101.104} + \frac{1}{107.110} + \frac{1}{113.116} + \text{etc. in inf.}$$

$= 0{,}001674661626.....$, welche nach der vorigen summatorischen Reihe gleichfalls durch die vier ersten Glieder $= 0{,}001674661625....$ gefunden wird. In Schraders oben (38) angeführter Schrift ist diese Summe §. 11. nach einer anderen Umwandelungsfor-

mel durch mehr als doppelt so viele Glieder bey weitem nicht so genau gefunden worden.

Aus dem Werthe von T folgt unmittelbar

$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{1}{x+\frac{5}{2}}-\frac{1}{x+\frac{7}{2}}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^3.x^3}+\frac{5}{2^5.x^5}-\frac{61}{2^7.x^7}+\text{etc.}$$

also

$$\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+3}+\frac{1}{2x+5}-\frac{1}{2x+7}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{4x}-\frac{1}{16x^3}+\frac{5}{64x^5}-\frac{61}{256x^7}+\frac{1385}{1024x^9}+\text{etc.}$$

welche Reihe ebenfalls dient, die Ergänzung eines Stücks der leibnitzischen Reihe für $\frac{1}{4}\pi$ zu berechnen.

53. Es sey $X=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$, so ist $\frac{\partial X}{\partial x}=-2x^{-3}$; $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=+2.3x^{-4}$, $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}=-2.3.4x^{-5}$; $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}=+2.3.4.5x^{-6}$; etc.

Daher

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{2x^2}+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{x^3}-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{x^5}+\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{x^7}$$

$$-\frac{(2^8-1)\mathfrak{B}^{(4)}}{x^9}+\text{etc.}$$

Also, wenn man $x=1$ macht

mithin, $x - \frac{1}{2}$ statt x gesetzt,

$$\log \frac{x(x+2)(x+4)(x+6)\ldots \text{etc.}}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)\ldots \text{etc.}} = \frac{1}{2}\log(x-\frac{1}{2})$$

$$+ \frac{\alpha}{4(2x-1)^2} - \frac{\beta}{8(2x-1)^4} + \frac{\gamma}{12(2x-1)^6}$$

$$- \frac{\delta}{16(2x-1)^8} + \text{etc.}$$

Diese Formeln dienen den mittelsten Coefficienten in $(a+b)^{2n}$, wenn n sehr groß ist, zu finden.

Man setze nämlich $x = 2n + 1$, so giebt die erste Formel

$$\log \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots \text{etc.}}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)\ldots \text{etc.}} = \frac{1}{2}\log(2n+1)$$

$$- \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.(2n+1)} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.(2n+1)^3}$$

$$- \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.(2n+1)^5} + \text{etc.}$$

Nun ist nach Wallisens in (44) angeführtem Ausdrucke

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2.4.6.8\ldots 2n}{1.3.5.7\ldots 2n-1} \times \frac{(2n+2)(2n+4)(2n+6)\ldots \text{etc.}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots \text{etc.}}$$

also (Binomial-Coefficienten, 13.)

$$\frac{2^{2n}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} = \frac{2.\ 4.\ 6.\ \ldots\ 2n}{1.\ 3.\ 5.\ \ldots\ 2n-1}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ \text{etc.}}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)\ \text{etc.}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

und

$$\log \frac{2^{2n}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} = \frac{1}{2}\log\frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.(2n+1)}$$

$$+ \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.(2n+1)^3} - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.(2n+1)^5} + \text{etc.}$$

wo die Logarithmen natürliche sind. Folglich, wenn man den Modulus des gewöhnlichen Systems, 0,434294481903 25 durch k bezeichnet

$$\log.\text{vulg.}\frac{2^{2n}}{{}^{2n}\mathfrak{N}}=\frac{1}{2}\log.\text{vulg.}\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$-\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.}\cdot\frac{k}{2n+1}+\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4.}\cdot\frac{k}{(2n+1)^3}$$

$$-\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\ 6.}\cdot\frac{k}{(2n+1)^5}+\text{etc.}$$

Diese Formel gewährt eine etwas schnellere Annäherung als die Eulerische, Institt. calc. diff. §. 160. Die numerischen Coefficienten sind dieselben.

Exempel. $2n=100$.

$$\log.\text{vulg.}\frac{2^{100}}{{}^{2n}\mathfrak{N}}=\frac{1}{2}\log.\text{vulg.}\frac{101\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{k}{101}$$

$$+\frac{1}{24}\cdot\frac{k}{101^3}-\text{etc.}$$

$$\log 101 = 2{,}0043213738$$
$$\log \pi = 0{,}4971498726$$
$$\log \tfrac{1}{2} = 9{,}6989700043$$

$$\log\frac{101\pi}{2} = 2{,}2004412507$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{101\pi}{2} = 1{,}1002206253$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{k}{101} = -0{,}0010749863$$

$$1{,}0991456390$$

$$+\frac{1}{24}\cdot\frac{k}{101^3} = +0{,}0000000176$$

$$\log\frac{2^{100}}{{}^{2n}\mathfrak{N}} = 1{,}0991456566$$

$$= \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(2n - \frac{1}{2}\right)\log(2n-1) - (2n-1)$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2(2n-1)} - \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4(2n-1)^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6(2n-1)^5} - \text{etc.}$$

nach der andern in (45) aber

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log(n-1) =$$

$$\frac{1}{2}\log 2\pi + \left(n - \frac{1}{2}\right)\log\left(n - \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$- \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2(2n-1)} + \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4(2n-1)^3} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6(2n-1)^5} + \text{etc.}$$

und hierdurch

$$\log {}^{2n}\mathfrak{N} = \log 2n - 2\log n - \frac{1}{2}\log 2\pi$$

$$+ \left(2n - \frac{1}{2}\right)\log(2n-1) - (2n-1)\log\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2(2n-1)} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4(2n-1)^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6(2n-1)^5} - \text{etc.}$$

also reducirt

$$\log {}^{2n}\mathfrak{N} = 2n\log 2 - \log n - \frac{1}{2}\log\pi + \log\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2(2n-1)} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4(2n-1)^3} + \text{etc.}$$

Es ist

$$\log n = \log\left(n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \log\left(n - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \log\left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)^2} + \frac{1}{3(2n-1)^3} + \text{etc.}$$

Dieser Werth von $\log n$ in den vorigen Ausdruck gebracht giebt

$$\log \frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = -\frac{1}{2}\log\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{3}{4(2n-1)} + \frac{1}{2(2n-1)^2}$$

$$- \frac{3}{8(2n-1)^3} + \frac{1}{4(2n-1)^4} - \frac{3}{20(2n-1)^5} + \text{etc.}$$

und

und dadurch, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen zurückgeht,

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{(n-\frac{1}{2})\pi}} \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4(2n-1)} + \frac{25}{32(2n-1)^2} - \frac{105}{128(2n-1)^3} + \frac{1659}{2048(2n-1)^4} - \text{etc.} \right\}$$

Dieses ist Laplace's Ausdruck, wenn die gehörigen Entwickelungen und Reductionen vorgenommen werden. Man sieht, daß er bey weitem so stark nicht convergirt, als die vorhin angegebenen Reihen für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$, aber durch die Art seiner Herleitung wird er sehr merkwürdig. Laplace giebt eine doppelte, wovon hier nur von der zweyten, einfacheren, Bericht erstattet werden kann.

Zuerst wird gezeigt, daß

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{2}{\pi} \int \partial\varphi (\cos\varphi)^{2n}$$

ist, das Integral zwischen den Gränzen $\varphi = 0$, und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ genommen. Hiervon überzeugt man sich leicht vermittelst (Goniometrie, 141.), wenn man nur bemerkt, daß $\int \partial\varphi \cos 2r\varphi$ zwischen den angegebenen Gränzen 0 ist. Macht man nun $\sin\varphi = u$, also $\cos\varphi = \sqrt{(1 - uu)}$, so wird

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{2}{\pi} \int \partial u (1 - uu)^{n-\frac{1}{2}}$$

das Integral von $u = 0$ bis $u = 1$ genommen. Nun wird $n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\alpha}$, und $1 - uu = e^{-\alpha t^2}$, also $u = \sqrt{(1 - e^{-\alpha t^2})}$ gesetzt, ferner

$$\sqrt{(1 - e^{-\alpha t^2})} = \alpha^{\frac{1}{2}} t (1 + \alpha . q^{(1)} . t^2 + \alpha^2 . q^{(2)} . t^4 + \alpha^3 . q^{(3)} . t^6 + \text{etc.})$$

angenommen. Dadurch wird

$$\int \partial u(1-uu)^{n-\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} \int \partial t e^{-tt}(1 + 3\alpha . q^{(1)} . t^2 + 5\alpha^2 . q^{(2)} . t^4 + 7\alpha^3 . q^{(3)} . t^6 + \text{etc.})$$

wo die Integrale $\int \partial t e^{-tt}$; $\int t^2 \partial t e^{-tt}$; $\int t^4 \partial t e^{-tt}$; u. s. w. von $t = 0$ bis $t = \infty$, und zwar $+ \infty$, zu erstrecken sind, damit nämlich die Reihe rechter Hand zwischen ihren Gränzen stets positiv bleibe, wie es $\int \partial u(1-uu)^{n-\frac{1}{2}}$ zwischen den correspondirenden Gränzen $u = 0$ und $u = 1$ bleibt. Nun ist, wie nachher gezeigt werden soll, zwischen den angegebenen Gränzen

$$\int \partial t e^{-tt} = \frac{1 . \sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int t^2 \partial t e^{-tt} = \frac{1 . \sqrt{\pi}}{2^2}$$

$$\int t^4 \partial t e^{-tt} = \frac{1 . 3 \sqrt{\pi}}{2^3}$$

$$\int t^6 \partial t e^{-tt} = \frac{1 . 3 . 5 . \sqrt{\pi}}{2^4}$$

u. s. w.

Dadurch wird

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{(n-\frac{1}{2})\pi}} \left\{ 1 + \frac{1 . 3}{2} \alpha . q^{(1)} + \frac{1 . 3 . 5}{2^2} \alpha^2 . q^{(2)} + \frac{1 . 3 . 5 . 7}{2^3} \alpha^3 . q^{(3)} + \text{etc.} \right\}$$

wo nur noch die Coefficienten $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ u. s. w. zu bestimmen sind. Zu dem Ende nehme man in der Gleichung

$$\alpha^{\frac{1}{2}} . t(1 + \alpha . q^{(1)} t^2 + \alpha^2 . q^{(2)} t^4 + \text{etc.}) = \sqrt{(1 - e^{-\alpha tt})}$$

auf beiden Seiten die Logarithmen, und differentiire alsdann, so wird

$$\frac{1 + 3\alpha . q^{(1)} . t^2 + 5\alpha^2 . q^{(2)} . t^4 + 7\alpha^3 . q^{(3)} . t^6 + \text{etc.}}{t(1 + \alpha . q^{(1)} t^2 + \alpha^2 . q^{(2)} . t^4 + \alpha^3 . q^{(3)} . t^6 + \text{etc.}} = \frac{\alpha t . e^{-\alpha tt}}{1 - e^{-\alpha tt}} = \frac{\alpha t}{e^{\alpha tt} - 1}$$

$$= \frac{1}{t\left(1 + \frac{\alpha t^2}{1.2} + \frac{\alpha^2 t^4}{1.2.3} + \frac{\alpha^3 t^6}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right)}$$

Hieraus folgt, wenn man übers Kreuz multiplicirt, und in den Producten, welche gleich sind, die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von αt^2 gleich setzt,

$$2q^{(1)} = -\frac{1}{1.2}$$

$$4q^{(2)} = -\left\{\frac{1}{1.2.3} + \frac{3q^{(1)}}{1.2}\right\}$$

$$6q^{(3)} = -\left\{\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{3q^{(1)}}{1.2.3} + \frac{5q^{(2)}}{1.2}\right\}$$

etc.

überhaupt

$$2rq^{(r)} = -\left\{\frac{1}{1.2.3\ldots r+1} + \frac{3q^{(1)}}{1.2.3\ldots r} + \frac{5q^{(2)}}{1.2\ldots\ldots r-1} + \frac{7q^{(3)}}{1.2..r-2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(2r-1)q^{(r-1)}}{1.2}\right\}$$

Laplace hat das Gesetz etwas anders, aber nicht einfacher angegeben, Théorie des probabilités, Chap. 2. No. 34. Man erhält hiernach $q^{(1)} = -\frac{1}{4}$; $q^{(2)} = +\frac{5}{96}$; $q^{(3)} = -\frac{1}{128}$; $q^{(4)} = \frac{79}{92160}$; u. s. w. welche Werthe, wenn sie in den Reihenausdruck für $\frac{^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ gebracht werden, solchen mit dem vorhin gefundenen übereinstimmig machen.

55. Was den Werth des Integrals $\int e^{-t^2}\partial t$ von $t = 0$ bis $t = \infty$ genommen betrifft, so findet sich der-

selbe am kürzesten auf folgende von Laplace zur Bestimmung desselben angewandte Art, die auch Euler in einem Schreiben an Condorcet, Mém. de Paris, 1778. S. 603. und in der Abhandlung, Noua methodus quantitates integrales determinandi, Nov. Comm. Petrop., Tom. XVI. erklärt, und bey anderen Integralen gebraucht hat.

Man nehme das Doppel-Integral $\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)}$, wo x und y von einander unabhängig sind, so ist klar, daß der Werth desselben einerley gefunden werden muß, man mag entweder zuerst nach y und dann nach x, oder zuerst nach x und dann nach y integriren, wofern nur die äußersten Werthe von x und y beidesmal dieselben sind.

Fängt man mit der Integration nach y an, so ist

$$\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)} = \int \partial x \int \partial y e^{-y(1+xx)}$$

Aber

$$\int \partial y e^{-y(1+xx)} = \text{Const.} - \frac{e^{-y(1+xx)}}{1+xx}$$

und zwischen den Gränzen, $y = 0$, und $y = \infty$,

$$\int \partial y e^{-y(1+xx)} = \frac{1}{1+xx}$$

Dadurch wird

$$\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)} = \int \frac{\partial x}{1+xx}$$

$$= \text{Const.} + \text{Ang. tang} x$$

also, von $x = 0$ bis $x = \infty$,

$$= \frac{1}{2}\pi.$$

Mithin ist für die äußersten Werthe 0 und ∞ von x und y

$$\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)} = \frac{1}{2}\pi$$

Führt man jetzt statt x und y zwey neue variable t und u ein, so daß

$$x = \frac{t}{u}$$

$$y = u^2$$

also
$$\partial x = \frac{1}{u}\partial t - \frac{t}{u^2}\partial u$$

$$\partial y = 0.\partial t + 2u\partial u$$

ist, so ist nach (Stereometrie, 11.), wo das dortige $R = \frac{1}{u}$, $S = -\frac{t}{u^2}$, $T = 0$, $V = 2u$, statt $\partial x \partial y$ zu setzen $\frac{1}{u} \cdot 2u\partial t\partial u$, d. i., $2\partial t\partial u$ und die Formel $\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)}$ verwandelt sich in diese $2\int\int \partial t \partial u e^{-(t^2+u^2)}$, wo man nun beliebig zuerst die Integration nach t oder nach u vornehmen kann. Die Gränzen von t und u sind, vermöge der Annahme $x = \frac{t}{u}$, und $y = u^2$, entweder 0 und $+\infty$ oder 0 und $-\infty$, wovon nur jene hier in Betracht kommen. Integrirt man die Formel $2\int\int \partial t \partial u e^{-(t^2+u^2)}$ zuerst nach t, und setzt $\int \partial t e^{-tt}$ zwischen den Gränzen, $t = 0$, und $t = +\infty$, $= B$, so ist $2\int\int \partial t \partial u e^{-(t^2+u^2)} = 2B\int \partial u e^{-uu}$, also, weil das Integral von $\int \partial u e^{-uu}$ von $\int \partial t e^{-tt}$, wenn die Gränzen bey beiden dieselben sind, nicht verschieden ist, das Integral von $2B\int \partial u e^{-uu}$, von $u = 0$ bis $u = +\infty$ genommen, $= 2BB$, welches, da es mit dem vorhin gefundenen Werthe von $\int\int \partial x \partial y e^{-y(1+xx)}$ einerley ist, $2BB = \frac{1}{2}\pi$, also B, d. h., $\int e^{-tt}\partial t$ von $t = 0$ bis $t = +\infty$ genommen $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ giebt.

Auf dieses Integral werden die übrigen $\int e^{-tt} t^2 \partial t$; $\int e^{-tt} t^4 \partial t$; u. s. w. folgendergestalt zurückgebracht, wo-

zu wir aber des Satzes bedürfen, daß der Logarithme einer unendlich großen Zahl gegen die Zahl selbst unendlich klein ist, oder verschwindet. Der Beweis desselben ist folgender. Es ist

$$\frac{\log \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = (1-x)\log\frac{1}{1-x}$$

$$= (1-x)\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.}\right)$$

$$= x - \left(\frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{3.4}x^4 + \text{etc.}\right)$$

Also, für $x = 1$, wenn i eine unendliche große Zahl bezeichnet,

$$\frac{\log i}{i} = 1 - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \text{etc.}\right)$$

Aber die Summe der Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \text{etc.}$ in inf. ist aus (Summirbare Reihe, 3. oder 6.) $= 1$, mithin $\frac{\log i}{i} = 0$.

Es ist, wenn man theilweise integrirt,

$$\int e^{-tt} t^{2n} \partial t = -\frac{1}{2} e^{-tt} . t^{2n-1} + \frac{2n-1}{2} \int e^{-tt} . t^{2n-2} \partial t,$$

ohne Constans, weil für $t = 0$, die Integrale auf beiden Seiten verschwinden. Setzt man $t = \infty$, so verschwindet $e^{-tt}.t^{2n-1}$. Denn es ist, wenn man zur Abkürzung $2n - 1 = p$, setzt $\frac{t^{2n-1}}{e^{tt}} =$

$$\frac{1 + p\log t + \frac{p^2(\log t)^2}{2} + \frac{p^3(\log t)^3}{2.3} + \text{etc.}}{1 + tt + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{2.3} + \text{etc.}}$$

wo vom zweyten Gliede an, jedes Glied des Zählers gegen das gleichstellige im Nenner für $t = \infty$, selbst wenn nur p unendlich groß werden sollte, zufolge des erwiesenen verschwindet. Da aber sowohl im Zähler als im Nenner die Summen der nach dem ersten Gliede folgenden unendlich groß sind, so verschwinden die ersten Glieder selbst gegen jene Summen, und es ist für ein unendlich großes t

$$\frac{t^{2n-1}}{e^{tt}} = 0$$

mithin zwischen den Gränzen $t = 0$ und $t = \infty$

$$\int e^{-tt} t^{2n} \partial t = \frac{2n-1}{2} . \int e^{-tt} t^{2n-2} \partial t.$$

Setzt man hier für n nach und nach $n-1$, $n-2$, $n-3 \ldots 1$ so wird,

$$\int e^{-tt} t^{2n-2} \partial t = \frac{2n-3}{2} \int e^{-tt} t^{2n-4} \partial t$$

$$\int e^{-tt} t^{2n-4} \partial t = \frac{2n-5}{2} \int e^{-tt} t^{2n-6} \partial t$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\int e^{-tt} t^2 \partial t = \frac{1}{2} \int e^{-tt} \partial t$$

also

$$\int e^{-tt} t^{2n} \partial t = \frac{1.3.5.7 \ldots 2n-1}{2^{n-1}} \int e^{-tt} \partial t$$

$$= \frac{1.3.5.7 \ldots 2n-1}{2^n} . \sqrt{\pi}$$

innerhalb der Gränzen $t = 0$ und $t = \infty$.

56. Die Summe der endlichen Reihe mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder $\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) + \ldots \pm \varphi(x)$, das obere Vorzeichen für ein ungerades, das untere Vorzeichen für ein gerades x genommen, ergiebt sich so.

Man suche die Summe der unendlichen Reihe $\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) +$ etc. in inf. indem man in $\varphi(x) - \varphi(x+1) + \varphi(x+2) - \varphi(x+3) +$ etc. in inf. $= S$, $x = 1$ setzt. Nennt man diese Summe $\mathfrak{S}$, so ist für ein ungerades x

$$\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \ldots - \varphi(x-1) = \mathfrak{S} - S$$

also

$$\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) + \ldots - \varphi(x-1) + \varphi(x) = \mathfrak{S} + \varphi(x) - S$$

und auf ähnliche Art für ein gerades x

$$\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) + \ldots + \varphi(x-1) - \varphi(x) = \mathfrak{S} - (\varphi(x) - S).$$

Da $\mathfrak{S}$ eine unveränderliche Größe ist, so kann man auch sagen, die Summe σ der Reihe $\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \ldots \pm \varphi(x)$ sey $=$ Const. $\pm (\varphi(x) - S)$ unter der angegebenen Bedingung der Vorzeichen, und die Constante dadurch zu bestimmen, daß für $x = 0$, auch $\sigma = 0$, für $x = 1$, $\sigma = \varphi(1)$, für $x = 2$, $\sigma = \varphi(1) - \varphi(2)$ u. s. w. werden müsse. Setzt man $\varphi(x) = y$, $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = a'$, $\varphi(3) = a''$ u. s. w., so wird aus (48)

$$a - a' + a'' - a''' + \ldots \pm y =$$

$$\text{Const.} \pm \left(\frac{1}{2} y + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} . \frac{\partial y}{\partial x} \right.$$

$$- \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2.\ldots 6} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$$

$$- \text{etc.} \Big)$$

Euler hat diese Formel in den Institt. calc. diff. P. II. c. VII. §. 183.

57. Die eben erhaltene Formel läßt sich auch aus den beiden Summirungsformeln in (35) und (40) folgendergestalt ableiten.

Aus (35) ist

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) - \ldots\ldots + \varphi(x) =$$

$$\text{Const.} + \int y \partial x + \frac{1}{2} y + \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$- \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2.\ldots 6} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

Aus (40) aber, wenn man $x - \frac{1}{2}$ statt x schreibt, wodurch sich T in $\varphi(x)$ oder y und y in $\varphi\left(x - \frac{1}{2}\right)$ verwandelt,

$$\varphi(\tfrac{1}{2}) + \varphi(\tfrac{3}{2}) + \varphi(\tfrac{5}{2}) + \ldots\ldots + \varphi(x - \tfrac{1}{2}) =$$

$$\text{Const.} + \int y \partial x - \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{\partial y}{2\partial x}$$

$$+ \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^3 y}{(2\partial x)^3} - \frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2.\ldots 6} \cdot \frac{\partial^5 y}{(2\partial x)^5} + \text{etc.}$$

also durch Subtraction, wenn $\varphi(\frac{1}{2})$ mit zur Constans gezogen wird,

$$\varphi(1) - \varphi(\tfrac{3}{2}) + \varphi(2) - \varphi(\tfrac{5}{2}) + \ldots + \varphi(x - \tfrac{1}{2}) + \varphi(x)$$

$$= \text{Const.} + \frac{1}{2} y + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} \cdot \frac{\partial y}{2\partial x}$$

$$-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3 y}{(2\partial x)^3}+\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots 6}\cdot\frac{\partial^5 y}{(2\partial x)^5}$$
$$-\text{etc.}$$

Hier hat das letzte Glied $\varphi(x)$ das Vorzeichen $+$. Da es aber auch $-$ haben kann, so gebe man der Reihe, indem man sie rückwärts schreibt, wodurch es unbestimmt bleibt, wie weit sie sich nach dieser Richtung erstreckt, doppelte Vorzeichen. Alsdann wird

$$\pm\left(\varphi(x)-\varphi\left(x-\frac{1}{2}\right)+\varphi(x-1)-\varphi\left(x-\frac{3}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\text{etc.}\right)$$

$$=\text{Const.}\pm\left\{\frac{1}{2}y+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2}\cdot\frac{\partial y}{2\partial x}\right.$$
$$\left.-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3 y}{(2\partial x)^3}+\text{etc.}\right\}$$

wo die Constans, welche im allgemeinen immer als additiv betrachtet werden kann, ohne doppeltes Vorzeichen geblieben ist. Ihre Bestimmung hängt nun davon ab, wie weit man in der Reihe $\varphi(x)-\varphi(x-\frac{1}{2})+\varphi(x-1)-\text{etc.}$ zurückgeht. In dieser Reihe ist $\varphi(x-\frac{1}{2})$ das nächste Glied an $\varphi(x)$ oder y und

$$\varphi(x-\tfrac{1}{2})=y-\frac{\partial y}{2\partial x}+\frac{\partial^2 y}{1.2(2\partial x)^2}-\frac{\partial^3 y}{1.2.3(2\partial x)^3}$$
$$+\text{etc.}$$

Soll $\varphi(x-1)$ das nächste Glied werden, so hat man, weil

$$\varphi(x-1)=y-\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2}-\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3}+\text{etc.}$$

und dieser Ausdruck aus dem von $\varphi(x-\frac{1}{2})$ hervorgeht, wenn statt $2\partial x$ überall bloß ∂x gesetzt wird, nur nöthig, dieselbe Veränderung in der erhaltenen Summenformel vorzunehmen. Dadurch wird

$$\pm(\varphi(x)-\varphi(x-1)+\varphi(x-2)-\varphi(x-3)+\text{etc.})$$
$$=\text{Const.}\pm\left(\frac{1}{2}y+\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right.$$
$$\left.-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\text{etc.}\right)$$

Setzt man $\pm(\varphi(x)-\varphi(x-1)+\varphi(x-2)-\ldots\pm\varphi(1))$, wo $\varphi(1)$ das Vorzeichen $+$ bey einem ungeraden x erhält, $=\sigma$, also $\sigma=\varphi(1)-\varphi(2)+\varphi(3)-\ldots\pm\varphi(x)$, so gelangt man wieder zu der vorigen Formel. Man wird gegen diese Herleitung weiter kein Bedenken haben, wenn man bemerkt, daß in den beiden Reihen

$\varphi(x)-\varphi(x-\frac{1}{2})+\varphi(x-1)-\varphi(x-\frac{3}{2})+\text{etc.}$

und

$\varphi(x)-\varphi(x-1)+\varphi(x-2)-\varphi(x-3)+\text{etc.}$

die Glieder der zweyten $\varphi(x-2)$, $\varphi(x-3)$, $\varphi(x-4)$ u. s. w. aus den gleichstelligen Gliedern der ersten $\varphi(x-1)$, $\varphi(x-\frac{3}{2})$, $\varphi(x-2)$ u. s. w. eben so entstehen, wie es vorhin von den Gliedern $\varphi(x-1)$ und $\varphi(x-\frac{1}{2})$ gezeigt ist. $\varphi(x)$ oder y bleibt dabey ungeändert.

57[b]. Vermittelst der Formel für die Summe der Reihe $\varphi(1)-\varphi(\frac{3}{2})+\varphi(2)-\varphi(\frac{5}{2})+\ldots\ldots-\varphi(x-\frac{1}{2})+\varphi(x)$ läßt sich der oben in (45) gefundene Ausdruck für $\frac{1}{2}\log 2\pi$ auf folgende, vielleicht weniger Einwendungen ausgesetzte Art erhalten.

Es sey nämlich y oder $\varphi(x)=\log 2x$, also $\varphi(x-\frac{1}{2})=\log(2x-1)$; $\varphi(x-1)=\log(2x-2)$; ...... $\varphi(\frac{5}{2})=\log 5$; $\varphi(2)=\log 4$; $\varphi(\frac{3}{2})=\log 3$; $\varphi(1)=\log 2$; so ist $\frac{\partial y}{\partial x}=x^{-1}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=1.2\,x^{-3}$; $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}=1.2.3.4\,x^{-5}$; u. s. w. also

$$\log 2-\log 3+\log 4-\log 5+\ldots-\log(2x-1)+\log 2x$$

$$= \text{Const.} + \frac{1}{2}\log 2x + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2.(2x)} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4.(2x)^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6.(2x)^5} - \text{etc.}$$

Setzt man hier zur Bestimmung der Constans $x=1$, so wird

$$\log 2 = \text{Const.} + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.\ 2} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4.\ 2^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\ 6.\ 2^5} - \text{etc.}$$

und

$$\log\frac{2.4.6.8.\ 2x-2}{3.5.7.9..2x-1}\sqrt{2x} = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.\ 2}\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\ 2.\ 2^3}\left(1-\frac{1}{x^3}\right) - \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{3.\ 4.\ 2^5}\left(1-\frac{1}{x^5}\right) + \text{etc.}$$

also für ein unendlich großes x

$$\log\frac{2.4.6.8..2x-2}{3.5.7.9..2x-1}.\sqrt{2x} = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.\ 2} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\ 2.\ 2^3} - \text{etc.}$$

Aber nach Wallisens bekanntem Ausdrucke ist für ein unendlich großes x der Werth von $\frac{2.4.6...2x-2}{3.5.7...2x-1}\sqrt{2x}$, $=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Daher, weil $\log\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\log 2$ $= \frac{1}{2}\log 2\pi - \log 2$ ist,

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = \frac{3}{2}\log 2 - \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2.\ 2} + \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4.\ 2^3} - \text{etc.}$$

In (45) ist gefunden

$$\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\,2.\,2} - \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\,4.\,2^3}$$
$$+ \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\,6.\,2^5} - \text{etc.}$$

Bringt man diesen Werth in den vorigen Ausdruck, so wird erhalten

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = 1 - \frac{\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}^{(2)}}{3.4} - \frac{\mathfrak{B}^{(3)}}{5.6} + \text{etc.}$$

wie in (44) und (45) gefunden ist.

58. Man sieht, wie die Sätze von 54. bis 57. dienen können die Logarithmen von Factoriellen (Facultäten) mit gebrochenen Exponenten zu finden.

Die Factorielle $1^{\frac{1}{2}|r}$ nach Kramps Bezeichnung ist, wenn man in dem Art., Hypergeometrische Reihe, $a=1$, $b=r$, $n=\frac{1}{2}$ und, $\alpha=1$ setzt, und x statt i schreibt

$$= \frac{1\,.\,(1+r)(1+2r)\ldots\ldots\ldots 1+(x-1)r}{\left(1+\frac{1}{2}r\right)\left(1+\frac{3}{2}r\right)\left(1+\frac{5}{2}r\right)\ldots 1+\left(x-\frac{1}{2}\right)r}.$$
$$\times (1+xr)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{r}\left(\frac{2}{r}+2\right)\left(\frac{2}{r}+4\right)\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2}{r}+2x-2}{\left(\frac{2}{r}+1\right)\left(\frac{2}{r}+3\right)\left(\frac{2}{r}+5\right)\ldots\ldots \frac{2}{r}+2x-1}.$$
$$\times\left(\frac{2}{r}+2x\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

für ein unendlich großes x.

Nun sey $\varphi(x)$ oder $y = \log\left(\frac{2}{r}+2x\right)$, also

$$\varphi\left(x-\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{r}+2x-1\right);\quad \varphi(x-1)$$

$= \log\left(\frac{2}{r} + 2x - 2\right); \ldots \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{r} + 3\right);$

$\varphi(1) = \log\left(\frac{2}{r} + 2\right); \ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{r} + 1\right);$

$\varphi(0) = \log\frac{2}{r}$ ferner $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{1}{r} + x} = \left(\frac{1}{r} + x\right)^{-1};$

$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 1.2.\left(\frac{1}{r} + x\right)^{-3}; \ \frac{\partial^5 y}{\partial x^3} = 1.2.3.4\left(\frac{1}{r} + x\right)^{-5};$

u. s. w. daher

$$\log\frac{2}{r} - \log\left(\frac{2}{r} + 1\right) + \log\left(\frac{2}{r} + 2\right)$$

$$- \log\left(\frac{2}{r} + 3\right) \ldots\ldots - \log\left(\frac{2}{r} + 2x - 1\right)$$

$$+ \log\left(\frac{2}{r} + 2x\right)$$

$$= \text{Const.} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{r} + 2x\right)$$

$$+ \frac{(2^2 - 1)\mathfrak{B}(1)}{1.\ 2} \cdot \frac{r}{2(1 + rx)} - \frac{(2^4 - 1)\mathfrak{B}(2)}{3.\ 4} \cdot \frac{r^3}{2^3(1 + rx)^3}$$

$$+ \frac{(2^6 - 1)\mathfrak{B}(3)}{5.\ 6} \cdot \frac{r^5}{2^5(1 + rx)^5}$$

also, da für $x = 0$ die Summe $= \log\frac{2}{r}$ seyn muß,

$$\text{Const.} = \frac{1}{2}\log\frac{2}{r} - \frac{(2^2 - 1)\mathfrak{B}(1)}{1.\ 2} \cdot \frac{r}{2}$$

$$+ \frac{(2^4 - 1)\mathfrak{B}(2)}{3.\ 4} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^3 - \text{etc.}$$

Dadurch wird

$$\log \frac{\frac{2}{r}\left(\frac{2}{r}+2\right)\left(\frac{2}{r}+4\right)\ldots\ldots\ldots\frac{2}{r}+2x-2}{\left(\frac{2}{r}+1\right)\left(\frac{2}{r}+3\right)\left(\frac{2}{r}+5\right)\ldots\frac{2}{r}+2x-1}.$$

$$\times\left(\frac{2}{r}+2x\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2}.\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{1+rx}\right)$$

$$+\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4}.\left(\frac{r}{2}\right)^3\left\{1-\frac{1}{(1+rx)^3}\right\}$$

$$-\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\ 6}.\left(\frac{r}{2}\right)^5\left\{1-\frac{1}{(1+rx)^5}\right\}$$

$$+\text{ etc.}$$

folglich x unendlich groß gemacht

$$\log 1^{\frac{1}{2}|r}=-\frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2}.\frac{r}{2}+\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{3.\ 4}.\left(\frac{r}{2}\right)^3$$

$$-\frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{5.\ 6}.\left(\frac{r}{2}\right)^5-\text{ etc.}$$

also, wenn man die Zahlwerthe von $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$.... einführt, und von den Logarithmen zu den Zahlen zurückgeht

$$1^{\frac{1}{2}|r}=1-\frac{1}{4}.\frac{r}{2}+\frac{1}{32}.\left(\frac{r}{2}\right)^2+\frac{5}{128}.\left(\frac{r}{2}\right)^3$$

$$-\frac{21}{2048}.\left(\frac{r}{2}\right)^4-\frac{399}{8192}.\left(\frac{r}{2}\right)^5+\frac{869}{65536}.\left(\frac{r}{2}\right)^6+\text{etc.}$$

wo die Coefficienten zu den Potenzen von $\frac{r}{2}$ bis auf die Vorzeichen einerley sind mit denen der Potenzen von $\frac{1}{2n+1}$ in der ersten Reihe für $\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ in (54), wovon man den

Grund leicht auffinden wird. Der gefundene Ausdruck stimmt mit dem von Kramp, Analyse des refractions, Nro. 139. überein.

59. Es sey jetzt die Reihe, deren allgemeines Glied $p^x y$ ist, zu summiren, so daß also die Summe von $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots + 'yp^{x-1} + yp^x$ verlangt wird, wo die Bezeichnungen aus dem vorhergehenden bekannt sind. Man setze diese Summe $= s$. Druckt man nun hier, wie in (27), $'y$, $''y$, ... a'', a', a nach dem Taylorschen Lehrsatze aus, und rechnet man, wie dort, zuerst das der Stelle 0 angehörige Glied $'a$ mit ein, nachher aber wieder ab, so wird

$$s = p^x y + p^x y\, S\frac{1}{p^x} - p^x . \frac{\partial y}{\partial x} . S\frac{x}{p^x} + p^x . \frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2} . S\frac{x^2}{p^x} - p^x . \frac{\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3} . S\frac{x^3}{p^x} + \text{etc.} - {}'a$$

wo $S\frac{x^r}{p^x} = \frac{1^r}{p} + \frac{2^r}{p^2} + \frac{3^r}{p^3} + \frac{4^r}{p^4} + \ldots + \frac{x^r}{p^x}$ ist.

Da die in diesem Summenausdrucke vorkommende Summen $S\frac{1}{p^x}$; $S\frac{x}{p^x}$; $S\frac{x^2}{p^x}$; u. s. w. der Reihen $\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p^3} + \frac{4}{p^4} + \text{etc.}$; $\frac{1}{p} + \frac{4}{p^2} + \frac{9}{p^3} + \frac{16}{p^4} + \text{etc.}$; $\frac{1}{p} + \frac{8}{p^2} + \frac{27}{p^3} + \frac{64}{p^4} + \text{etc.}$; u. s. w. unbestimmte Größen sind, die unendlichen Summen dieser Reihen aber, wie aus (3) erhellt, einen bestimmten (nicht von x abhängigen) Werth haben, so führe man letztere statt der ersteren in die Formel ein. Bezeichnet man

in

in dieser Absicht die unendlichen Summen jener Reihen durch $\mathfrak{S}\frac{1}{p^x}$; $\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$; $\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$; u. s. w. so giebt (3), das dortige $r = \frac{1}{p}$ gemacht, und die übrigen Bezeichnungen gehörig vertauscht,

$$S\frac{1}{p^x} = \mathfrak{S}\frac{1}{p^x} - \frac{1}{p^x(p-1)}$$

$$S\frac{x}{p^x} = \mathfrak{S}\frac{x}{p^x} - \frac{x}{p^x(p-1)} - \frac{1}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$$

$$S\frac{x^2}{p^x} = \mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x} - \frac{x^2}{p^x(p-1)} - \frac{2}{1}.\frac{x}{px}\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$$
$$- \frac{2.1}{1.2}.\frac{1}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$$

$$S\frac{x^3}{p^x} = \mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x} - \frac{x^3}{p^x(p-1)} - \frac{3}{1}.\frac{x^2}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$$
$$- \frac{3.2}{1.2}.\frac{x}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x} - \frac{3.2.1}{1.2.3}.\frac{1}{p^x}\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}$$

u. s. w.

Hierdurch wird, wenn man statt $\mathfrak{S}\frac{1}{p^x}$ seinen Werth $= \frac{1}{p-1}$ setzt, und alles gehörig ordnet

$$S = \frac{p^{x+1}}{p-1}y - p^x.\frac{\partial y}{\partial x}\mathfrak{S}\frac{x}{p^x} + p^x.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2}.\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$$
$$- p^x.\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3}\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x} + \text{etc.}$$

$$- {}'a$$

$$- \frac{1}{p-1}\left(y - x.\frac{\partial y}{\partial x} + x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} \right.$$
$$\left. - x^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \mathfrak{S}\frac{x}{p^x}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - x.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2.\frac{\partial^3 y}{1.2\partial x^3} - x^3.\frac{\partial^4 y}{1.2.3\partial x^4} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{1}{1.2}\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + x^2.\frac{\partial^4 y}{1.2\partial x^4} - x^3.\frac{\partial^5 y}{1.2.3\partial x^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - x.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + x^3.\frac{\partial^5 y}{1.2\partial x^5} - x^3.\frac{\partial^6 y}{1.2.3\partial x^6} + \text{etc.}\right)$$

$$- \text{etc.}$$

Da die hier in $\frac{1}{p-1}$ multiplicirte Reihe, $y - x.\frac{\partial y}{\partial x} + x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} - \text{etc.}$, das der Stellenzahl o angehörige Glied der Reihe, deren allgemeines Glied y, oder der Werth von y für $x = o$, also $= {}'a$, ist, so wird ${}'a + \frac{1}{p-1}\left(y - x.\frac{\partial y}{\partial x} + x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} - \text{etc.}.\right) = {}'a + \frac{1}{p-1}.{}'a = \frac{p\,{}'a}{p-1}$ d. i. der Werth von $\frac{p^{x+1}y}{p-1}$ für $x = o$. Eben so sind die in $\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$; $\frac{1}{1.2}\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$; $\frac{1}{1.2.3}\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}$; u. s. w. multiplicirten Reihen beziehungsweise die der Stellenzahl o angehörigen Glieder der Reihen, deren allgemeine Glieder $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$; u. s. w. sind, oder die Werthe von

$\frac{\partial y}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$; u. s. w. für $x = 0$. Werden diese Werthe durch $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$; $\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$; $\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]$; u. s. w. bezeichnet, so wird

$$s = \frac{p^{x+1} y}{p - 1} - p^x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \mathfrak{S}\frac{x}{p^x} + p^x \cdot \frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2} \cdot \mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x} - p^x \cdot \frac{\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3} \cdot \mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x} + \text{etc.}$$
$$- \left(\frac{p\,'a}{p-1} - \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \cdot \mathfrak{S}\frac{x}{p^x} + \left[\frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2}\right] \cdot \mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x} - \left[\frac{\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3}\right] \cdot \mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x} + \text{etc.}\right)$$

Es ist also s der Unterschied zweyer Reihen, wovon die zweyte, weil $\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$, $\mathfrak{S}\frac{x^x}{p^x}$, $\mathfrak{S}\frac{x^x}{p^x}$ u. s. w. von x ganz unabhängig sind, der Werth der ersten für $x = 0$, oder die der ersten beyzufügende Constans ist, damit für $x = 0$, auch $s = 0$ werde.

Demnach ist

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1} y - p^x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \mathfrak{S}\frac{x}{p^x} + p^x \cdot \frac{\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2} \cdot \mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x} - p^x \cdot \frac{\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3} \cdot \mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x} + \text{etc.} \pm \text{Const.}$$

wo (aus 7)

$$\mathfrak{S}\frac{x^m}{p^x} = \frac{A p^m + A' p^{m-1} + A'' p^{m-2} + A''' p^{m-3} + \ldots + A^{(m-1)} p}{(p-1)^{m+1}}$$

und

$$A^{(\lambda-1)} = \lambda^m - \left[\frac{\lambda+1}{1}\right](\lambda-1)^m + \left[\frac{\lambda+1}{2}\right](\lambda-2)^m - .$$
$$\ldots \mp \left[\frac{\lambda+1}{3}\right] . 2^m \pm \left[\frac{\lambda+1}{2}\right] . 1^n$$

ist, und die Const. dadurch bestimmt werden muß, daß für $x = 0$, auch $s = 0$ werde.

60. Will man die Summe der Reihe $ap + a'p^2 + a''p^3 + a'''p^4 + \ldots . p^x y$ finden, ohne die Kenntniß der unendlichen Summen, die so eben durch $S\frac{x}{p^x}$; $S\frac{x^2}{p^x}$; $S\frac{x^3}{p^x}$; u. s. w. bezeichnet wurden, vorauszusetzen, so setze man jene Summe oder $s = p^{x+1}S$, wo S eine Function von x ist. Ist also $'S$ die ähnliche Function von $x - 1$, so daß $'S$ aus S entsteht, wenn darin $x - 1$ statt x gesetzt wird, so ist $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots . + p^{x-1}y = p^{x\prime}S$, also, diese Summe von der vorigen abgezogen,

$$p^{x+1}S - p^{x\prime}S = p^x y$$

und auf beiden Seiten mit p^x dividirt,

$$pS - {}'S = y$$

wo sich zugleich der Grund der Annahme von $p^{x+1}S$ für die Summe zeigt.

Da $${}'S = S - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{1.2\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}$$

so erhält man aus der vorigen Gleichung diese

$$(p-1)S + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{1.2\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3\partial x^3} - \text{etc.}$$
$$= y \; (\odot)$$

Hieraus ist näherungsweise $S = \frac{y}{p-1}$, und wenn man diesen Werth gebraucht, noch näher

$$S = \frac{y}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$ Es sey also

$$S = \frac{y}{p-1} - \frac{\alpha}{p-1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\beta}{p-1} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{p-1} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\delta}{p-1} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}$$

so wird

$$\begin{array}{lcl}
(p-1)S = y - \alpha\frac{\partial y}{\partial x} + \beta\frac{\partial x^2}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.} & & \\
+\frac{\partial S}{\partial x} & = & +\frac{1}{p-1} - \frac{\alpha}{p-1} + \frac{\beta}{p-1} - \text{etc.} \\
-\frac{\partial^2 S}{1.2\partial x^2} & = & -\frac{1}{1.2(p-1)} + \frac{\alpha}{1.2(p-1)} - \text{etc.} \\
+\frac{\partial^3 S}{1.2.3\partial x^3} & = & +\frac{1}{1.2.3(p-1)} - \text{etc.} \\
-\text{ etc.} & & -\text{etc.} \\
-y & = & -y
\end{array}$$

woraus vermöge (⊙) zur Bestimmung von α, β, γ.. sich folgende Gleichungen ergeben

$$\alpha(p-1) - 1 = 0$$

$$\beta(p-1) - \alpha - \frac{1}{1.2} = 0$$

$$\gamma(p-1) - \beta - \frac{\alpha}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} = 0$$

$$\delta(p-1) - \gamma - \frac{\beta}{1.2} - \frac{\alpha}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} = 0$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen wird

Euler hat die Formeln für die Coefficienten α, β, γ, δ, u. s. w. Institt. Calc. diff. P. II. c. VII. §. 175., die Coefficienten selbst bis mit zu η, ebendaselbst §. 173.

Hätte man anfangs die Summe der Reihe $'a + ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots + p^x y$, oder $''a.\frac{1}{p} + 'a + ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots + p^x y$, u. s. w. $p^{x+1}S$ gesetzt, so würde man zur Bestimmung von S dieselbe Gleichung wie oben

$$p^{x+1}S - p^{x\prime}S = p^x y$$

oder

$$p'S - \ 'S = y$$

erhalten haben. Es bleibt also, wenn S auf diese Weise bestimmt wird, in der That unbestimmt, wie viel Glieder der Reihe von dem Gliede $p^x y$ an rückwärts genommen zu der Summe gezogen sind, wie auch daraus erhellt, daß wenn man $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots + p^x y = p^{x+1}S \pm \text{Const.}$ angenommen hätte, ebenfalls die Gleichung $p^{x+1}S - p^{x\prime}S = p^x y$ gekommen seyn würde. Daher ist S.$p^x y$ oder

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(y - \alpha.\frac{\partial y}{\partial x} + \beta.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \gamma.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \delta.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}\right) \pm \text{Const.}$$

welcher Ausdruck, wenn hier statt α, β, γ, δ, u. s. w. und in (59) statt $\mathfrak{S}\frac{x}{p^x}$, $\mathfrak{S}\frac{x^2}{p^x}$, $\mathfrak{S}\frac{x^3}{p^x}$, u. s. w. ihre Werthe in p gesetzt werden, mit dem in (59) gefundenen vollkommen übereinstimmt.

61. Ein dritter Weg, die Summe der Reihe $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots + p^x y$ zu finden, ist folgender.

Es ist, wie sich aus (4) leicht ergiebt

$$ap + a'p^2 + a''p^3 + a'''p^4 + \text{etc. in inf.}$$

$$= -\frac{ap}{p-1} + \frac{pp}{(p-1)^2}\Delta a - \frac{p^3}{(p-1)^3}\Delta^2 a + \frac{p^4}{(p-1)^4}\Delta^3 a - \text{etc.}$$

wo die Reihe rechter Hand des Gleichheitszeichens einmal irgendwo abbricht, wenn die Reihe a, a', a'', a''' .... auf verschwindende Differenzen führt, sonst aber ins Unendliche fortläuft.

Auf dieselbe Weise ist

$$yp^x + y'p^{x+1} + y''p^{x+2} + y'''p^{x+3} + \text{etc. in inf.}$$

$$= p^x\left(-\frac{y}{p-1} + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta y - \frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^2 y + \frac{p^3}{(p-1)^4}\Delta^3 y - \text{etc.}\right)$$

Sind nun y, y', y'', y''' ..... die den Stellenzahlen $x, x+1, x+2, x+3, \ldots$ zugehörigen Glieder der Reihe $a, a', a'', a''' \ldots$, so giebt die letzte Summe von der ersten abgezogen die Summe von $ap + a'p^2 + a''p^3 + \ldots + p^{x-1}y$ d. i. $S.p^x y - p^x y$. Daher wird nach Hinzufügung des Gliedes $p^x y$ zu dem Reste $S.p^x y$ oder s

$$= \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y - \frac{pp}{(p-1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{p}{p-1}\left(a - \frac{p}{p-1}\Delta a + \frac{pp}{(p-1)^2}\Delta^2 a - \frac{p^3}{(p-1)^3}\Delta^3 a + \text{etc.}\right)$$

In der Reihe, womit $\frac{p}{p-1}$ multiplicirt ist, führe man $'a$, $\Delta'a$, $\Delta^{2\prime}a$, u. s. w. statt a, Δa, $\Delta^2 a$, u. s. w. ein, indem man $a = 'a + \Delta'a$, $\Delta a = \Delta'a + \Delta^{2\prime}a$, $\Delta^2 a = \Delta^{2\prime}a + \Delta^{3\prime}a$, u. s. w. macht, so verwandelt sich dieselbe in $'a - \frac{1}{p-1}\Delta'a + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^{2\prime}a - \frac{pp}{(p-1)^3}\Delta^{3\prime}a +$ etc., welche mit jener dieselbe Anzahl Glieder hat, und mit der Reihe $y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y -$ etc. womit $\frac{p^{x+1}}{p-1}$ multiplicirt ist, sich vergleichen läßt. Die Vergleichung zeigt, daß jene nichts anders als der Werth dieser für $x = 0$ ist, indem nämlich, so wie $'a$ der Werth von y für $x = 0$ ist, eben so $\Delta'a$, $\Delta^{2\prime}a$, u. s. w., die Werthe von Δy, $\Delta^2 y$ u. s. w., für denselben Werth von x sind. Letzteres erhellt so.

Da

$$'a = y - x.\frac{\partial y}{\partial x} + x^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} - x^3.\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}$$

und

$$a = y - (x-1)\frac{\partial y}{\partial x} + (x-1)^2.\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} - (x-1)^3\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}$$

so wird

$$\Delta'a = a - 'a = \frac{\partial y}{\partial x} - (2x-1)\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} + (3x^2-3x+1)\frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3}$$
$$- (4x^3 - 6x^2 + 4x - 1)\frac{\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x} - x.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2.\frac{\partial^3 y}{1.2.\partial x^3} - x^3.\frac{\partial^4 y}{1.2.3\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + x^2.\frac{\partial^4 y}{1.2\partial x^4} - x^3.\frac{\partial^5 y}{1.2.3\partial x^5} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - x.\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + x^2.\frac{\partial^5 y}{1.2\partial x^5} - x^3.\frac{\partial^6 y}{1.2.3\partial x^6} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

Die erste Reihe dieses Ausdrucks für $\Delta' a$ ist der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x = 0$; die zweyte Reihe der Werth von $\frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2}$ für denselben Werth von x; die dritte der Werth von $\frac{\partial^3 y}{1.2.3}$ für $x = 0$ u. s. w. Also ist $\Delta' a$ der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \text{etc.}$, d. i., von Δy für $x = 0$. Eben so läßt sich zeigen, daß $\Delta^{2\prime} a$, $\Delta^{3\prime} a$, u. s. w. die Werthe von $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, u. s. w. für $x = 0$ sind.

Da also $a - \frac{p}{p-1}\Delta a + \frac{p^2}{(p-1)^2}\Delta^2 a - \text{etc.}$ der Werth von $y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y - \text{etc.}$ für $x = 0$ ist, und dies von dem Factor $\frac{1}{p-1}$ in An-

sezung des Factors $\frac{p^{x+1}}{p-1}$ gleichfalls gilt, so ist das Product $\frac{p}{p-1}\left(a - \frac{p}{p-1}\Delta a + \frac{p^2}{(p-1)^2}\Delta^2 a - \text{etc.}\right)$ der Werth des Products $\frac{p^{x+1}}{p-1}\left(y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y - \text{etc.}\right)$ für $x = 0$, d. i., die dem letzteren beyzufügende Constante, damit für $x = 0$ auch $s = 0$ werde. Man hat also

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y - \frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^3 y + \frac{p^3}{(p-1)^4}\Delta^3 y - \text{etc.}\right) + C.$$

Um diese Formel, deren Glieder ein sehr einfaches Fortschreitungsgesetz befolgen, durch ein Exempel zu erläutern, sey $y = x^3$, so ist $\Delta y = 3xx + 3x + 1$; $\Delta^2 y = 6x + 6$; $\Delta^3 y = 6$; $\Delta^4 y$ und alle folgende Differenzen $= 0$. Daher ist s oder

$$S.x^3 p^x = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(x^3 - \frac{3px^2}{p-1} + \frac{(3p+3)x}{(p-1)^2} - \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3}\right) + C.$$

Die Constans, aus dem Falle $x = 0$ bestimmt, ist $= \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}$. Sie ist der Totalwerth der ins Unendliche fortgesetzten Reihe $1^3.p + 2^3 p^2 + 3^3.p^3 + \text{etc.}$ Man vergleiche 17. 18. und 19.

Führt man in die Formel für s die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ u. s. w. ein, indem man statt $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y,$

u. s. w. ihre durch $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, u. s. w. ausgedruckten Werthe setzt, welche, weil $\Delta x = 1$ ist, sind *)

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{1.2\partial x^2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \frac{\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{2\partial^2 y}{1.2\partial x^2} + \frac{6\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \frac{14\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{6\partial^3 y}{1.2.3\partial x^3} + \frac{36\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{24\partial^4 y}{1.2.3.4\partial x^4} + \text{etc.}$$

etc. etc.

so wird

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(y - \frac{1}{p-1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{p+1}{1.2(p-1)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{p^2+4p+1}{1.2.3(p-1)^3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1.2.3.4(p-1)^4}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}\right) + C.$$

eben so, wie vorhin gefunden ist.

Um die von x unabhängigen Coefficienten zu $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, u. s. w. in dem eingeschlossenen Factor dieses Ausdrucks allgemein zu bestimmen, setze man

$$y - \frac{1}{p-1}.\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}.\Delta^2 y - \frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}$$
$$= y - \alpha'.\frac{\partial y}{\partial x} + \alpha''.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha'''.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

*) S. Eulers Institt. calc. diff. P. II. C. III. §. 56.

$$= 1 + \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{p}{(p-1)^2} \cdot \frac{1.2}{(x+1)(x+2)}$$
$$+ \frac{p^2}{(p-1)^3} \cdot \frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \text{etc.}$$

Man setze hier statt $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$, $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+2)}$, u. s. w. ihre Entwickelungen nach den Potenzen von $\frac{1}{x}$, indem man

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{{}'A}{x^2} + \frac{{}'B}{x^3} - \frac{{}'C}{x^4} + \frac{{}'D}{x^5} - \text{etc.}$$
$$(1)$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{{}'A}{x^3} + \frac{{}'B}{x^4} - \frac{{}'C}{x^5} + \text{etc.}$$
$$(1,\ 2)$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x^3} - \frac{{}'A}{x^4} + \frac{{}'B}{x^5} - \text{etc.}$$
$$(1,\ 2,\ 3)$$

u. s. w. macht, so giebt die Vergleichung der Coefficienten zu den gleichnamigen Potenzen von $\frac{1}{x}$

$$\alpha' = \frac{1}{p-1}$$

$$1.2\alpha'' = \frac{1.2p}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1}\ {}'\underset{(1)}{A}$$

$$1.2.3\alpha''' = \frac{1.2.3p^2}{(p-1)^3} - \frac{1.2p}{(p-1)^2}\ {}'\underset{(1,2)}{A} + \frac{1}{p-1} \cdot {}'\underset{(1)}{B}$$

$$1.2.3.4\alpha^{IV} = \frac{1.2.3.4p^3}{(p-1)^4} - \frac{1.2.3p^2}{(p-1)^3}\ {}'\underset{(1,2,3)}{A} + \frac{1.2p}{(p-1)^2}\ {}'\underset{(1,2)}{B}$$
$$- \frac{1}{p-1} \cdot {}'\underset{(\ )}{C}$$

u. s. w.

.. s. w., wo das Gesetz des Fortgangs offenbar ist. Diese Ausdrücke für die Coefficienten α', α'', α''', u. s. w. sind freylich nicht so bequem, als die in (59) aus (7) mitgetheilten. Die letzteren lassen sich übrigens auch aus der ersten hier gefundenen Formel für s ableiten, wovon jedoch die Ausführung für diesen Artikel zu weitläufig werden würde.

62. Man setze $p = -1$, und bezeichne die Werthe, welche α', α'', α''' u. s. w. für diesen Werth von p erhalten, durch β', β'', β''' u. s. w., so wird, je nachdem x gerade oder ungerade ist,

$$a - a' + a'' - a''' + \ldots \pm y = C \pm \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\beta' \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta'' \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\beta''' \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\beta^{IV} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}\right)$$

Oben in (56) wurde gefunden

$$a - a' + a'' - a''' + \ldots \pm y = C \pm \left(\frac{1}{2}y + \frac{(2^2-1)\mathfrak{B}^{(1)}}{1.\ 2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}^{(2)}}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2.\ldots.6} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - \text{etc.}\right)$$

Weil beide Summenformeln identisch seyn müssen, so folgt zuerst $\beta'' = 0$, $\beta^{IV} = 0$, $\beta^{VI} = 0$ u. s. w., d. i.

$$'\underset{(1)}{A} - \frac{1.2}{2} = 0$$

$$'\underset{(1)}{C} - \frac{1.2}{2}\,'\underset{(1,2)}{B} + \frac{1.2.3}{2^2}\,'\underset{(1,2,3)}{A} - \frac{1.2.3.4}{2^3} = 0$$

$$'\underset{(1)}{E} - \frac{1.2}{2}\,'\underset{(1,2)}{D} + \frac{1.2.3}{2^2}\,'\underset{(1,2,3)}{C} - \frac{1.2..4}{2^3}\,'\underset{(1,2..4)}{B} + \frac{1.2...5}{2^4}\,'\underset{(1,2...5)}{A} - \frac{1.2...6}{2^5} = 0$$

u. s. w.

Ferner ergeben sich auch noch folgende Ausdrücke für die Bernoullischen Zahlen

$$\mathfrak{B}^{(1)} = + \frac{1}{2^2-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathfrak{B}^{(2)} = - \frac{2}{2^4-1} \left\{ \frac{1.2.3}{2^3} - \frac{1.2}{2^2}\, {}'\!\underset{(1,2)}{A} + \frac{1}{2}\, {}'\!\underset{(1)}{B} \right\}$$

$$\mathfrak{B}^{(3)} = + \frac{3}{2^6-1} \left\{ \frac{1.2.3.4.5}{2^6} - \frac{1.2.3.4}{2^4}\, {}'\!\underset{(1,2,3,4)}{A} + \frac{1.2.3}{2^3}\, {}'\!\underset{(1,2,3)}{B} - \frac{1.2}{2^2}\, {}'\!\underset{(1,2)}{C} + \frac{1}{2}\, {}'\!\underset{(1)}{D} \right\}$$

u. s. w.

Will man hiernach einen Ausdruck für die mte Bernoullische Zahl bilden, so führt die Hindenburgische Bezeichnungsart, wo der Classenexponent durch die Stelle des Classenzeichens im Alphabete angezeigt wird, in der Bezeichnung der (2m—2)ten Classe auf Umschweife. Diese werden vermieden, wenn man mit Posselt (Dissertatio de quibusdam functionibus symmetricis. Götting., 1818. §. 3) die mte Classe der Combinationen mit Wiederholungen aus den n ersten Elementen des Index durch $^{m}(0)^{n}$ bezeichnet. Wendet man diese auch in anderer Rücksicht vorzügliche Bezeichnungsart hier an, so wird

$$\mathfrak{B}^{(m)} = \frac{m}{2^{2m}-1} \cdot \left\{ \frac{1.2.3\ldots.2m-1}{2^{2m-1}} - \frac{1.2.3\ldots.2m-2}{2^{2m-2}} \cdot {}^{1}(0)^{2m-2} + \frac{1.2.3\ldots.2m-3}{2^{2m-3}} \cdot {}^{2}(0)^{2m-3} - \frac{1.2.3\ldots.2m-4}{2^{2m-4}} \cdot {}^{3}(0)^{2m-4} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot {}^{2m-2}(0)^{1} \right\} \cdot (-1)^{m-1}$$

(1, 2, 3, ...)

63. Die Summe der unendlichen Reihe mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder

$$p^x y - p^{x+1}y' + p^{x+2}y'' - p^{x+3}y''' + \text{etc.}$$

wo $y = \varphi x$, $y' = \varphi(x+1)$, $y'' = \varphi(x+2)$ u. s. w., ist aus (61), wenn man dort $-p$ statt p setzt,

$$= \frac{p^x}{p+1}\left(y - \frac{p}{p+1}\Delta y + \frac{p^2}{(p+1)^2}\Delta^2 y - \frac{p^3}{(p+1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}\right)$$

Drückt man die eingeklammerte Reihe so aus

$$(p+1)y - p\left(y + \frac{1}{p+1}\Delta y - \frac{p}{(p+1)^2}\Delta^2 y + \frac{p^2}{(p+1)^3}\Delta^3 y - \frac{p^3}{(p+1)^4}\Delta^4 y + \text{etc.}\right)$$

so läßt sich auf die in p multiplicirte Reihe die in (61) gewiesene Umwandlung, nach welcher

$$y - \frac{1}{p-1}\Delta y + \frac{p}{(p-1)^2}\Delta^2 y - \frac{p^2}{(p-1)^3}\Delta^3 y + \text{etc.}$$

$$= y - \frac{1}{p-1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{p+1}{1.2(p-1)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{p^2+4p+1}{1.2.3(p-1)^3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

ist, anwenden, wenn man p negativ setzt, als wodurch

$$y + \frac{1}{p+1}\Delta y - \frac{p}{(p+1)^2}\Delta^2 y + \frac{p^2}{(p+1)^3}\Delta^2 y - \text{etc.}$$

$$= y + \frac{1}{p+1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{p-1}{1.2(p+1)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{p^2-4p+1}{1.2.3(p+1)^3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \text{etc.}$$

also

$$p^x y - p^{x+1}y' + p^{x+2}y'' - p^{x+3}y''' + \text{etc.}$$

$$= \frac{p^x}{p+1}\left(y - \frac{p}{p+1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{p(p-1)}{1.2(p+1)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{p(p^2-4p+1)}{1.2.3(p+1)^3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{p(p^3-11p^2+11p-1)}{1.2.3.4(p+1)^4}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \text{etc.}\right)$$

wird.

Das Gesetz, nach welchem die Coefficienten der eingeschlossenen Reihe aus einander entstehen, ergiebt sich so.

Diese Reihe sey

$$Ay - \frac{B}{p+1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{C}{(p+1)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{D}{(p+1)^3}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

Ferner setze man die Reihe, welche entsteht, wenn man in der in dem Ausdrucke für $S.yp^x$ mit $\frac{p^{x+1}}{p-1}$ multiplicirten Reihe p negativ nimmt,

$$= y + \alpha'.\frac{\partial y}{\partial x} - \beta'.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \gamma'.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \text{etc.}$$

so ist $\alpha' = \frac{1}{p+1}$, $\beta' = \frac{p-1}{1.2(p+1)^2}$, $\gamma = \frac{p^2-4p+1}{1.2.3(p+1)^3}$, u. s. w. also

$$A = 1$$
$$B = p(p+1)\alpha'$$
$$C = p(p+1)^2\beta'$$
$$D = p(p+1)^3\gamma'$$

u. s. w.

Aus (60) aber ist

$$(p+1)\alpha' = 1$$
$$2(p+1)\beta' = (p-1)\alpha'$$
$$3(p+1)\gamma' = (p-1)\beta' - p\alpha'\alpha'$$
$$4(p+1)\delta' = (p-1)\gamma' - p.2\alpha'\beta'$$

u. s. w.

Werden diese Gleichungen nach der Reihe mit p, $p(p+1)$, $p(p+1)^2$, u. s. w. multiplicirt und statt $p(p+1)\alpha'$, $p(p+1)^2\beta'$, $p(p+1)^3\gamma'$, u. s. w. ihre Werthe gesetzt, so erhält man folgende Relationen

$$B = p$$
$$2C = (p-1)B$$
$$3D = (p-1)C - BB$$
$$4E = (p-1)D - 2BC$$
$$5F = (p-1)E - 2BD - CC$$
$$6G = (p-1)F - 2BE - 2CD$$
etc.

Euler giebt die Summenformel und diese Relationen in den Nou. Act. Petrop. T. II; nur steht bey ihm n statt p, und X, X', X'' u. s. w. statt y, y', y'' u. s. w. Seine Ableitung ist eine andere.

64. So wie sich Differentialformeln und Differentialgleichungen durch Reihen integriren lassen, so kann man umgekehrt zu einer vorgegebenen Reihe die Differentialformel oder Differentialgleichung suchen, deren Integration die vorgegebene Reihe giebt. Läßt sich alsdann das Integral noch auf eine andere Weise, und zwar durch einen geschlossenen Ausdruck, darstellen, so erhält man die Summe der vorgegebenen Reihe. In andern Fällen wird zwar nicht die wirkliche Summe, aber doch ein veränderter Ausdruck der Reihe erhalten, der dazu dienen kann, der Summe der Reihe sich leichter und schneller als auf dem gewöhnlichen Wege zu näheren. Leibnitz und Joh. Bernoulli haben diese Summirungsmethode zuerst erdacht (Commerc. epistol. T. I. p. 213.); Euler hat sie nach-

her vervollkommnet. Sie setzt übrigens voraus, daß die Glieder der zu summirenden Reihe in die Potenzen einer unbestimmten x multiplicirt sind. Wofern also dieses nicht der Fall ist, so muß man erst eine Reihe formiren, in welcher die angezeigte Beschaffenheit der Glieder Statt hat, und von der die vorgegebene Reihe ein besonderer Fall ist, d. h., aus ihr hervorgeht, wenn dem x ein bestimmter Werth, wofür man am einfachsten und bequemsten 1 nimmt, beygelegt wird, und diese Reihe nun zu summiren suchen. Die Exponenten von x in der zu formirenden Reihe hat man so zu wählen, daß dadurch die Hauptabsicht der ganzen Operation, welche ist, durch ein- oder mehrmaliges Differentiiren, der angenommenen Reihe mit anderen Umwandlungsmitteln nach Befinden verbunden, entweder zu einer für sich summirbaren Reihe, von welcher alsdann der Rückweg zu der vorgegebenen durch Integration genommen wird, oder wieder zu der ursprünglichen Reihe selbst zu gelangen, in welchem letzteren Falle die Summirung dann auf die Integration einer Differentialgleichung gebracht wird. Beyspiele werden diese allgemeinen Bemerkungen am besten erläutern.

65. Es sey die Reihe $\frac{1}{pq} + \frac{1}{(p+r)(q+r)} + \frac{1}{(p+2r)(q+2r)} +$ etc. in inf. zu summiren.

Zu dem Ende nehme man die Reihe $\frac{x^q}{pq} + \frac{x^{q+r}}{(p+r)(q+r)} + \frac{x^{q+2r}}{(p+2r)(q+2r)} +$ etc. in inf., aus welcher die vorgegebene wird, wenn $x = 1$ ist, und setze die Summe derselben s. Durch Differentiirung entsteht nun

$$\frac{x^{q-1}}{p} + \frac{x^{q+r-1}}{p+r} + \frac{x^{q+2r-1}}{p+2r} + \text{etc.} = \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Man multiplicire beiderseits mit x^{p-q+1}, und nehme aufs neue wieder die Differentiale, so wird
$\partial x(x^{p-1} + x^{p+r-1} + x^{p+2r-1} + \text{etc.}) =$

$$\partial.\left(x^{p-p+1}.\frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

d. i.

$$\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r} = \partial.\left(x^{p-q+1}.\frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

folglich, wenn man integrirt,

$$x^{p-q+1}.\frac{\partial s}{\partial x} = \int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}$$

wo, weil die Größe linker Hand für $x=0$ verschwindet, auch das Integral rechter Hand für $x=0$ verschwinden muß. Man hat nun ferner

$$\partial s = x^{q-p-1}\partial x\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}$$

also

$$s = \int x^{q-p-1}\partial x\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}.$$

Es ist durch theilweise Integration

$$\int x^{q-p-1}\partial x\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r} = \frac{x^{q-p}}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}$$
$$-\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}.$$

Da $\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}$ schon für $x=0$ verschwindet, so muß auch $\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}$ für $x=0$ verschwinden, damit für $x=0$, auch $s=0$ werde.

Wird $x=1$ gesetzt, so entsteht

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+r)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2r)}+\text{etc. in inf.}$$

$$=\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}-\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}$$

$$=\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}$$

wo die Integrale von $x=0$ bis $x=1$ zu erstrecken sind.

Ist $p=q$, so setze man $q=p+\omega$, wo ω unendlich klein ist, so wird

$$\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}=\frac{1}{\omega}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{\omega})}{1-x^r}$$

$$=\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}\log\frac{1}{x}$$

weil $\frac{1-x^{\omega}}{\omega}=-\log x=\log\frac{1}{x}$ ist.

Demnach hat man

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+r)^2}+\frac{1}{(p+2r)^2}+\text{etc. in inf.}$$

$$=\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}\log\frac{1}{x}$$

das Integral von $x=0$ bis $x=1$ genommen.

65[b]. Nimmt man in der Reihe $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+r)^2}+\frac{1}{(p+2r)^2}+$ etc. $p=r=1$, so wird nach der letzten Formel $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+$ etc. in inf. $=\int\frac{\partial x}{1-x}\log\frac{1}{x}$ das Integral innerhalb der angegebenen Gränzen genommen. Man wird dieses nicht

gebrauchen, um die Summe der Reihe $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$ $+\frac{1}{16}+$ etc., welche anderswoher bekannt, und $=\frac{1}{6}\pi^2$ ist, zu finden; sondern vielmehr durch die bekannte Summe der Reihe den Werth des bestimmten Integrals angeben. Es ist also von $x=0$, bis $x=1$

$$\int\frac{\partial x}{1-x}\log\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\pi^2.$$

Setzt man $p=1$, $r=2$, so ist innerhalb derselben Gränzen

$$\int\frac{\partial x}{1-x^2}\log\frac{1}{x}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{8}\pi^2$$

Hieraus folgt, da überhaupt, wenn die Integrale für $x=0$ verschwinden,

$$\int\frac{\partial x}{1+x}\log\frac{1}{x}=2\int\frac{\partial x}{1-x^2}\log\frac{1}{x}-\int\frac{\partial x}{1-x}\log\frac{1}{x}$$

von $x=0$ bis $x=1$

$$\int\frac{\partial x}{1+x}\log\frac{1}{x}=\frac{1}{12}\pi^2.$$

Setzt man aber $p=2$, $r=2$, so wird auf ähnliche Art

$$\int\frac{x\partial x}{1-x^2}\log\frac{1}{x}=\frac{1}{24}\pi^2.$$

66. Verlangt man von der eben summirten unendlichen Reihe bloß die Summe der n ersten Glieder, so suche man die unendliche Summe von dem $n+1$ten

Gliede an, d. i., die Summe von $\frac{1}{(p+nr)(q+nr)}$ $+\frac{1}{(p+(n+1)r)(q+(n+1)r)}+$ etc. und ziehe solche von der vorigen Summe ab, so bleibt die gesuchte. Die abzuziehende Summe findet sich aus der vorigen, wenn $p+nr$, $q+nr$ beziehungsweise statt p, q gesetzt werden. Daher ist;

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+r)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2r)}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{(p+(n-1)r)(q+(n-1)r)}=\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}$$

$$-\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p+nr-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}$$

$$=\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})(1-x^{nr})}{1-x^r}$$

sämmtliche Integrale von $x=0$ bis $x=1$ genommen.

67. Exempel. Es sey $p=2$, $q=6$, $r=2$, so wird

$$\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}=\frac{1}{4}\int\frac{x\partial x(1-x^4)}{1-x^2}$$

$$=\frac{1}{4}\int x\partial x(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4\right)$$

welches für $x=0$ verschwindet. Macht man nun $x=1$, so wird

$$\frac{1}{2.6}+\frac{1}{4.8}+\frac{1}{6.10}+\text{ etc, in inf. }=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}.$$

Ferner wird

$$\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})(1-x^{nr})}{1-x^r}$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{x\partial x(1-x^4)(1-x^{2n})}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{4}\int x\partial x(1+x^2)(1-x^{2n})$$

$$= \frac{1}{4}(\int x\partial x + \int x^3\partial x - \int x^{2n+1}\partial x - \int x^{2n+3}\partial x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+4}}{2n+4}\right)$$

welches für $x = 0$, schon 0 wird. Setzt man nun $x = 1$, so ist

$$\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.8} + \frac{1}{6.10} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+4)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)$$

So oft als $q-p$, wie in diesem Beyspiel, ein Vielfaches von r oder $=r$ ist, läßt sich sowohl die endliche als die unendliche Summe der Reihe $\frac{1}{pq} + \frac{1}{(p+r)(q+r)} + \frac{1}{(p+2r)(q+2r)} +$ etc. algebraisch angeben.

68. Da $\frac{1}{(p+zr)(q+zr)} = \frac{1}{q-p}\cdot\frac{1}{p+zr} - \frac{1}{q-p}\cdot\frac{1}{q+zr}$, wie sich nach dem in dem Art., Function, 20., u. s. w. gelehrten Verfahren ergiebt, so ist die Reihe $\frac{1}{pq} + \frac{1}{(p+r)(q+r)} + \frac{1}{(p+2r)(q+2r)}$ + etc. der Unterschied zweyer Reihen, wovon die erste

$$\frac{1}{q-p}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+r}+\frac{1}{p+2r}+\text{etc.}\right\},$$ die andere aber

$$\frac{1}{q-p}\left\{\frac{1}{q}+\frac{1}{q+r}+\frac{1}{q+2r}+\text{etc.}\right\}$$ ist.

Die Summe der ersten ins Unendliche fortgesetzten Reihe nach der eben erklärten Methode gesucht ist $\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}$, die ähnliche Summe der anderen $\frac{1}{q-p}\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}$, beide Integrale von $x=0$ bis $x=1$ erstreckt. Daher ist

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+r)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2r)}+\text{etc. in inf.}$$

$$=\frac{1}{q-p}\left\{\int\frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^r}-\int\frac{x^{q-1}\partial x}{1-x^r}\right\}$$

$$=\frac{1}{q-p}.\int\frac{x^{p-1}\partial x(1-x^{q-p})}{1-x^r}\left[\begin{matrix}x=0\\x=1\end{matrix}\right]$$

wo die Gränzen der Integrale in Klammern beygefügt sind. Die so erhaltene Summe ist mit der vorigen einerley. Die endliche Summe wird entweder wie vorhin oder aus den endlichen Summen der Partialreihen gefunden.

69. Es ist leicht, die vorgegebene Reihe so umzuformen, daß der Unterschied in der Reihe der Exponenten von $x=1$ wird. Zu dem Ende setze man $p=\lambda r$, $q=\mu r$, so wird

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{(p+r)(q+r)}+\frac{1}{(p+2r)(q+2r)}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{rr}\left\{\frac{1}{\lambda\mu}+\frac{1}{(\lambda+1)(\mu+1)}+\frac{1}{(\lambda+2)(\mu+2)}+\text{etc.}\right\}$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe findet sich nach der hier gelehrten Art $= \frac{1}{\mu-\lambda} \int \frac{x^{\lambda-1} \partial x (1-x^{\mu-\lambda})}{1-x} \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$, und dadurch

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{(p+r)(q+r)} + \frac{1}{(p+2r)(q+2r)} + \text{etc. in inf.}$$

$$= \frac{1}{r(q-p)} \cdot \int \frac{x^{\frac{p}{r}-1} \partial x \left(1 - x^{\frac{q-p}{r}}\right)}{1-x} \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$$

70. Eine solche Umbildung der vorgegebenen Reihe, wie jetzt ausgeführt worden, ist alsdann nothwendig, wenn in den arithmetischen Reihen, deren gleichstellige Glieder die Factoren der Nenner in der vorgegebenen Reihe sind, die Differenz nicht dieselbe ist.

Es sey z. E. zu summiren die Reihe

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{(p+r)(q+t)} + \frac{1}{(p+2r)(q+2t)} + \text{etc.}$$

Setzt man hier $p=\lambda r$, $q=\mu t$, so erhält man statt der vorgegebenen Reihe diese zu summiren

$$\frac{1}{rt}\left\{\frac{1}{\lambda\mu} + \frac{1}{(\lambda+1)(\mu+1)} + \frac{1}{(\lambda+2)(\mu+2)} + \text{etc.}\right\}$$

deren Summe

$$= \frac{1}{rt(\mu-\lambda)} \int \frac{x^{\lambda-1} \partial x (1-x^{\mu-\lambda})}{1-x}$$

$$= \frac{1}{qr-pt} \int \frac{x^{\frac{p}{r}-1} \partial x \left(1 - x^{\frac{q}{t}-\frac{p}{r}}\right)}{1-x}$$

die Integrale von $x=0$ bis $x=1$ genommen, ist.

Ist $\frac{q}{t} - \frac{p}{r}$ eine ganze, positive oder negative Zahl, so läßt sich die Summe algebraisch angeben. In diesem

Falle ist nämlich $1 - x$ ein Theiler von $1 - x^{\frac{q}{t} - \frac{p}{r}}$ oder von $1 - x^{\frac{p}{r} - \frac{q}{t}}$. Es ist aber $1 - x^{\frac{q}{t} - \frac{p}{r}} = - x^{\frac{q}{t} - \frac{p}{r}}\left(1 - x^{\frac{p}{r} - \frac{q}{t}}\right)$.

71. Exempel. $p = 3$, $q = 5$, $r = 2$, $t = 3$. Hier wird

$$\frac{1}{qr - pt}\int \frac{x^{\frac{p}{r} - 1}\partial x\left(1 - x^{\frac{q}{t} - \frac{p}{r}}\right)}{1 - x} =$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x(1 - x^{\frac{1}{6}})}{1 - x} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1 - x} - \int \frac{x^{\frac{2}{3}}\partial x}{1 - x}.$$

Es ist

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1 - x} = - 2x^{\frac{1}{2}} + \log \frac{1 + x^{\frac{1}{2}}}{1 - x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}}\partial x}{1 - x} = - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \log(1 - x^{\frac{1}{3}})$$

$$+ \frac{1}{2}\log(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})$$

$$- (\surd 3).\ \text{Arc. tang} \frac{x^{\frac{1}{3}}\surd 3}{2 + x^{\frac{1}{3}}}$$

Hieraus wird, weil

$$\log(1 - x^{\frac{1}{3}}) - \log(1 - x^{\frac{1}{2}}) = \log \frac{1 - x^{\frac{2}{6}}}{1 - x^{\frac{3}{6}}} = \log \frac{1 + x^{\frac{1}{6}}}{1 + x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1 - x} - \int \frac{x^{\frac{2}{3}}\partial x}{1 - x} = - 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

$$+ \log \frac{(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x^{\frac{1}{6}})}{(1 + x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}})\surd(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}$$

$$+ 3^{\frac{1}{2}}.\ \text{Arc. tang} \frac{x^{\frac{1}{3}}\surd 3}{2 + x^{\frac{1}{3}}}.$$

welcher Ausdruck für $x=0$ schon verschwindet, also keiner Constante bedarf. Macht man nun $x=1$, so wird

$$\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{7.11}+\frac{1}{9.14}+ \text{etc. in inf.}$$

$$=-\frac{1}{2}+\log\frac{4}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\pi\sqrt{3}.$$

Lorgna, aus dessen Specimen de seriebus convergentibus, §. XIX. Exemp. IV. die Reihe genommen ist, giebt ihre Summe $=\frac{1}{3}\pi+\log\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}$, also in Decimaltheilen $=0{,}6910385\ldots$ an, welches irrig ist, da die Summe der Reihe offenbar kleiner als die Summe von $\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+$ etc. in inf., d. i., $<\frac{1}{6}$ ist. Lorgna begeht aber auch den Fehler, $\log(1-x^{\frac{1}{3}})$ gegen $-\log(1-x^{\frac{1}{3}})$ für $x=1$ sich aufheben zu lassen, und rechnet den Bogen tang$\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2+x^{\frac{1}{3}}}$ doppelt, statt ihn einfach zu nehmen. Daß der hier gegebene Ausdruck für die Summe richtig sey, davon überzeugt man sich leicht, wenn man nach der in dem Art., Summirbare Reihe, 22. gezeigten Art Gränzen für die Summe der vorgegebenen Reihe $\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{7.11}+$ etc. sucht, indem man sie mit der Reihe $\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+$ etc. vergleicht, deren Summe, wie vorhin angegeben ist, $\frac{1}{6}$ beträgt. Die Summe der 10 ersten Glieder jener nämlich ist

= 0,1302480; bey dieser ist die Summe der 10 ersten Glieder = 0,1449276; daher die Ergänzung zu dem Totalwerthe = 0,0217391. Da nun die Ergänzung der ersten Reihe weniger als $\frac{5}{7}$, und mehr als $\frac{2}{3}$ der Ergänzung der zweyten beträgt, so ist der Totalwerth der ersten Reihe > 0,1447407 und < 0,1457759. Nach dem gefundenen Ausdrucke wird derselbe = 0,1452656...

72. Das von 65. bis hierher angewandte Summirungsverfahren ist einer Abkürzung fähig. Anstatt daß man nämlich von einer vorgegebenen Reihe ausgehend durch Differentiation zu einer summirbaren Reihe zu gelangen sucht, von welcher alsdann der Rückweg zu der zu summirenden Reihe durch die entgegengesetzte Operation des Integrirens genommen wird, kann man sogleich von einer angenommenen summirbaren Reihe ausgehen. Damit man aber von ihr durch Integration oder Differentiation oder beides zugleich zu der vorgegebenen Reihe kommen könne, muß die angenommene Reihe, von der man ausgeht, einem Theile der Form nach schon in der zu summirenden Reihe enthalten seyn. Es müssen daher die Coefficienten derselben in den Coefficienten der vorgegebenen Reihe als Factoren vorkommen. Ferner muß die Reihe der Exponenten von x in der angenommenen Reihe, wofern sie nicht schon anderweitig bestimmt ist, so beschaffen seyn, daß durch die nach einer vorläufigen Multiplication mit einer Potenz von x angebrachten Operationen des Integrirens und Differentiirens die übrigen Factoren der Coefficienten der zu summirenden Reihe nach und nach als Factoren den Coefficienten der angenommenen Reihe zugesellt werden mögen.

Beyspiele werden auch hier die beste Erläuterung des gesagten geben.

73. Es sey die Reihe

$$\frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.4.6} + \text{etc. in inf.}$$

zu summiren.

Eine Reihe von bekannter Summe, deren Coefficienten in den Coefficienten der vorgegebenen schon enthalten sind, und in welcher der Unterschied in der Reihe der Exponenten von x so groß ist als in den drey arithmetischen Reihen, aus denen die Factoren der Nenner der vorgegebenen Reihe genommen werden, ist

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.} = \log\frac{1}{1-x} \quad (\mathfrak{y})$$

Da jeder zweyte Factor in den Nennern der vorgegebenen Reihe um 1 größer ist, als jeder erste, so multiplicire man in ($\mathfrak{y}$) auf beiden Seiten mit ∂x, so wird durch Integration

$$\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \text{etc.} = \int \partial x \log\frac{1}{1-x} \quad (\mathfrak{h})$$

wo das Integral rechter Hand für $x = 0$ verschwinden muß. — Weil ferner die dritten Factoren der Nenner der zu summirenden Reihe um 2 größer sind als die zweyten, so multiplicire man in ($\mathfrak{h}$) noch auf beiden Seiten mit $x\partial x$, so entsteht durch Integration

$$\frac{x^4}{1.2.4} + \frac{x^5}{2.3.5} + \frac{x^6}{3.4.6} + \text{etc.} = \int x\partial x \int \partial x \log\frac{1}{1-x}$$

das Integral so genommen, daß es für $x = 0$ verschwindet.

Macht man jetzt $x = 1$, so wird

$$\frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.4.6} + \text{etc. in inf.}$$

$$= \int x\partial x \int \partial x \log\frac{1}{1-x}\begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

wo die Integration noch auszuführen ist, welche weiter keine Schwierigkeiten hat.

Die Summe der ersten n Glieder der vorgegebenen Reihe zu haben, geht man von der Reihe

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n}=\int\frac{\partial x(1-x^n)}{1-x}$$

aus, und verfährt übrigens wie vorhin.

74. Die zu summirende Reihe sey

$$\frac{a}{mnp}+\frac{a+b}{(m+q)(n+r)(p+t)}+\frac{a+2b}{(m+2q)(n+2r)(p+2t)}$$
$$+ \text{ etc.}$$

Man setze $\frac{a}{b}=\alpha$, $\frac{m}{q}=\lambda$, $\frac{n}{r}=\mu$, $\frac{p}{t}=\nu$

so wird die Reihe so ausgedruckt

$$\frac{b}{qrt}\left(\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu}+\frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}\right.$$
$$\left.+ \text{ etc.}\right)$$

Die eingeklammerte Reihe zu summiren, ist

$$\frac{x^\lambda}{\lambda}+\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}+\frac{x^{\lambda+2}}{\lambda+2}+\text{ etc.}=\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x},$$

das Integral rechter Hand so genommen, daß es $=0$ wird für $x=0$.

Multiplicirt man hier auf beiden Seiten mit $x^{\mu-\lambda-1}\partial x$ und integrirt, so wird

$$\frac{x^\mu}{\lambda\mu}+\frac{x^{\mu+1}}{(\lambda+1)(\mu+1)}+\frac{x^{\mu+2}}{(\lambda+2)(\mu+2)}+\text{ etc.}$$
$$=\int x^{\mu-\lambda-1}\partial x\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}$$

wo das Integral rechts für $x=0$ verschwinden muß.

Wird hier aufs neue beiderseits mit $x^{\nu-\mu-1}\partial x$ multiplicirt, und integrirt, so entsteht

$$\frac{x^{\nu}}{\lambda\mu\nu}+\frac{x^{\nu+1}}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{x^{\nu+2}}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}+\text{etc.}$$

$$=\int x^{\nu-\mu-1}\partial x\int x^{\mu-\lambda-1}\partial x\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}\;(4)$$

wo das Integral rechter Hand gleichfalls für $x=0$ Null werden muß.

Um endlich noch die Factoren α, $\alpha+1$, $\alpha+2$ u. s. w. in die Zähler der letzten Reihe zu bringen, multiplicire man in (4) auf beiden Seiten mit $x^{\alpha-\nu}$, nehme die Differentiale, und dividire alles durch ∂x. Dadurch wird

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\lambda\mu\nu}+\frac{(\alpha+1)x^{\alpha}}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{(\alpha+2)x^{\alpha+1}}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}+\text{etc.}$$

$$=(\alpha-\nu)x^{\alpha-\nu-1}\int x^{\nu-\mu-1}\partial x\int x^{\mu-\lambda-1}\partial x\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}$$

$$+x^{\alpha-\mu-1}\int x^{\mu-\lambda-1}\partial x\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}$$

Integrirt man theilweise und reducirt gehörig, so wird

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\lambda\mu\nu}+\frac{(\alpha+1)x^{\alpha}}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{(\alpha+2)x^{\alpha+1}}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}+\text{etc.}$$

$$=\frac{(\alpha-\lambda)x^{\alpha-\lambda-1}}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x}+\frac{(\alpha-\mu)x^{\alpha-\mu-1}}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)}\int\frac{x^{\mu-1}\partial x}{1-x}$$

$$+\frac{(\alpha-\nu)x^{\alpha-\nu-1}}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x}{1-x}$$

sämmtliche Integrale so genommen, daß sie für $x=0$ verschwinden.

Setzt man jetzt $x=1$, so wird erhalten

$$\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu}+\frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}+\frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}+\text{etc.}$$

$$= \frac{\alpha-\lambda}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{1-x} + \frac{\alpha-\mu}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)}\int\frac{x^{\mu-1}\partial x}{1-x}$$

$$+ \frac{\alpha-\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x}{1-x}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

Da $\frac{\alpha-\mu}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)} = \frac{\alpha-\lambda}{(\lambda-\mu)(\nu-\lambda)} + \frac{\alpha-\nu}{(\nu-\lambda)(\mu-\nu)}$

so erhält man auch für die vorige Summe folgende drey zweygliedrige Ausdrücke, in welchen alle Integrale von $x=0$ bis $x=1$ zu nehmen sind.

$$\frac{\alpha-\lambda}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x(1-x^{\mu-\lambda})}{1-x}$$

$$+ \frac{\alpha-\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x(1-x^{\mu-\nu})}{1-x}$$

$$\frac{\alpha-\mu}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)}\int\frac{x^{\mu-1}\partial x(1-x^{\lambda-\mu})}{1-x}$$

$$+ \frac{\alpha-\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x(1-x^{\lambda-\nu})}{1-x}$$

$$\frac{\alpha-\lambda}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x(1-x^{\nu-\lambda})}{1-x}$$

$$+ \frac{\alpha-\mu}{(\lambda-\mu)(\nu-\mu)}\int\frac{x^{\mu-1}\partial x(1-x^{\nu-\mu})}{1-x}$$

Diese Ausdrücke, von denen der zweyte aus dem ersten durch gegenseitige Vertauschung von λ und μ, der dritte aus dem ersten durch Vertauschung von μ und ν gegen einander entsteht, zeigen, daß die Summe der Reihe $\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu} + \frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} +$ etc. mithin auch die der vorgegebenen $\frac{a}{mnp} + \frac{a+b}{(m+q)(n+r)(p+t)}$ + etc. algebraisch ist, wenn $\mu-\lambda$ und $\mu-$

der $\frac{n}{r} - \frac{m}{q}$ und $\frac{n}{r} - \frac{p}{t}$ ganze Zahlen, sie mögen po-
tiv oder negativ seyn, sind, wodurch auch $\nu - \lambda$ eine
lche Zahl wird. Übrigens wählt man in einem vor-
ommenden Falle von den obigen drey Ausdrücken jedes-
al den, welcher die leichteste Rechnung gewährt.

75. Exempel. $a = 1$, $b = 3$, $m = 1$, $n = 4$,
$= 7$, $q = 1$, $r = 2$, $t = 2$, also $\alpha = \frac{1}{3}$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$,
$= \frac{7}{2}$. Hier wird nach der ersten Formel

$$\frac{1}{.4.7} + \frac{4}{2.6.9} + \frac{7}{3.8.11} + \text{etc.} =$$

$$\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{15}\int\partial x + \frac{38}{45}\int\frac{x\partial x(1-x^{\frac{1}{2}})}{1-x}\right)\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5}\int\partial x + \frac{19}{30}\int\frac{x\partial x(1-x^{\frac{1}{2}})}{1-x}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{499}{450} - \frac{19}{15}\log 2.$$

Lorgna giebt in der vorhin (70) angezogenen
Schrift, S. 75., die Summe durch einen Rechnungs-
ehler wieder unrichtig, nämlich $= \frac{22}{45} - \frac{2}{3}\log 2 =$
$0{,}02679076\ldots$, also kleiner als das erste Glied $\frac{1}{28} =$
$0{,}035714\ldots$, an. Übrigens hat er nach einer For-
mel gerechnet, welche mit der dritten der zuletzt gege-
benen übereinkommt.

76. Um die Summe der Reihe mit abwech-
selnden Vorzeichen der Glieder

$$\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu} - \frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} + \frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}$$

— etc. und dadurch auch dieser

$$\frac{a}{mnp} - \frac{a+b}{(m+q)(n+r)(p+t)} + \frac{a+2b}{(m+2q)(n+2r)(p+2t)} - \text{etc.}$$

zu haben, hat man nur nöthig in den Nennern der Integrale in (73) $1+x$ statt $1-x$ zu setzen, alles übrige aber ungeändert zu lassen. Sind alsdann $\mu-\lambda$ und $\mu-\nu$, mithin auch $\nu-\lambda$, positive oder negative gerade Zahlen, so wird die Summe algebraisch.

Exempel. $a=2$, $b=1$, $m=1$, $n=3$, $p=5$, $q=1$, $r=1$, $t=1$. Hier ist $\alpha=2=a$, $\lambda=1=m$, $\mu=3=n$, $\nu=5=p$, und es wird nach der ersten Formel

$$\frac{2}{1.3.5} - \frac{3}{2.4.6} + \frac{4}{3.5.7} - \frac{5}{4.6.8} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{8}\int\frac{\partial x(1-x^2)}{1+x} - \frac{3}{8}\int\frac{x^4\partial x(1-x^{-2})}{1+x}$$

$$= \frac{1}{8}\int\partial x(1-x) + \frac{3}{8}\int x^2\partial x(1-x)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

wenn man die Integrale, wie erfordert wird, von $x=0$ bis $x=1$ erstreckt.

77. Die Summe der l ersten Glieder der Reihe

$$\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu} + \frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} + \frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}$$

+ etc. findet sich nach Anleitung von (65)

$$= \frac{\alpha-\lambda}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x(1-x^l)(1-x^{\mu-\lambda})}{1-x}$$

$$+ \frac{\alpha-\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\int\frac{x^{\nu-1}\partial x(1-x^l)(1-x^{\mu-\nu})}{1-x}$$

wo die Integrale innerhalb der oft genannten Gränzen zu nehmen sind, und wo man auch λ und μ oder μ und ν gegenseitig vertauschen kann.

Schreibt man hier in den Nennern der Integrale $1+x$ statt $1-x$, so erhält man die Summe der l ersten Glieder der Reihe

$$\frac{\alpha}{\lambda\mu\nu} - \frac{\alpha+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} + \frac{\alpha+2}{(\lambda+2)(\mu+2)(\nu+2)}$$

— etc., wofern l gerade ist. Ist es ungerade, so kommt in den Zählern der Integrale noch $1+x^l$ statt $1-x^l$. Die Bedingungen, unter denen die Summe algebraisch wird, sind dieselben wie in (74) und (76).

Hiernach wird die Summe der l ersten Glieder der Reihe $\frac{2}{1.3.5} - \frac{3}{2.4.6} + \frac{4}{3.5.7} -$ etc.

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4} \mp \frac{1}{l+1} \pm \frac{1}{l+2} \mp \frac{3}{l+3} \pm \frac{3}{l+4}\right)$$

die oberen Vorzeichen für ein gerades l, die unteren für ein ungerades genommen. Lorgna hat nur den Fall, wo l gerade ist. Auch steht bey ihm wieder fehlerhaft $\frac{2}{2z+2}$ statt $\frac{1}{2z+2}$, indem nämlich $l=2z$ ist.

78. Die Glieder der zu summirenden Reihe können auch in die Glieder einer geometrischen Reihe multiplicirt seyn, ohne daß das Verfahren sich ändert.

Es sey z. B. zu summiren die Reihe

$$\frac{2}{1.3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{3.5}\cdot\frac{1}{9} + \frac{4}{5.7}\cdot\frac{1}{27} + \frac{5}{7.9}\cdot\frac{1}{81} + \text{etc. in inf.}$$

Da

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3^2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3^3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3^4} + \text{etc.} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{3}x}$$

so wird, wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{1}{2}\partial x$ multiplicirt, und integrirt

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3^3}+\text{etc.}=\frac{1}{6}\cdot\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$$

das Integral rechter Hand so genommen, daß es für $x=0$ verschwindet.

Multiplicirt man hier aufs neue mit $\frac{1}{2}\partial x$ und integrirt, so wird

$$\frac{1}{1.3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{1}{3.5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3^2}+\frac{1}{5.7}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{3^3}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{12}\int\partial x\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$$

wo das Integral rechts gleichfalls für $x=0$ verschwinden muß.

Um noch die Factoren 2, 3, 4, u. s. w., welche die Zähler der vorgegebenen Reihe bilden, in die Zähler der Glieder der letzten Reihe zu bringen, multiplicire man beiderseits mit $x^{\frac{1}{2}}$, nehme die Differentiale und dividire alles mit ∂x. Dadurch wird erhalten

$$\frac{2}{1.3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{3}{3.5}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{4}{5.7}\left(\frac{x}{3}\right)^3+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{24}x^{-\frac{1}{2}}\int\partial x\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}+\frac{1}{12}x^{\frac{1}{2}}\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$$

Es ist durch theilweise Integration

$$\int\partial x\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}=x\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}-\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$$

wo, wie man leicht sieht, auch $\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}$ für $x=0$ verschwinden muß. Hierdurch entsteht

$$\frac{2}{1.3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{3}{3.5}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{4}{5.7}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^3+\text{etc. in inf.}$$

$$=\frac{1}{8}x^{\frac{1}{2}}\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x}-\frac{1}{24}x^{-\frac{1}{2}}\int\frac{x^{\frac{1}{2}}\partial x}{1-\frac{1}{3}x},$$

und, wenn man $x=1$ macht,

$$\frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5\cdot 7}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{5}{7\cdot 9}\cdot\frac{1}{3^4}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-\frac{1}{3}x)}{1-\frac{1}{3}x}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}.$$

Die Summe der ersten n Glieder der vorgegebenen Reihe zu finden, geht man von der Reihe

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{3}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3^2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3^3}+\ldots+\frac{x^{n-\frac{3}{2}}}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}(1-(\frac{1}{3}x)^n)}{1-\frac{1}{3}x}$$

aus, und verfährt übrigens wie vorhin.

79. Das erklärte Summirungsverfahren läßt sich auch bey Reihen, deren Glieder transcendente Größen sind, anbringen.

Es sey z. E. die Reihe

$$m\sin\varphi-\frac{1}{2}m^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}m^3\sin 3\varphi-\text{etc.}$$

zu summiren. Wenn man hier statt $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\sin 3\varphi$, u. s. w. ihre Werthe in Exponentialausdrücken, und $e^{\varphi\sqrt{-1}}=x$ setzt, so wird die Reihe,

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\begin{matrix}mx-\frac{1}{2}m^2x^2+\frac{1}{3}m^3x^3-\frac{1}{4}m^4x^4+\text{etc.}\\-(mx^{-1}-\frac{1}{2}m^2x^{-2}+\frac{1}{3}m^3x^{-3}-\frac{1}{4}m^4x^{-4}+\text{etc.})\end{matrix}\right\}$$

Die Summe der ersten eingeklammerten Reihe ist, wie man leicht bemerkt, $\log(1+mx)$. Gesetzt aber, dieses wäre nicht bekannt, so läßt es sich so finden.

Da

$$m-m^2x+m^3x^2-m^4x^3+\text{etc.}=\frac{m}{1+mx}$$

so wird, wenn man auf beiden Seiten mit ∂x multiplicirt, und integrirt

$$mx - \frac{1}{2}m^2x^2 + \frac{1}{3}m^3x^3 - \text{etc.} = \int\frac{m\partial x}{1+mx}$$
$$= \log(1+mx)$$

ohne Constans, damit $\int\frac{m\partial x}{1+mx}$ für $x=0$, auch $=0$ werde.

Hieraus folgt, wenn man x in x^{-1} verwandelt, die Summe der zweyten eingeklammerten und subtractiven Reihe $= \log(1+mx^{-1})$; mithin ist die Summe der vorgegebenen Reihe $=$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}.\log\frac{1+mx}{1+mx^{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+me^{\varphi\sqrt{-1}}}{1+me^{-\varphi\sqrt{-1}}}$$

und wenn statt $e^{\varphi\sqrt{-1}}$, $e^{-\varphi\sqrt{-1}}$ ihre Werthe gesetzt werden, $= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+m\cos\varphi+m\sin\varphi\sqrt{-1}}{1+m\cos\varphi-m\sin\varphi\sqrt{-1}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\frac{m\sin\varphi}{1+m\cos\varphi}.\sqrt{-1}}{1-\frac{m\sin\varphi}{1+m\cos\varphi}.\sqrt{-1}} =$$

Arc. tang $\frac{m\sin\varphi}{1+m\cos\varphi}$, weil $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\tan z\sqrt{-1}}{1-\tan z\sqrt{-1}}$ $= z$.

80. Die eben erhaltene Summation soll uns dienen die Summe folgender Reihe

$$\text{Arc. tang}\frac{a}{1+b} + \text{Arc. tang}\frac{a}{4+b} + \text{Arc. tang}\frac{a}{9+b}$$

+ etc. in inf., deren allgemeines Glied

Arc. tang $\frac{a}{xx+b}$ ist, zu finden.

Da nämlich $\frac{a}{xx+b} = \frac{a:xx}{1+b:xx}$, so wird, wenn

man $\frac{a}{b} = \text{tang}\psi$, und $\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{xx} = m$ setzt, und zur Abkürzung $\sqrt{(aa+bb)} = c$ macht, $\frac{a}{xx+b} = \frac{m\sin\psi}{1+m\cos\psi}$, und

$$\text{Arc. tang}\frac{a}{xx+b} = \frac{c}{xx}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{x^4}\sin 2\psi$$
$$+ \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{x^6}\sin 3\psi - \frac{1}{4}\cdot\frac{c^4}{x^8}\sin 4\psi + \text{etc.}$$

Setzt man hier x nach und nach = 1, 2, 3, 4 etc. so wird die zu summirende Reihe in folgende Partialreihen zerlegt

$$\frac{c}{1^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{1^4}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{1^6}\sin 3\psi - \text{etc.}$$
$$+\frac{c}{2^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{2^4}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{2^6}\sin 3\psi - \text{etc.}$$
$$+\frac{c}{3^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{3^4}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{3^6}\sin 3\psi - \text{etc.}$$
$$+\frac{c}{4^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{4^2}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{4^6}\sin 3\psi - \text{etc.}$$
$$+ \text{etc. in inf.}$$

Zieht man hier die Verticalreihen zusammen, so erhält man statt der vorgegebenen Reihe diese zu summiren

$$\frac{2\mathfrak{B}^{(1)}\pi^2 c}{1.2}\sin\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}\pi^4 c^2}{1.2.3.4}\sin 2\psi$$
$$+ \frac{1}{3}\cdot\frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}\pi^6 c^3}{1.2\ldots 6}\sin 3\psi - \frac{1}{4}\cdot\frac{2^7\mathfrak{B}^{(4)}\pi^8 c^4}{1.2\ldots 8}\sin 4\psi$$
$$+ \text{etc.}$$

wo $\mathfrak{B}^{(1)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(3)}$, u. s. w., die erste, zweyte,

dritte, u. s. w., Bernoullische Zahl bezeichnen. Setzt man in dieser Reihe statt $\sin\psi$, $\sin 2\psi$, $\sin 3\psi$, u. s. w., die ihnen gleichgeltenden Exponentialausdrücke, und über dieses $\pi^2 c e^{\psi\sqrt{-1}} = x$, $\pi^2 c e^{-\psi\sqrt{-1}} = y$, so verwandelt sie sich in

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} x^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots6} x^3 - \text{etc.} \\ -\left(\frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} y - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} y^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots6} y^3 - \text{etc.} \right) \end{array} \right\}$$

Die Summe der ersten der beiden eingeklammerten Reihen heiße s, so entsteht durch Differentiation

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} - \frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} x + \frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots6} x^2 - \text{etc.}$$

Es ist aus Cyklometrie, 16.

$$\frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} + \frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4}\varphi^2 + \frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots6}\varphi^4 + \text{etc.} = \frac{1}{2\varphi^2} - \frac{\cot\varphi}{2\varphi}$$

$$= \frac{1}{2\varphi^2} - \frac{1}{2\varphi} \cdot \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}} \cdot \sqrt{-1}$$

also, wenn man $\varphi = \sqrt{x} . \sqrt{-1}$ macht,

$$\frac{2\mathfrak{B}^{(1)}}{1.2} - \frac{2^3\mathfrak{B}^{(2)}}{1.2.3.4} x + \frac{2^5\mathfrak{B}^{(3)}}{1.2\ldots6} x^2 - \text{etc.}$$

$$= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}.$$

Man hat demnach

$$\partial s = -\frac{\partial x}{2x} + \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}$$

und

$$s = -\frac{1}{2}\log x + \int \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}.$$

Es sey $e^{\sqrt{x}} = z$, also $e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{z}$, $\sqrt{x} = \log z$,

und $\frac{\partial x}{2\sqrt{x}} = \frac{\partial z}{z}$, so wird

$$\int \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}} = \int \frac{(z^2+1)\partial z}{z(z^2-1)}$$

$$= \int \frac{\partial z}{z+1} + \int \frac{\partial z}{z-1} - \int \frac{\partial z}{z}$$

$$= \log \frac{z^2-1}{z} + C$$

$$= \log(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + C$$

Daher ist

$$s = -\frac{1}{2}\log x + \log(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + C$$

$$= \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + C.$$

Da $\frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2 + \frac{2x}{1.2.3} + \frac{2x^2}{1.2...5} + \text{etc.}$: für $x = 0$, aber $s = 0$ werden muß, so wird $C = -\log 2$; daher

$$s = \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

Man hätte dieses Ergebniß auch sogleich aus der Reihe für $\log.\sin\varphi$ in Cyklometrie, 23., herleiten können.

Die Summe der Reihe in y ist hiernach $=$ $\log \frac{e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$, und die Summe der ursprünglichen Reihe $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \log \frac{e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} \right\}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}}}.$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x}{y} + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}}}.$$

Da

$$e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + \sqrt{-1} \cdot \sin\psi$$
$$= \frac{b + a\sqrt{-1}}{\sqrt{(bb + aa)}}$$

und $c = \sqrt{(bb + aa)}$, so wird $x = \pi^2 c e^{\psi\sqrt{-1}} = \pi^2(b + a\sqrt{-1})$, und auf gleiche Weise, oder, wenn man $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$ umwandelt, $y = \pi^2(b - a\sqrt{-1})$. Setzt man also $b + a\sqrt{-1} = (\beta + \alpha\sqrt{-1})^2$, wodurch $b - a\sqrt{-1} = (\beta - \alpha\sqrt{-1})^2$ wird, so ist $\sqrt{x} = \pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})$, $\sqrt{y} = \pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})$, und die Summe unserer Reihe

$$= -\frac{1}{4\sqrt{-1}} \log \frac{b + a\sqrt{-1}}{b - a\sqrt{-1}}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{e^{\pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})}}{e^{\pi(\beta - \alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta - \alpha\sqrt{-1})}}$$

Weil

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + u\sqrt{-1}}{1 - u\sqrt{-1}} = \text{Arc. tang } u$$

so ist das erste Glied des Summenausdrucks =

$-\frac{1}{2}$ Arc. tang $\frac{a}{b}$. Um das zweyte Glied gleichfalls auf einen Kreisbogen zurückzuführen, setze man

$$\frac{1 + u\sqrt{-1}}{1 - u\sqrt{-1}} = \frac{e^{\pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta + \alpha\sqrt{-1})}}{e^{\pi(\beta - \alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta - \alpha\sqrt{-1})}}$$

und es wird

$$u =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\pi(\beta+\alpha\sqrt{-1})} - e^{\pi(\beta-\alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta+\alpha\sqrt{-1})} + e^{-\pi(\beta-\alpha\sqrt{-1})}}{e^{\pi(\beta+\alpha\sqrt{-1})} + e^{\pi(\beta-\alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta+\alpha\sqrt{-1})} - e^{-\pi(\beta-\alpha\sqrt{-1})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\pi\beta}(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}}) + e^{-\pi\beta}(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}})}{e^{\pi\beta}(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}}) - e^{-\pi\beta}(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}})}$$

$$= \frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \frac{e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}}}{(e^{\pi\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\pi\alpha\sqrt{-1}}) \cdot \sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \operatorname{tang} \pi\alpha.$$

Die Summe der vorgegebenen Reihe ist also

$$= -\frac{1}{2} \text{ Arc. tang } \frac{a}{b} + \text{Arc. tang} \frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \operatorname{tang} \pi\alpha$$

Da der Bogen im zweyten Gliede dieses Ausdrucks $> \pi\alpha$ ist, so zerlege man ihn noch in zwey Bogen, wovon der eine $\pi\alpha$ ist, vermittelst der Formel

$$\text{Arc. tang}\, p = \text{Arc. tang}\, q + \text{Arc. tang} \frac{p-q}{1+pq}$$

indem man $p = \frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \operatorname{tang} \pi\alpha$, und $q = \operatorname{tang} \pi\alpha$ macht. Dadurch wird

$$\frac{p-q}{1+pq} = \frac{\frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \operatorname{tang} \pi\alpha - \operatorname{tang} \pi\alpha}{1 + \frac{e^{\pi\beta} + e^{-\pi\beta}}{e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}} \cdot \operatorname{tang} \pi\alpha^2}$$

$$= \frac{2e^{-\pi\beta} \cdot \sin\pi\alpha \cos\pi\alpha}{e^{\pi\beta}(\cos\pi\alpha^2 + \sin\pi\alpha^2) - e^{-\pi\beta}(\cos\pi\alpha^2 - \sin\pi a^2)}$$

$$= \frac{\sin 2\pi\alpha}{e^{2\pi\beta} - \cos 2\pi\alpha}$$

Hierdurch ist nun

$$\text{Arc.tang}\frac{a}{1+b}+\text{Arc.tang}\frac{a}{4+b}+\text{Arc.tang}\frac{a}{9+b}+\text{etc.}$$

$$=\pi\alpha-\frac{1}{2}\text{Arc.tang}\frac{a}{b}+\text{Arc.tang}\frac{\sin 2\pi\alpha}{e^{2\pi\beta}-\cos 2\pi\alpha},$$

wo α und β durch die Gleichung $(\beta+\alpha\sqrt{-1})^2 = b+a\sqrt{-1}$ gegeben sind. Es wird aber $\beta = \sqrt{\frac{b+\sqrt{(aa+bb)}}{2}}$, $\alpha = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{(aa+bb)}}{2}}$,

oder, wenn man ψ beybehält, $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}\psi}$

$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}\psi}$. Macht man über dieß

$e^{2\pi\beta} = \text{tang}\chi$, und $\text{tang}(45^\circ-\chi)\cot\pi\alpha = \text{tang}\omega$,

so ist die Summe der Reihe $=\frac{1}{2}(\pi-\psi)-\omega$.

Auf ähnliche Art verwandelt sich die unendliche Reihe mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder

$$\text{Arc.tang}\frac{a}{1+b}-\text{Arc.tang}\frac{a}{9+b}+\text{Arc.tang}\frac{a}{16+b}-\text{etc.}$$

in folgende

$$\frac{(2-1)\mathfrak{B}^{(1)}\pi^2c}{1.2}\sin\psi-\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}^{(2)}\pi^4c^2}{1.2.3.4}\sin 2\psi$$
$$+\frac{(2^5-1)\mathfrak{B}^{(3)}\pi^6c^3}{1.2\ldots6}\sin 3\psi-\frac{(2^7-1)\mathfrak{B}^{(4)}\pi^8c^4}{1.2\ldots8}\sin 4\psi+\text{etc.}$$

Die Summe dieser Reihe auf die vorige Art, oder aus der Reihe für log. tang $\frac{1}{2}\varphi$ (Cyklometrie 26.) gesucht, wird bey den vorigen Bezeichnungen =

$$= \frac{1}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x}{y} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{(e^{\sqrt{x}}-1)(e^{\sqrt{y}}+1)}{(e^{\sqrt{x}}+1)(e^{\sqrt{y}}-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \text{Arc. tang} \frac{a}{b} - \text{Arc. tang} \frac{e^{\pi\beta} \sin\pi\alpha}{e^{2\pi\beta}-1}$$

Es ist aber zu bemerken, daß die Summe der Reihe mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder auch aus der Summe der Reihe mit einerley Vorzeichen der Glieder abgeleitet werden kann. Man sehe deswegen Pfaffs Disquisitt. analyt. Vol. I., wo die Summe der Reihe mit denselben Vorzeichen der Glieder p. 65. §. XCIII., und aus ihr p. 70. §. XCIX. diejenige der Reihe mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder gefunden wird. Die ganze erste Abhandlung dieses Werks betrifft nämlich die Summirung von Reihen, deren Glieder Kreisbogen sind, wovon die Tangenten nach einem gewissen Gesetze fortschreiten. Die Summirung selbst wird nach einer für Reihen dieser Art eigens sehr scharfsinnig ausgedachten Methode in sehr großer Allgemeinheit zu Stande gebracht, da Euler nur mit ein Paar ziemlich eingeschränkten Fällen, und zwar durch ein indirectes Verfahren, hatte fertig werden können. Übrigens setzt die obige Summirung, wie die Anwendung der Gleichung

$$\text{Arc. tang} \frac{m\sin\varphi}{1+m\cos\varphi} = m\sin\varphi - \frac{1}{2} m^2 \sin 2\varphi$$

$$+ \frac{1}{3} m^3 \sin 3\varphi - \text{etc.}$$ sogleich zeigt, voraus, daß unter den Bogen, welche die Glieder der Reihe bilden, die kleinsten zu verstehen sind, welche den Tangenten $\frac{a}{1+b}$, $\frac{a}{4+b}$, $\frac{a}{9+b}$. u. s. w. zugehören, so wie dieses auch von den Bogen, welche in den Summenausdrücken vorkommen, gilt.

81. Exempel. $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$. Hier wird $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = \frac{1}{2} = \alpha$, $\omega = 0$, also $\frac{1}{2}(\pi - \psi) - \omega = \frac{1}{4}\pi$. Demnach ist

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{2} + \text{Arc. tang}\frac{1}{8} + \text{Arc. tang}\frac{1}{18} + \ldots$$
$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{2xx} + \text{etc. in inf.} = \frac{1}{4}\pi.$$

Diese Reihe ist eine von den beiden, welche Eulern Veranlassung zur Betrachtung der Reihen dieser Art wurden. Die andere ist

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{3} + \text{Arc. tang}\frac{1}{7} + \text{Arc. tang}\frac{1}{13}$$
$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{21} + \text{Arc. tang}\frac{1}{31} + \text{etc. in inf.}$$
$$= \frac{1}{4}\pi.$$

Man gelangt zu ihnen auf folgende Art.

Es ist $\text{tang}\,\gamma = \frac{1}{m}$, wo m eine ganze Zahl ist; man soll den Bogen γ in zwey andere α und β so zerlegen, daß $\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{n}$, $\text{tang}\,\beta = \frac{1}{p}$ werde, wo n und p gleichfalls ganze Zahlen sind.

Da

$$\frac{1}{m} = \text{tang}\,\gamma = \text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{np}}$$

$$= \frac{n+p}{np-1}$$

so wird

$$mn + mp = np - 1 \quad (4)$$

und

$$p = \frac{mn+1}{n-m} = m + \frac{mm+1}{n-m}.$$

Damit also der Forderung ein Genüge geschehen könne, muß $n-m$ ein Theiler von $mm+1$ seyn.

Man setze, um nur bey dem allgemeinen stehen zu bleiben, I. $n-m=1$, also $n=m+1$, so wird $p=mm+m+1$, also

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+m+1} + \text{Arc. tang}\frac{1}{m+1}$$

Wird hier nach und nach $m+1$, $m+2$, $m+3$, u. s. w. statt m gesetzt, so entsteht

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m+1} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+3m+3} + \text{Arc. tang}\frac{1}{m+2}$$

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m+2} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+5m+7} + \text{Arc. tang}\frac{1}{m+3}$$

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m+3} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+7m+13} + \text{Arc. tang}\frac{1}{m+4}$$

etc. etc.

Hieraus wird durch Addition mit Auslassung dessen, was sich aufhebt,

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{m} = \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+m+1}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+3m+3}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+5m+7} + \ldots\ldots$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{mm+(2x-1)m+x^2-x+1}$$

$$+ \text{etc. in inf.}$$

also $m = 1$ gemacht

$$\frac{1}{4}\pi = \text{Arc. tang}\frac{1}{3} + \text{Arc. tang}\frac{1}{7} + \text{Arc. tang}\frac{1}{13}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{xx+x+1} + \text{etc. in inf.}$$

Dieses ist die zweyte der vorhin erwähnten Reihen.

Ist m ungerade $= 2q + 1$, so wird $mm + 1 = 2(2qq + 2q + 1)$. Nimmt man also II. $n - m = 2$, folglich $n = 2q + 3$, so wird $p = 2qq + 2q + 1 + 2q + 1 = 2(q+1)^2$. Demnach ist

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{2q+1} = \text{Arc. tang}\frac{1}{2(q+1)^2}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{2q+3}$$

Hieraus wird nach der vorhin gebrauchten Art zu schließen

$$\text{Arc. tang}\frac{1}{2q+1} = \text{Arc. tang}\frac{1}{2(q+1)^2}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{2(q+2)^2}$$

$$+ \text{Arc. tang}\frac{1}{2(q+3)^2} + \text{etc. in inf.}$$

also, wenn man $q = 0$ macht,

$$\frac{1}{4}\pi = \text{Arc.tang}\frac{1}{2} + \text{Arc.tang}\frac{1}{8} + \text{Arc.tang}\frac{1}{18} + \ldots + \text{Arc.tang}\frac{1}{2xx} + \text{etc. in inf.}$$

welches die erste der oben gedachten Reihen ist.

Beyläufig mag noch angemerkt werden, daß man vermittelst der vorhin entwickelten Formel unter anderen Zerlegungen von $\frac{1}{4}\pi$ auch diese erhält

$$\frac{1}{4}\pi = 5\ \text{Arc.tang}\frac{1}{8} + 2\ \text{Arc.tang}\frac{1}{18} + 3\ \text{Arc.tang}\frac{1}{57}$$

Da nun

$$\text{Arc.tang}x = \frac{x}{1+x^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \text{etc.}\right\}$$

wie in dem Art., Umbildung der Reihen, gezeigt werden wird, so ergiebt sich

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{8}{13}\left\{1 + \frac{2}{3}A\frac{1}{65} + \frac{4}{5}B\frac{1}{65} + \frac{6}{7}C\frac{1}{65} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ \frac{36}{325}\left\{1 + \frac{2}{3}a\frac{1}{325} + \frac{4}{5}b\frac{1}{325} + \frac{6}{7}c\frac{1}{325} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ \frac{171}{3250}\left\{1 + \frac{2}{3}\alpha\frac{1}{3250} + \frac{4}{5}\beta\frac{1}{3250} + \frac{6}{7}\gamma\frac{1}{3250} + \text{etc.}\right\}$$

wo A, B, C, u. s. w.; a, b, c, u. s. w.; α, β, γ, u. s. w., die auf einander folgenden Glieder der drey Reihen bedeuten. Hat man die Glieder der ersten eingeklammerten Reihe einmal berechnet, so ergeben sich daraus leicht diejenigen der zweyten, und aus diesen die der dritten Reihe, weil $325 = 5 . 65$, und $3250 = 10 . 325$. Das ist der Vortheil dieser Zerlegung. Alle drey Reihen convergiren sehr stark, so daß man, um $\frac{1}{4}\pi$ bis auf zehn Decimalstellen genau zu haben, in allem 13 Glieder zu berechnen hat, und überhaupt 16 in Rechnung kommen. — Dieses ist ein Nachtrag zu dem Artikel, Cyklotechnie.

82. Andere Beyspiele von der Summirung solcher Reihen, deren Glieder transcendente Größen sind, durch Differentiation und Integration giebt die in sc. angeführte Abhandlung von Pfaff in §. CXI. CXIII. und CXXX.

In 79. ward aus der bekannten Summe der Reihe $m - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{4}m^4 + \text{etc.} = \log(1+m)$ die Summe dieser $m\sin\varphi - \frac{1}{2}m^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}m^3\sin 3\varphi - \frac{1}{4}m^4\sin 4\varphi + \text{etc.}$ gefunden. Nach der dabey gebrauchten Art, nämlich durch Substitution der gleichgeltenden Exponentialausdrücke statt der Sinus und Cosinus, läßt sich überhaupt zeigen, daß, wenn

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

eine summirbare Reihe ist, auch die Reihen

$$A + Bx\sin\varphi + Cx^2\sin 2\varphi + Dx^3\sin 3\varphi + \text{etc.}$$

$$A + Bx\cos\varphi + Cx^2\cos 2\varphi + Dx^3\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

summirbar sind. Dasselbe läßt sich auch bey derselben Voraussetzung von den Reihen

$$A + Bx\sin(\alpha+\varphi) + Cx^2\sin(\alpha+2\varphi) + Dx^3\sin(\alpha+3\varphi) + \text{etc.}$$

$$A + Bx\cos(\alpha+\varphi) + Cx^2\cos(\alpha+2\varphi) + Dx^3\cos(\alpha+3\varphi) + \text{etc.}$$

darthun. Dieser Satz wird zur Ergänzung des Art., Summirbare Reihe, hier nachgehohlt.

83. Mehrere der durch das bisher erläuterte Verfahren summirbaren Reihen lassen sich auch durch die umgekehrte Methode der Differenzen summiren, wozu aber oft eine leicht sich ergebende Transformation nöthig ist, um nämlich den Gliedern der Reihe die in (14) angezeigte Beschaffenheit zu geben. Dieß soll hier noch an der in (67) summirten Reihe $\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.8} + \frac{1}{6.10} +$ etc. gezeigt werden.

Man drucke diese Reihe so aus:

$$\frac{1}{2.2}\left\{\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \text{etc.}\right\}$$

so ist das $(x+1)$te Glied der eingeschlossenen Reihe $= \frac{1}{(x+1)(x+3)}$, also wenn man den fehlenden Factor $x+2$ ergänzt $= \frac{x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$$= \frac{x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$ Heißt demnach die Summe der eingeklammerten Reihe S, so ist

$$S = \Sigma\frac{1}{(x+2)(x+3)} + \Sigma\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \text{Const.} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$$

Da $S = 0$ werden muß für $x = 0$, so wird

$$\text{Const.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

also

$$S = \frac{3}{4} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2x+3}{2(x+1)(x+2)}$$

und

$$\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.8} + \frac{1}{6.10} + \text{etc.} = \frac{1}{4}S$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{2x+3}{8(x+1)(x+2)}$$

wie in (67) gefunden ist, weil hier x statt des dortigen n steht. Man wird leicht bemerken, daß diese Summe hier viel kürzer gefunden worden, als in (67); dennoch aber behält die Summirung durch Differentiation und Integration vor der Summirung mittels der umgekehrten Methode der Differenzen den Vorzug, weil sie allgemeiner ist, welches noch mehr erhellen wird, wenn man auf das folgende Rücksicht nimmt. Übrigens hat Lorgna in dem oben (71) angeführten Specimen de seriebus convergentibus. Veronae, 1775. das Summirungsverfahren durch Differentiation und Integration, jedoch nur in so weit, als dazu bloß die Integration von Differentialformeln erfordert wird, mit ermüdender Weitläufigkeit abgehandelt, da das Allgemeine davon doch nur auf wenige Puncte ankommt. Im 5ten Cap. bringt er die Summation der Reihen der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen

$1 \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \pm$ etc. auf das bestimmte Integral

$$\ldots\ldots \text{ etc. } \int\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{x}\int\frac{\partial x}{1 \mp x}\begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

zurück (man vergleiche oben, 65^b), und sucht die Werthe desselben durch die Cotesischen in dem Artikel, Quadratur, mitgetheilten Formeln, eine überflüssige und daher unnütze Arbeit.

84. In den bis jetzt nach der Leibnitz-Bernoullischen Summirungsmethode summirten Reihen enthielten die den Potenzen von x zugehörigen Coefficienten der Glieder in ihren Nennern immer dieselbe Zahl von Factoren, und ein gleiches hatte bey den Zählern Statt. Nimmt die Zahl dieser Factoren in den Nennern oder Zählern oder in beiden zugleich regelmäßig zu, so kommt die Summation auf Integrirung einer linearen Differentialgleichung an, wie die nun folgenden Exempel, bey denen man sich an das in (64) und (72) gesagte erinnern muß, zeigen werden.

85. Es sey die Reihe $1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ etc. in inf. zu summiren. Man formire die Reihe $x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ etc. in inf., aus welcher die vorgegebene entsteht, wenn $x = 1$ ist, und setze die Summe derselben y, so giebt die Differentiation

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

d. i.

$$1 + y = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\text{oder } \partial y - y\partial x - \partial x = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich leicht durch Sonderung der veränderlichen Größen integriren, indem

$$\frac{\partial y}{1+y} = \partial x$$

also $\log(1+y) = \text{Const.} + x$

wird. Da y für $x=0$ verschwindet, so wird Const. $=0$, also $1+y=e^x$, mithin $y=e^x-1$, folglich, $x=1$ gemacht, die Summe der vorgegebenen Reihe $= e-1$, wie es auch die Vergleichung mit dem bekannten Werthe von e zeigt.

86. Die zu summirende Reihe sey $\frac{1}{1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{1.3.5.7}+$ etc. Man setze die Summe der Reihe $\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.3}+\frac{x^5}{1.3.5}+\frac{x^7}{1.3.5.7}+$ etc. unter welcher jene begriffen ist, $=y$, so entsteht durch Differentiation

$$1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1.3}+\frac{x^6}{1.3.5}+\text{etc.} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Da nun

$$\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1.3}+\frac{x^6}{1.3.5}+\text{etc.} = x\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.3}+\frac{x^5}{1.3.5}+\text{etc.}\right) = xy$$

so wird

$$\frac{\partial y}{\partial x} = xy+1$$

oder $\partial y - xy\partial x = \partial x.$

Der integrirende Factor zu dieser Differentialgleichung ist $e^{-xx:2}$, und es wird

$$y = e^{xx:2} \int e^{-xx:2} \partial x$$

wo keine Constante nöthig ist, wenn man das Integral $\int e^{-xx:2} \partial x$ mit $x = 0$ anfangen läßt.

Weil aber das Integral $\int e^{-xx:2} \partial x$ von $x = 0$ an genommen sich durch keinen geschlossenen Ausdruck darstellen läßt, so erhält man nur eine Umformung der vorgegebenen Reihe.

Setzt man nämlich statt $e^{-xx:2}$ seinen Werth $1 - \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} - \frac{x^6}{2.4.6} + \text{etc.}$ so wird nach vollbrachter Integration

$$y = e^{xx:2}\left(x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.4.5} - \frac{x^7}{2.4.6.7} + \text{etc.}\right)$$

also die vorgegebene Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{1.3.5.7} + \text{etc. in inf.}$$

$$= e^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.4.5} - \frac{1}{2.4.6.7} + \text{etc.}\right)$$

Die Glieder der eingeschlossenen Reihe werden gegen die gleichstelligen Glieder der ursprünglichen Reihe immer kleiner. Das Verhältniß der $(n+1)$ten Glieder ist $\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6.8\ldots\ldots\ldots 2n} = \frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{2}{\sqrt{(4n+1)\pi}}$ nächstens (54.), daher die summatorische Reihe eine schnellere Annäherung gewährt als die ursprüngliche.

Man kann aber auch die Sache umkehren, und die Reihe $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \frac{x^7}{1.3.5.7} + \text{etc.}$ gebrauchen, um den Werth des Integrals $\int e^{-xx:2} \partial x$, von $x = 0$ an genommen, darzustellen. Es wird nämlich

$$\int e^{-xx:2}\partial x = e^{-xx:2}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \frac{x^7}{1.3.5.7} + \text{etc.}\right)$$

und wenn man $xx = 2tt$ setzt

$$\int e^{-tt}\partial t = e^{-tt}t\left(1 + \frac{2t^2}{3} + \frac{(2t^2)^2}{3.5} + \frac{(2t^2)^3}{3.5.7} + \frac{(2t^2)^4}{3.5.7.9} + \text{etc.}\right)$$

Diese Reihe, welche 0 wird für $t = 0$, findet sich auch, wenn die Formel $e^{-tt}\partial t$ theilweise integrirt, und bei dem summatorischen Theile wieder eben so verfahren wird u. s. w.

87. Diese besondern Beispiele mögen als Einleitung zu der folgenden Auflösung dienen, welche Euler (Institt. calc. integr. T. II. §. 1059) von dem allgemeineren Problem gegeben hat, die Summe der unendlichen Reihe

$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Mx^{i-1} + Nx^i + \text{etc.}$,

worin $B = \frac{0m + h}{1n + k}A$; $C = \frac{1m + h}{2n + k}B$; $D = \frac{2m + h}{3n + k}C$; überhaupt $N = \frac{(i-1)m + h}{in + k}M$ ist, zu finden.

Heißt nämlich die Summe dieser Reihe y, so daß $y = A + Bx + Cx^2 \ldots + Mx^{i-1} + Nx^i + \text{etc.}$, so wird durch Differentiation und Multiplikation mit x

$$\frac{x\partial y}{\partial x} = Bx + 2Cx^2 + 3Dx^3 + \ldots + (i-1)Mx^{i-1} + iNx^i + \text{etc.}$$

und

$$\frac{nx\partial y}{\partial x} + ky = kA + (n+k)Bx + (2n+k)Cx^2 + \ldots + (in+k)Nx^i + \text{etc.}$$

rner

$$\left(\frac{mx\partial y}{\partial x}+h\right)x=(om+h)Ax+(m+h)Bx^2+\ldots$$
$$+((i-1)m+h)Mx^i+\text{etc.}$$

i. vermöge der gesetzten Relationen zwischen B und ; C und B; u. s. w. N und M, u. s. w.

$$=(n+k)Bx+(2n+k)Cx^2+\ldots$$
$$+(in+k)Nx^i+\text{etc.}$$

Offenbar ist also

$$\frac{nx\partial y}{\partial x}+ky=kA+\left(\frac{mx\partial y}{\partial x}+h\right)x$$

oraus

$$\partial y+\frac{k-hx}{x(n-mx)}y\partial x=\frac{kA\partial x}{x(n-mx)}$$

rvorgeht. Diese Differentialgleichung mit der in m Art., Integralgleichung, 12., behandelten

$$\partial y+Py\partial x=Q\partial x$$

sammengehalten, giebt $P\partial x=\frac{(k-hx)\partial x}{x(n-mx)}$: $\frac{k}{n}\cdot\frac{\partial x}{x}+\frac{mk-nh}{n}\cdot\frac{\partial x}{n-mx}$, und $\int P\partial x$ oder

$$\text{oge})\int P\partial x=\frac{k}{n}\log x-\frac{mk-nh}{mn}\log(n-mx)$$

: $\log x^{\frac{k}{n}}(n-mx)^{\frac{nh-mk}{mn}}$, also $e^{\int P dx}=x^{\frac{k}{n}}(n-mx)^{\frac{nh-mk}{mn}}$.

ber $e^{\int P dx}$ ist, wie die Ausführung in dem angeführ- n Art. zeigt, der integrirende Factor zu der Glei- ung $\partial y+Py\partial x=Q\partial x$, also wird unsere Gleichung rch Multiplication mit $x^{\frac{k}{n}}(n-mx)^{\frac{nh-mk}{mn}}$ integrabel, d man erhält

$$(n-mx)^{\frac{nh-mk}{mn}} x^{\frac{k}{n}} y = kA\int x^{\frac{k}{n}-1} \partial x (n-mx)^{\frac{nh-mk}{mn}-1}$$

wo das Integral so zu nehmen ist, daß für $x=0$, $y=A$ werde, wie es die vorgegebene Reihe erfordert. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat man

$$y = kAx^{-\frac{k}{n}} (n-mx)^{\frac{mk-nh}{mn}} \int x^{\frac{k}{n}-1} \partial x (n-mx)^{\frac{nh-mk}{mn}-1}$$

88. Eine besondere Entwickelung erfordert der Fall, wo $m=0$ ist. In diesem ist die Differentialgleichung

$$\partial y + \frac{k-hx}{nx} y\partial x = \frac{kA\partial x}{nx}$$

und der integrirende Factor $x^{\frac{k}{n}} e^{-\frac{hx}{n}}$.

Die Integration giebt

$$x^{\frac{k}{n}} e^{-\frac{hx}{n}} y = \frac{kA}{n} \int x^{\frac{k}{n}-1} e^{-\frac{hx}{n}} \partial x$$

also

$$y = \frac{kA}{n} x^{-\frac{k}{n}} e^{\frac{hx}{n}} \int x^{\frac{k}{n}-1} e^{-\frac{hx}{n}} \partial x$$

89. Auch der Fall $n=0$ muß besonders aufgelöſ't werden. Die Differentialgleichung wird für denselben

$$\partial y + \frac{hx-k}{mx^2} y\partial x = -\frac{kA\partial x}{mx^2}$$

und der integrirende Factor ist $x^{\frac{h}{m}} e^{\frac{k}{mx}}$. Man bekommt

$$y = -\frac{kA}{m} e^{-\frac{k}{mx}} x^{-\frac{h}{m}} \int e^{\frac{k}{mx}} x^{\frac{h}{m}-2} \partial x$$

as Integral auf die vorhin bestimmte Art genommen.

90. Ist $k = 0$, so wird y algebraisch ausge-
ruckt, indem nämlich

$$(n - mx)^{\frac{h}{n}} y = C$$

der

$$y = C(n - mx)^{-\frac{h}{n}}$$

irb. Für $x = 0$ entsteht hieraus $A = n^{-\frac{h}{n}} C$, also
$= An^{\frac{h}{n}}$, mithin ist

$$y = A\left(\frac{n}{n - mx}\right)^{\frac{h}{n}}$$

Aber auch wenn k ein Vielfaches von n, $= pn$
t, wird y algebraisch. In diesem Falle ist nämlich

$$\int x^{\frac{k}{n}-1} \partial x (n - mx)^{\frac{nh-mk}{mn}-1} =$$

$$\int x^{p-1} \partial x (n - mx)^{\frac{h}{m}-p-1}$$

elches Integral nach (Integralformel, 60. I.) alge-
raisch wird.

91. Exempel. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \text{etc. in inf.}$$

u summiren.

Hier ist $A = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $n = 2$, $k = 0$.
aher die Summe der Reihe oder

$$y = \left(\frac{2}{2-2x}\right)^{\frac{1}{2}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

wie bekannt.

92. Exempel. Die zu summirende Reihe sey

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + \text{etc.}$$

Man setze

$$1 + \frac{1}{4}x + \frac{1.3}{4.6}x^2 + \frac{1.3.5}{4.6.8}x^3 + \text{etc.} = y,$$

so ist in (87) $A = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $n = 2$, $k = 2$, und

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}xy = \int \partial x (1-x)^{-\frac{3}{2}}$$
$$= 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} + C.$$

Für $x = 0$ ist $y = 1$, also

$$0 = 2 + C$$

mithin

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}xy = \frac{2}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} - 2$$

und

$$y = \frac{2(1-\sqrt{(1-x)})}{x}$$

Hieraus kommt für $x = 1$ die Summe der vor gegebenen Reihe $= 2$.

93. Exempel. Die Reihe

$$\frac{5}{4} - \frac{5.7}{4.6} + \frac{5.7.9}{4.6.8} - \frac{5.7.9.11}{4.6.8.10} + \text{etc. in inf.}$$

zu summiren.

Man setze $\frac{5}{4} - \frac{5.7}{4.6}x + \frac{5.7.9}{4.6.8}x^2 - \text{etc.} = y$, und nehme in (87) x negativ, wodurch auch ∂x negativ

tiv wird, so ist $A = \frac{5}{4}$, $m = 2$, $h = 7$, $n = 2$, $k = 4$, und

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} x^2 y = \frac{5}{2} \int x \partial x (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

Es ist aus (Integralformel, 59. IV.)

$$\int x \partial x (1+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} x (1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \int \partial x (1+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{5}\left(x - \frac{2}{3}\right)(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

Daher

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} x^2 y = \left(x - \frac{2}{3}\right)(1+x)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Da für $x = 0$, $y = \frac{5}{4}$ ist, so wird Const. $= \frac{2}{3}$, und

$$y = \frac{3x - 2}{3x^2} + \frac{2}{3x^2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

Macht man nun $x = 1$, so kommt

$$\frac{5}{4} - \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{6}.$$

94. Exempel. Die Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \text{etc}$, in inf. zu summiren.

Es sey $\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3}x + \frac{1.1.2}{2.3.5}x^2 + \frac{1.1.2.3}{2.3.5.7}x^3$ + etc. $= y$, so ist in (87) $A = \frac{1}{2}$, $m = 1$, $h = 1$, $n = 2$, $k = 1$, und es wird

$$(2x - xx)^{\frac{1}{2}} y = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} \partial x (2 - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ Arc. sin. vers. } x + C$$

aus (Integralformel, 55.) Da für $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$ ist, so wird $C = 0$, also

$$y = \frac{1}{2\sqrt{(2x - xx)}} \text{ Arc. sin. vers. } x$$

und wenn man $x = 1$ setzt,

$$\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.1.2}{2.3.5} + \frac{1.1.2.3}{2.3.5.7} + \text{etc.} = \frac{1}{4}\pi$$

wo π der halbe Kreisumfang zum Halbmesser 1 ist.

Man hat hieraus noch

$$\text{Arc. sin. vers. } x = \left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.2}{3.5}x^2 + \frac{1.2.3}{3.5.7}x^3 + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9}x^4 + \text{etc.}\right)\sqrt{(2x - xx)}$$

und wenn man $\sqrt{(2x - xx)}$ nach dem Binomischen Lehrsatze entwickelt

$$= \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2.3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^2}{2^2.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{2^3.7} + \text{etc.}\right)\sqrt{2x}.$$

Diese Reihen fehlen in dem Artikel, Cyklometrie.

Setzt man $x = \sin.\ \mathrm{vers.}\ 2\varphi = 2\sin\varphi^2$, also $\cos 2\varphi = 1 - x$, so wird $\sqrt{(2x - xx)} = \sin 2\varphi$, und durch die erste Reihe

$$\varphi = \sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{2}{3}\sin\varphi^2 + \frac{2.4}{3.5}\sin\varphi^4 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin\varphi^6 + \mathrm{etc.}\right)$$

Diese Reihe, welche eine Transformation der bekannten Reihe für einen Kreisbogen aus seinem Sinus ist, dient sehr gut φ durch einen Kettenbruch darzustellen *). Davon in dem Art., Umbildung der Reihen.

95. Exempel. Die zu summirende Reihe sey

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2.3.4.5} + \mathrm{etc.\ in\ inf.}$$

Wird $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}x + \frac{1}{1.2.3.4}x^2 + \frac{1}{1.2\ldots 5}x^3$ + etc. $= y$ gesetzt, so ist in (87) $A = \frac{1}{2}$, $m = 0$, $h = 1$, $n = 1$, $k = 2$, also aus (88)

$$\begin{aligned} x^2 e^{-x} y &= \int x e^{-x} \partial x \\ &= C - e^{-x}(1 + x) \end{aligned}$$

zufolge (Integralformel, 100. I.) Für $x = 0$, ist $y = \frac{1}{2}$. Dadurch findet sich $C = 1$, und

$$y = \frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$$

d. i.

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}x + \frac{1}{1.2.3.4}x^2 + \mathrm{etc.} = \frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$$

*) Aus ihr folgt die oben in (81.) gebrauchte Reihe für Arc. tang. sehr leicht.

wie man auch ohne Integration bey einiger Aufmerksamkeit und Übung leicht entdeckt. Multiplicirt man hier beiderseits mit x, und dividirt die hierauf genommenen Differentiale mit ∂x, so entsteht

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3}x + \frac{3}{1.2.3.4}x^2 + \text{etc.} = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$$

und wenn man $x = 1$ macht

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2....5} + \text{etc.} = 1$$

Die Reihe nähert sich dem Totalwerthe oder der Gränze ihrer Summe schnell. Die Summe der beiden ersten Glieder ist $1 - \frac{1}{1.2.3}$, der drey ersten $1 - \frac{1}{1.2.3.4}$, der vier ersten $1 - \frac{1}{1.2....5}$, u. s. w. Die Reihe entsteht übrigens aus der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$, wenn man auf diese das Verfahren in dem Art., Summirbare Reihe, 2. vergl. 10., anwendet. Man sehe Joh. Bernoullis Werke, T. IV. p. 9., wo auch gezeigt wird, daß die Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{9}{1.2.3.4} + \frac{16}{1.2....5} + \text{etc.} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$, d. i., $= e - 1$, welches sich aus der obigen Gleichung zwischen der Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3}x + \text{etc.}$ und ihrer Summe, wenn man die

Multiplication mit x, Differentiation, und Division mit ∂x noch einmal anbringt, leicht findet. Auf gleiche Weise ergiebt sich $\frac{1}{1.2} + \frac{8}{1.2.3} + \frac{27}{1.2.3.4} + \frac{64}{1.2\ldots\ldots 5}$ + etc. = e + 1, u. s. w.

96. Exempel. Die hypergeometrische Reihe $1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 -$ etc. in inf. zu summiren.

Setzt man $1 - 1x + 1.2x^2 - 1.2.3x^3 +$ etc. $= y$, und x in (87) negativ, so ist $A = 1$, $h = 1$, $m = 1$, $n = 0$, $k = 1$, also aus (89)

$$e^{-\frac{1}{x}} xy = \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} \partial x}{x}$$

Da für $x = 0$, wo $y = 1$ ist, die Größe linker Hand des Gleichheitszeichens verschwindet, so muß das Integral rechter Hand gleichfalls für $x = 0$ verschwinden. Unter dieser Bedingung also ist

$$y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} \partial x}{x}$$

folglich $x = 1$ gemacht,

$1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 - 1.2.3.4 -$ etc. in inf.

$$= e \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} \partial x}{x} \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

Auf diese Weise ist also die Summe auf ein bestimmtes Integral gebracht. Euler hat dadurch in der Abhandlung, De seriebus divergentibus (Nov. Comment. Petrop. T. V.), indem er $\frac{e}{xe^{\frac{1}{x}}}$ als die der Abscisse x zugehörige Ordinate einer Curve be-

trachtete, und den zwischen den Ordinaten in den Endpuncten der Abscisse 1, der Curve und der Abscissenaxe enthaltenen Flächenraum vermittelst der Annäherungsformel in (134) des Art., Quadratur, für $n = 10$ suchte, die Summe der Reihe $1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + \text{etc.} = 0{,}59637164$ gefunden. Die Formeln in (144) und (145) jenes Art. geben mir die Summe $= 0{,}5962238$, welches aber noch sehr von der Wahrheit abweicht. Die genaue Summe ist nämlich $= 0{,}59634736232 3 \ldots\ldots$ vermöge einer von Mascheroni aufgefundenen Relation zwischen derselben und der bey der Summe der natürlichen harmonischen Reihe und den Integrallogarithmen vorkommenden Constante (40). Man sehe den Traité du calc. diff. et du calc. integr. T. III. §. 1227. von Lacroix. Übrigens ergiebt sich hieraus noch die Summe der hypergeometrischen Reihe $1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + \text{etc.} = 0{,}40365 2637676 \ldots$, wie in dem Art., Reihe, 31., angegeben ist.

97. Wenn in (87) $A = 1$, $m = 1$, $k = p - 1$, und $n = 1$, so verwandelt sich die Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ in diese $1 + \frac{h}{p}x + \frac{h(h+1)}{p(p+1)}x^2 + \frac{h(h+1)(h+2)}{p(p+1)(p+2)}x^3 + \text{etc.}$ deren Summe y durch

$$(1-x)^{h-p+1}x^{p-1}y = (p-1)\int x^{p-2}(1-x)^{h-p}$$

bestimmt wird. Wenn $p > 1$ ist (für $p = 1$ ist die Summe der Reihe $(1-x)^{-h}$), so verschwindet der Theil linker Hand des Gleichheitszeichens für $x = 0$, indem alsdann $y = 1$ ist. Das Integral rechter Hand muß also gleichfalls für $x = 0$ verschwinden. Es werde so genommen, so ist, $p > h$ gesetzt,

$$y = \frac{(p-1)(1-x)^{p-h-1}}{x^{p-1}} \int x^{p-2}\partial x(1-x)^{-(p-h)}$$

Es ist aus (Integralformel, 59. VI.)

$$\int x^{p-2}\partial x(1-x)^{-(p-h)} = \frac{x^{p-1}}{p-h-1}(1-x)^{-(p-h-1)}$$
$$-\frac{h}{p-h-1}\int x^{p-2}\partial x(1-x)^{-(p-h-1)}$$

Da der algebraische Theil des reducirten Integrals für $x=0$ verschwindet, vorausgesetzt, daß p nicht $=h+1$ ist, so muß auch der summatorische Theil unter dieser Voraussetzung für jenen Werth von x verschwinden. Ist nun über dieses $p-h$ eine ganze Zahl, so kann man die Reductionen auf die angefangene Weise fortsetzen, bis man auf das Integral $\int x^{p-2}\partial x(1-x)^{-1}$ gekommen ist. Wofern nun noch p eine ganze Zahl ist, so läßt sich das letzte Integral entweder durch Division oder nach (Integralformel, 59. IV.) auf $\int\partial x(1-x)^{-1}$ bringen. Auf diese Weise wird

$$y=\frac{p-1}{p-h-1}\left\{1-\frac{h}{p-h-2}(1-x)+\frac{h(h+1)}{(p-h-2)(p-h-3)}(1-x)^2\right.$$
$$-\ldots\ldots$$
$$\left.\pm\frac{h(h+1)(h+2)\ldots\ldots\ldots p-3}{(p-h-2)(p-h-3)(p-h-4)\ldots\ldots 1}(1-x)^{p-h-2}\right\}$$
$$\mp\frac{h(h+1)\ldots\ldots\ldots p-1}{(p-h-1)(p-h-2)\ldots\ldots 1}\left(\frac{1}{(p-2)x}+\frac{1}{(p-3)x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(p-4)x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{p-2}}\right)(1-x)^{p-h-1}$$
$$\mp\frac{h(h+1)\ldots\ldots p-1}{(p-h-1)(p-h-2)\ldots 1}\cdot\frac{(1-x)^{p-h-1}}{x^{p-1}}\log(1-x)$$

wo die oberen Vorzeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades $p-h$ gelten.

Setzt man $x=1$, so verschwinden alle Glieder dieses Ausdrucks außer dem ersten (wegen des Verschwindens von $(1-x)\log(1-x)$ für $x=1$ sehe man den Artikel, Summirbare Reihe, 7.), und es wird

$$1+\frac{h}{p}+\frac{h(h+1)}{p(p+1)}+\frac{h(h+1)(h+2)}{p(p+1)(p+2)}+\text{etc.}=\frac{p-1}{p-h-1}.$$

Dieses Resultat stimmt nun zwar mit dem in dem Art., Summirbare Reihe, 12., gefundenen überein, ist aber wegen der Einschränkung auf ganze Werthe von p und h bey weitem nicht so allgemein. Es wird sich indeß bald ein Weg zeigen, dasselbe eben so allgemein als dort zu begründen.

98. In den von (85) bis hieher summirten Reihen waren die Zahlen, womit die Coefficienten der gegebenen oder angenommenen Reihe in x in den Relationen derselben multiplicirt werden, Glieder einer einfachen arithmetischen Fortschreitung, und die Summirung der Reihe hing von der Integration einer linearen Differentialgleichung des ersten Grades ab. Sind jene Zahlen von zwey Dimensionen oder Producte aus je zwey Gliedern einfacher arithmetischer Fortschreitungen, so kommt die Summirung auf die Integration einer linearen Differentialgleichung des zweyten Grades an, wie folgendes von Joh. Bernoulli (Commerc. epistol. Leibn. et Bernoul. T. I. p. 220) gegebene Beyspiel zeigt.

Die unendliche Reihe $\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2^2}+\frac{1}{1.2^2 3^2}$ $+\frac{1}{1.2^2.3^2.4^2}+$ etc. auf eine Differentialgleichung zu reduciren.

Es sey

$$y=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2^2}+\frac{x^3}{1.2^2.3^2}+\frac{x^4}{1.2^2.3^2.4^2}+\text{etc.}$$

so wird

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{1}+\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{1.2^2.3^2}+\frac{x^3}{1.2^2.3^2.4}+\text{etc.}$$

also wenn man auf beiden Seiten mit x multiplicirt, und noch einmal differentiirt, ∂x constant gesetzt,

$$\frac{x\partial^2 y + \partial y \partial x}{\partial x^2} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2^2} + \frac{x^3}{1.2^2.3^2} + \text{etc.}$$

d. i.

$$= 1 + y$$

Hieraus kommt

$$\partial^2 y + \frac{1}{x} . \partial y \partial x - y . \partial x^2 = \frac{1}{x} \partial x^2$$

eine lineare Differentialgleichung des zweyten Grades, welche integrirt werden müßte, um die Summe der vorgegebenen Reihe zu haben.

99. Es sey jetzt allgemein die Summe der unendlichen Reihe

$$A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B}u + C\mathfrak{C}u^2 + D\mathfrak{D}u^3 + \ldots + M\mathfrak{M}u^{i-1} + N\mathfrak{N}u^i + \text{etc.}$$

deren Coefficienten eine solche Beziehung zu einander haben, daß

$$B = \frac{0m+h}{n+k}A;\ C = \frac{1m+h}{2n+k}B;\ D = \frac{2m+h}{3n+k}C; \ldots$$

$$\ldots N = \frac{(i-1)m+h}{in+k}M;\ \text{u. s. w.}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{0\mu+\eta}{\eta+\vartheta}\mathfrak{A};\ \mathfrak{C} = \frac{1\mu+\eta}{2\nu+\vartheta}\mathfrak{B};\ \mathfrak{D} = \frac{2\mu+\eta}{3\nu+\vartheta}\mathfrak{C}; \ldots$$

$$\ldots \mathfrak{N} = \frac{(i-1)\mu+\eta}{i\nu+\vartheta}\mathfrak{M};\ \text{etc.}$$

ist, zu finden.

Die gesuchte Summe heiße y, so daß

$$y = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B}u + C\mathfrak{C}u^2 + D\mathfrak{D}u^3 + \text{etc.}$$

ist. Man nehme die Reihe

$$A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + \text{etc.}$$

und setze ihre Summe z, so ist aus (87) wenn man $ux = s$ macht,

$$z = kAs^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{mk-nh}{mn}} \int s^{\frac{k}{n}-1} \partial s (n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1}$$

das Integral so genommen, daß $z = A$ werde für $s = 0$.

Man multiplicire nun die Reihe

$$z = A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + \text{etc.}$$

durch $P\partial x$, wo P eine Function von x ist, und nehme die Integrale, indem man u als unveränderlich betrachtet, in Beziehung auf x, so entsteht

$$\int Pz\partial x = A\int P\partial x + Bu\int Px\partial x + Cu^2\int Px^2\partial x + \ldots\ldots + Nu^i\int Px^i\partial x + \text{etc.}$$

Läßt sich nun die Function P so bestimmen, daß die Integrale innerhalb gewisser Gränzen (von einem gewissen Werthe der veränderlichen x bis zu einem andern) genommen,

$$\int Px\partial x = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

$$\int Px^2\partial x = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}\int Px\partial x = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

$$\int Px^3\partial x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}\int Px^2\partial x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

überhaupt

$$\int Px^i\partial x = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\int Px^{i-1}\partial x = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

ist, so wird

$$\int Pz\partial x = \left(A + \frac{B\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}u + \frac{C\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}u^2 + \text{etc.}\right)\int P\partial x$$
$$= \frac{y}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$$

olglich

$$y = \frac{\mathfrak{A}\int Pz\partial x}{\int P\partial x}$$

Um die Function P so zu bestimmen, daß die an-ezeigten Relationen Statt haben, bemerke man, daß, veil die Gleichung

$$\int Px^i\partial x = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\int Px^{i-1}\partial x = \frac{(i-1)\mu+\eta}{i\nu+\vartheta}\int Px^{i-1}\partial x$$

nur innerhalb gewisser Werthe von **x** gilt, man über-haupt annehmen kann, es sey

$$(i\nu+\vartheta)\int Px^i\partial x = ((i-1)\mu+\eta)\int Px^{i-1}\partial x + x^iQ$$

wo Q eine Function von x ist, wofern nur das Glied x^iQ für die Gränzen der Integrale verschwindet. Differentiirt man die letzte Gleichung, und dividirt bei-derseits mit x^{i-1}, so wird

$$(i\nu+\vartheta)Px\partial x = ((i-1)\mu+\eta)P\partial x + x\partial Q + iQ\partial x$$

Da diese Gleichheit für jeden Werth von i be-stehen muß, so entstehen daher die beiden folgenden Gleichungen

$$\nu Px\partial x = \mu P\partial x + Q\partial x$$

und

$$\vartheta Px\partial x = (\eta-\mu)P\partial x + x\partial Q$$

Aus der ersten folgt

$$P\partial x = -\frac{Q\partial x}{\mu-\nu x}$$

aus der anderen aber

$$P\partial x = -\frac{x\partial Q}{\eta-\mu-\vartheta x}$$

und aus diesen

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x(\eta - \mu - \vartheta x)}{x(\mu - \nu x)} = \frac{(\eta - \mu)\partial x}{\mu x} - \frac{(\vartheta\mu + \mu\nu - \eta\nu)\partial x}{\mu(\mu - \nu x)}$$

woraus durch Integration

$$Q = x^{\frac{\eta}{\mu} - 1} (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1} \times \text{Const.}$$

wird. Setzt man, um $P\partial x$ positiv zu erhalten, Const. $= -1$ (eine allgemeinere Annahme derselben, etwa $= -C'$ ist nicht nöthig, weil C' aus der Rechnung von selbst wieder weggehen würde), also

$$Q = -x^{\frac{\eta}{\mu} - 1} (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1}$$

so wird

$$P\partial x = x^{\frac{\eta}{\mu} - 1} \partial x (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}}$$

Da nun überhaupt

$$(i\nu + \vartheta)\int P x^i \partial x = ((i - 1)\mu + \eta)\int P x^{i-1}\partial x$$
$$- x^{i + \frac{\eta}{\mu} - 1} (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1}$$

so zeigt sich, daß, wenn die Integrale von $x = 0$ bis $x = \frac{\mu}{\nu}$ genommen werden, die Relation

$$(i\nu + \vartheta)\int P x^i \partial x = ((i - 1)\mu + \eta)\int P x^{i-1}\partial x$$

Statt findet, weil nämlich für jene Werthe von x der algebraische Theil der vorigen Gleichung verschwindet, wofern nur

$$i + \frac{\mu}{\eta} - 1 > 0$$

und zugleich $$\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$$

ist. Werden diese Bedingungen, die erste auch für den kleinsten Werth von $i = 1$, erfüllt, so ist

$$y \int x^{\frac{\eta}{\mu}-1} \partial x (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}$$

$$= \mathfrak{A} \int x^{\frac{\eta}{\mu}-1} z \partial x (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}$$

›o z aus der Summe der Reihe $A + Bs + Cs^2$ $+ Ds^3 +$ etc. bekannt ist, und aus derselben hervor- eht, wenn $s = ux$ gesetzt wird. Bey der Integra- on von $\int x^{\frac{\eta}{\mu}-1} z \partial x (\mu - \nu x)^{\frac{\vartheta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}$ wird dann u als onstant betrachtet, und die Integrale selbst, wodurch bestimmt wird, von $x = 0$ bis $x = \frac{\mu}{\nu}$ erstreckt.

Die Function Q geht zwar nicht selbst in die Schlußformel ein, ihre Kenntniß ist aber doch nöthig, m die Gränzen der Integrale festzusetzen. Wenn μ der $\nu = 0$ ist, so muß sie besonders bestimmt werden.

Im ersten Falle ist

$$\frac{\partial Q}{Q} = -\frac{\partial x(\eta - \vartheta x)}{\nu xx} = \frac{\vartheta \partial x}{\nu x} - \frac{\eta \partial x}{\nu xx}$$

›oraus $Q = e^{\frac{\eta}{\nu x}} x^{\frac{\vartheta}{\nu}}$, also $x^1 Q = e^{\frac{\eta}{\nu x}} x^{1+\frac{\vartheta}{\nu}}$ wird, wel- ›es nicht $= 0$ werden kann, außer wenn $\frac{\eta}{\nu x} = -\infty$, lso $x = 0$ wird.

In dem andern Falle, wo $\nu = 0$ ist, hat man

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x(\eta - \mu - \vartheta x)}{\mu x} = \frac{\eta - \mu}{\mu} \cdot \frac{\partial x}{x} - \frac{\vartheta \partial x}{\mu}$$

nd hieraus $Q = e^{-\frac{\vartheta x}{\mu}} x^{\frac{\eta}{\mu}-1}$, mithin $x^1 Q = e^{-\frac{\vartheta x}{\mu}} x^{1+\frac{\eta}{\mu}-1}$, elches, wenn $\frac{\vartheta}{\mu}$ positiv ist, für $x = \infty$ verschwindet,

für ein negatives $\frac{\vartheta}{\mu}$ hingegen für $x = -\infty$. Da also in beiden Fällen $x^i Q$ nur für einen Werth von x verschwindet, so ist nicht nöthig, sich mit der Bestimmung von $P\partial x$ weiter aufzuhalten.

Weil übrigens die Relationen der Glieder in den beiden Coefficientenreihen A, B, C, D, u. s. w., und 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, u. s. w., einander vollkommen ähnlich sind, so entsteht daher, wenn man jene Reihe unter sich vertauscht, noch ein anderer Ausdruck für y, so daß man also hierdurch zwey Integralformeln für die Summe erhält.

100. Man sieht leicht, daß mit dem so eben aufgelös'ten Problem zugleich das folgende aufgelös't ist:

Es ist die Summe der Reihe

$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} \ldots = X$

gegeben, man soll die Summe der Reihe A𝔄 + B𝔅u + Cℭu^2 + D𝔇u^3 + etc. finden, deren Coefficienten entstehen, wenn die Coefficientenreihe jener A, B, C, D.... Glied für Glied in die gleichstelligen Glieder der Reihe 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, ..., zwischen welchen die in (100) angezeigten Relationen Statt haben, multiplicirt wird. Die vorhin durch z bezeichnete Größe ist nämlich das, worin sich X verwandelt, wenn darin ux statt x gesetzt wird.

101. Exempel. Die Summe der unendlichen Reihe $s + \frac{1}{2}.\frac{s^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{s^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{s^7}{7} + \text{etc.}$ zu finden.

Man setze $s^2 = u$, so wird die Reihe so ausgedrückt

$$\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{u}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{u^2}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{u^3}{7} + \text{etc.}\right).\sqrt{u}$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe heiße y. Aus (91) oder sonst woher ist bekannt, daß, wenn

$$1 + \frac{1}{2}ux + \frac{1.3}{2.4}u^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}u^3x^3 + \text{etc.} = z$$

gesetzt wird, $z = (1 - ux)^{-\frac{1}{2}}$ ist. In (99) ist also

$\mathfrak{A} = 1$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{5} = \frac{3}{5}\mathfrak{B}$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{7} = \frac{5}{7}\mathfrak{C}$; u. s. w., folglich $\mu = 2$, $\eta = 1$, $\nu = 2$, $\vartheta = 1$, $\frac{\eta}{\mu} - 1 = -\frac{1}{2}$, $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} = 0$. Hier werden also die Bedingungen $1 + \frac{\eta}{\mu} - 1 > 0$ und $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$ erfüllt, und es wird

$$y\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x = \int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1 - ux)^{-\frac{1}{2}}$$

Da von $x = 0$ bis $x = \frac{\mu}{\nu} = 1$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x = 2$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1 - ux)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\text{Arc.}\cos(1 - 2u)$$

$$= \frac{2}{u^{\frac{1}{2}}}\text{Arc}\sin.u^{\frac{1}{2}}$$

so wird $y = \frac{\text{Arc.}\sin.u^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}}$, also $y\sqrt{u} = \text{Arc.}\sin u^{\frac{1}{2}} =$ Arc. sin s, mithin

$$s + \frac{1}{2}.\frac{s^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{s^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{s^7}{7} + \text{etc.}$$

$$= \text{Arc.}\sin s$$

wie bekannt.

102. Exempel. Die Reihe

$$1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.1^2}{2^2.4^2} + \frac{1^2.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1^2.1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} + \text{etc. in in}$$

zu summiren.

Man drücke die Reihe so aus

$$1 + \frac{1^2}{2^2}\left(1 + \frac{1^2}{4^2} + \frac{1^2.3^2}{4^2.6^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{4^2.6^2.8^2} + \text{etc.}\right)$$

und setze

$$1 + \frac{1^2}{4^2}u + \frac{1^2.3^2}{4^2.6^2}u^2 + \frac{1^2.3^2.5^2}{4^2.6^2.8^2}u^3 + \text{etc.} = y.$$

Nimmt man nun

$$z = 1 + \frac{1}{4}ux + \frac{1.3}{4.6}u^2x^2 + \frac{1.3.5}{4.6.8}u^3x^3 + \text{etc.}$$

so ist aus (92) $z = \frac{2(1-\sqrt{(1-ux)})}{ux}$, und in (9

$\mathfrak{A} = 1$, $\eta = 1$, $\mu = 2$, $\vartheta = 2$, $\nu = 2$, also $\frac{\eta}{\mu} - 1 =$

$-\frac{1}{2}$, $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} = \frac{1}{2}$, mithin $i + \frac{\eta}{\mu} - 1$, für $i = 1$

> 0 und $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$. Es wird also

$$y\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(2-2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{u}\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(2-2x)^{\frac{1}{2}}(1-(1-ux))$$

oder

$$y\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{u}\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-(1-ux))$$

Das Integral, welches sich rechter Hand des Gleichheitszeichens befindet, hängt im allgemeinen von der Rectification der Ellipse ab. Da hier aber nur der Werth von y für u = 1 gesucht wird, und über dieses u bey der Integration als constant zu betrachten ist, so kann man auch vor der Integration in dem

Diffe

Differentialfactor $u = 1$ setzen, um jenen Werth von y, welcher σ heißen mag, zu erhalten. Es wird also

$$\sigma \int x^{-\frac{1}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}} = 2\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x) - 2\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x)$$

Es ist (Integralformel, 59. V. und 55.)

$$\int x^{-\frac{1}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\text{Arc.sin.vers.}2x + \text{Const.}$$

also von $x = 0$ bis $x = 1 = \frac{\mu}{\nu}$ genommen

$$= \frac{1}{2}\pi.$$

Ferner (Ebendaselbst, 59. I. und 55.)

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \text{Arc.sin.vers.}2x + C'$$

und

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x) = -2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C''$$

Daher

$$\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}} - \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x) = 2x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} - \text{Arc. sin. vers. } 2x + C' - C''$$

Da $-2x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}$, so ist der algebraische Theil der Integralgröße $= 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}$ also $= 0$ für $x = 0$. Da die ganze Größe für $x = 0$ verschwinden muß, so wird $C' - C'' = 0$, mithin

$\int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x)^{\frac{1}{2}} - \int x^{-\frac{3}{2}} \partial x (1-x)$ von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen $4 - \pi$, folglich

$$\frac{1}{2}\pi\sigma = 8 - 2\pi$$

und $1 + \frac{1}{4}\sigma$, welches die Summe der vorgegebenen Reihe ist, $= \frac{4}{\pi}$.

103. Die eben gefundene Summe wird auch so erhalten.

Man nehme

$$z = 1 - \frac{1}{2}ux - \frac{1.1}{2.4}u^2x^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}u^3x^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}u^4x^4 - \text{etc.}$$

$$= \sqrt{(1 - ux)}$$

so ist,

$$y = 1 + \frac{1^2}{2^2}u + \frac{1^2.1^2}{2^2.4^2}u^2 + \frac{1^2.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}u^3 + \frac{1^2.1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}u^4$$

$+$ etc. gesetzt, in (99) $\mathfrak{A} = 1$; $\mathfrak{B} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}$;

$\mathfrak{C} = -\frac{1.1}{2.4} = \frac{1}{4}\mathfrak{B}$; $\mathfrak{D} = -\frac{1.1.3}{2.4.6} = \frac{3}{6}\mathfrak{C}$; u. s. w.

Demnach $\eta = -1$, $\mu = 2$, $\vartheta = 0$, $\nu = 2$, und $\frac{\eta}{\mu} - 1 = -\frac{3}{2}$, $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} = \frac{1}{2}$. Hier wird also zwar die Bedingung $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$, aber nicht die $i + \frac{\eta}{\mu} - 1 > 0$ für $i = 1$ erfüllt, sondern letztere erst für $i = 2$ und größere Werthe von i. Deshalb kann man y nicht durch die Endformel in (99) finden, sondern man muß zu den Grundformeln zurückgehen.

Es war aber

$$\int Pz\partial x = A\int P\partial x + Bu\int Px\partial x + Cu^2\int Px^2\partial x + \text{etc.}$$

Da die Relation $\int Px\partial x = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\int P\partial x$ vermöge des vorigen nicht Statt hat, wohl aber die folgenden

$$\int Px^2\partial x = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}\int Px\partial x;\ \int Px^3\partial x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}\int Px^2\partial x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}\int Px\partial x.$$

$\int Px^4\partial x = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}}\int Px^3\partial x = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}}\int Px\partial x$; u. s. w. so erhält man

$$\int Pz\partial x = A\int P\partial x + \left(Bu + \frac{C\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}u^2 + \frac{D\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}u^3 + \text{etc.}\right)\int Px\partial x$$

d. i.

$$= A\int P\partial x + \frac{y - A\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.\int Px\partial x$$

woraus

$$y\int Px\partial x = \mathfrak{B}\int Pz\partial x - A\mathfrak{B}\int P\partial x + A\mathfrak{A}\int Px\partial x$$

wird, die Integrale von $x = 0$ bis $x = \frac{\mu}{\nu}$, hier $= 1$, genommen.

In unserem Falle ist

$$P\partial x = x^{-\frac{3}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$Px\partial x = x^{-\frac{1}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$Pz\partial x = x^{-\frac{3}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}(1 - ux)^{\frac{1}{2}}$$

und, weil bloß σ, der Werth von y für $u = 1$, gesucht wird,

$$= x^{-\frac{3}{2}}\partial x(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}\partial x(1 - x)$$

Dadurch wird nun

$$\int Px\partial x = -2^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\,\text{Arc.sin.vers.}2x + C'$$
$$\int Px\partial x = 2^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}}.\text{Arc.sin.vers.}2x$$

ohne Constans, weil es für $x = 0$ schon verschwindet.

$$\int Pz\partial x = -2^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C''.$$

also $\mathfrak{B}\int Pz\partial x - A\mathfrak{B}\int P\partial x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\mathfrak{B}(-2^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\text{Arc.sin.vers.}2x + C'' - C')$$

Da dieser Ausdruck 0 werden muß für $x = 0$, so wird

wie in (102) $C'' - C' = 0$, und wenn man jetzt $x = 1$, und für $\mathfrak{B}$ und $A\mathfrak{A}$ ihre Werthe $-\frac{1}{2}$ und 1 setzt

$$\sigma \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

also

$$\sigma = \frac{4}{\pi}$$

wie vorhin.

Die Summe unserer Reihe, welche in der Hindenburgischen Bezeichnungsart der Binomialcoefficienten so ausgedruckt wird

$1^2 + (\frac{1}{2}\mathfrak{A})^2 + (\frac{1}{2}\mathfrak{B})^2 + (\frac{1}{2}\mathfrak{C})^2 + (\frac{1}{2}\mathfrak{D})^2 +$ etc. in inf., läßt sich auch durch den von Lagrange gefundenen und in dem Art., Binomial-Coefficienten, 17. vorgetragenen Satz erhalten. Dazu aber bedarf es eines Ausdrucks für die Binomialcoefficienten, welcher die Interpolation derselben möglich macht. Ein solcher findet sich folgendergestalt.

Aus 87. des Artikels, Integralformel, ergiebt sich leicht, wenn man dort $a = 1$, $n = r$ setzt, daß zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = 1$ ist

$$\int x^{m-1} \partial x (1-x)^r = \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots r}{m(m+1)(m+2)(m+3) \ldots (m+r)}$$

wo aber erfordert wird, daß m nicht < 1 und r positiv sey. Macht man hier nun $m + r = n + 1$, also $m = n - r + 1$, so wird, wenn man die Folge der Factoren im Nenner umkehrt,

$$\int x^{n-r} \partial x (1-x)^r = \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots r}{(n+1)n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)}$$

also

$$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots r} = \frac{1}{(n+1)\int x^{n-r} \partial x (1-x)^r}$$

Es ist aber $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots r}$ der rte Bi-
nomialcoefficient aus der Potenz n, und da derselbe
auch $= \frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots n-r}$, so erhält man für ihn
ioch den Ausdruck $\frac{1}{(n+1)\int x^r \partial x(1-x)^{n-r}}$, wenn man
ıämlich in dem vorhergehenden $n-r$ statt r schreibt.
Jeder dieser beiden Ausdrücke kann nun zur Interpo-
ation der Reihe der Binomialcoefficienten einer gewis-
en Potenz dienen, indem r ein positiver Bruch seyn
ann.

Die Summe der Reihe

$$1^2 + ({}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B})^2 + ({}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C})^2 + \text{etc. in inf.}$$

t nun zufolge des vorhin angeführten Satzes ${}^{1}\overset{-\frac{1}{2}}{\mathfrak{A}}$, also
er Coefficient zu der Stelle $\frac{1}{2}$ in der Potenz 1; folg-
ch, wenn man $n=1$, und $r=\frac{1}{2}$ macht, nach dem
nen oder dem andern Ausdrucke $= \frac{1}{2\int x^{\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{\frac{1}{2}}}$
as Integral von $x=0$ bis $x=1$ genommen. Es
t aber $2\int x^{\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{\frac{1}{2}}$ von $x=0$ an genommen die
rea eines Segments, dessen Sagitte oder Sinus ver-
s x ist, in einem Kreise, dessen Durchmesser $=1$;
so für $x=1$, die ganze Kreisfläche $=\frac{1}{4}\pi$. Daher

$$+ ({}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B})^2 + ({}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C})^2 + \text{etc.} = \frac{1}{\pi:4} = \frac{4}{\pi}\,{}^{*)}.$$

*) In den Institut. calc. diff. P. II. c. XVII. §. 402.
:emp. III. findet Euler für den Binomialcoefficienten der nten

$$1 = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1.1}{2.2} - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4} - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.4.4} - \text{etc.}\right)$$

woraus σ wie vorhin folgt.

Den Gebrauch, welchen Euler von der eben summirten Reihe zur Transformation der Reihe für den elliptischen Quadranten gemacht hat, sehe man in dessen Opuscul. varii argumenti, T. II. p. 138. u. folgg.

Es ist ganz allgemein $\int \frac{\partial x \sqrt{(1-ux)}}{\sqrt{x(1-x)}} \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$ der halbe Umfang einer Ellipse, deren halbe große Axe $=1$, halbe kleine $=\sqrt{(1-u)}$ ist.

105. Exempel. Die Reihe

$$1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \text{etc. in inf.}$$

zu summiren.

Wenn man hier

$$1 - \frac{1^2}{2^2}u + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}u^2 - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}u^3 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}u^4 - \text{etc.} = y$$

setzt, und

$$z = 1 - \frac{1}{2}ux + \frac{1.3}{2.4}u^2x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}u^3x^3 + \text{etc.} = (1+ux)^{-\frac{1}{2}}$$

nimmt, so findet sich ganz so wie in (104)

$$y\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+ux)^{-\frac{1}{2}}$$

die Integrale innerhalb der Gränzen $x=0$, und $x=1$ genommen.

Das Integral rechter Hand hängt für jeden Werth von u von der Rectification der Ellipse ab. Für $u=1$ sey σ der Werth von y, so wird

$$\sigma\int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-xx)^{-\frac{1}{2}}$$

d. i.

$$\pi\sigma = \int x^{-\frac{1}{2}}\partial x(1-xx)^{-\frac{1}{2}}$$

Setzt man $x = z^2$, so wird

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{x(1-xx)}} = 2\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$$

von $z=0$ bis $z=1$ genommen.

Es ist $\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$ von $z=0$ bis $z=1$ die Länge der rechtwinkligen Elastica. Man sehe Jak. Bernoulli's Werke T. II. S. 964. Setzt man also jene Länge $= A$, so wird

$$\sigma = \frac{2A}{\pi}.$$

Stirling findet (Method. different. Prop. XI. Exempl. IV.) $A = 1,3110287771 46 \ldots\ldots\ldots$ Daraus ergiebt sich $\sigma = 0,834626841674 \ldots\ldots\ldots$

Man kann diese Summe auch durch das bestimmte Integral $\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}\begin{bmatrix}z=0\\z=1\end{bmatrix}$ ausdrucken.

Aus (Integralformel, 64.) nämlich folgt, daß, innerhalb der Gränzen $x=0$ und, $x=1$, ist

$$\int\frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}\cdot\int\frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Setzt man hier $x = z^\lambda$, wo λ positiv ist, wodurch die Gränzen nun $z=0$, und $z=1$ werden, so wird erhalten

$$\lambda\lambda\int\frac{z^{2\lambda n+\lambda-1}\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}}\cdot\int\frac{z^{2\lambda n+2\lambda-1}\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und wenn man jetzt $2\lambda n+\lambda-1=\mu$ setzt, wodurch $2\lambda n+2\lambda-1=\mu+\lambda$, und $(2n+1)\lambda=\mu+1$ wird, so entsteht

$$\int\frac{z^\mu\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}}\cdot\int\frac{z^{\mu+\lambda}\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\lambda})}}=\frac{1}{\lambda(\mu+1)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Nimmt man hier $\mu=0$, $\lambda=2$, und setzt den Werth des Integrals $\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$, von $z=0$ bis $z=1$ genommen, $=B$, so folgt

$$AB=\frac{1}{4}\pi$$

also
$$A=\frac{\pi}{4B}$$

und
$$\sigma=\frac{1}{2B}.$$

Die Größe B, welches die Ordinate zu dem Endpuncte der rectangulären Elastica ist, hat Stirling a. a. O. Exemp. III. gleichfalls berechnet, und $=$ 0,59907011736 ..... gefunden. Gauß hat seine Rechnung bestätigt in der Abhandlung Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. Commentatt. Göttingens. a. a. 1812.

106. Durch die Rectification der Ellipse werden die Größen A und B folgendergestalt bestimmt.

Es ist ganz allgemein

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}+\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}=\int\frac{(1+z^2)\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$$
$$=\int\partial z\sqrt{\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)}$$

Es sey $1-z^2=u^2$, also $z^2=1-u^2$, und $z=\sqrt{(1-uu)}$; $\partial z=-\frac{u\partial u}{\sqrt{(1-uu)}}$, so ist

$$\int\partial z\sqrt{\left(\frac{1+zz}{1-zz}\right)}=-\int\partial u\sqrt{\left(\frac{2-uu}{1-uu}\right)}$$

Nimmt man $\int \partial z \sqrt{\left(\frac{1+zz}{1-zz}\right)}$ von $z=0$ bis $z=1$, so muß man $\int \partial u \sqrt{\left(\frac{2-uu}{1-uu}\right)}$ von $u=1$ bis $u=0$ nehmen der Gleichung $1-z^2=u^2$ gemäß. Nun weiß man aber auch, daß wenn man die Gränzen eines Integrals umkehrt, das Integral dadurch den entgegengesetzten Werth von dem, welchen es vorhin hatte, bekommt. Denn der Werth des vollständigen Integrals $F(x)+C$, wo F das Functionszeichen ist, von $x=a$ bis $x=b$ genommen, ist $= F(b)-F(a)$, von $x=b$ bis $x=a$ genommen aber $F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a))$.

Hiernach wird also

$$\int \partial z \sqrt{\left(\frac{1+zz}{1-zz}\right)} \begin{bmatrix} z=0 \\ z=1 \end{bmatrix}$$

$$= \int \partial u \sqrt{\left(\frac{2-uu}{1-uu}\right)} \begin{bmatrix} u=0 \\ u=1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) . \int \partial u \sqrt{\left(\frac{1-\frac{1}{2}uu}{1-uu}\right)} \begin{bmatrix} u=0 \\ u=1 \end{bmatrix}$$

Es ist, wie sich aus (Rectification, 8) leicht ergiebt, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) . \int \partial u \sqrt{\left(\frac{1-\frac{1}{2}uu}{1-uu}\right)}$ von $u=0$ bis $u=1$ genommen, der Quadrant einer Ellipse, für welche $a=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $e^2=\frac{1}{2}$, also $b=a\sqrt{(1-e^2)} = \frac{1}{2}$. Folglich ist $2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \int \partial u \sqrt{\left(\frac{1-\frac{1}{2}uu}{1-uu}\right)} \begin{bmatrix} u=0 \\ u=1 \end{bmatrix}$ die halbe Peripherie einer Ellipsen, deren Axe $\sqrt{2}$ und 1 sind. Hieraus erhellt die Richtigkeit der Behauptung Stirlings a. a. O. Exempl. IV.

Setzt man den Quadranten einer Ellipse, deren halbe Axen $a=1$, $b=\sqrt{\frac{1}{2}}$ sind, $=E$, so ist der Quadrant einer ihr ähnlichen Ellipse, deren halbe Axen $a=\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$b = \frac{1}{2}$ sind, $E\sqrt{\frac{1}{2}}$ und die Länge der halben Peripherie $= 2E\sqrt{\frac{1}{2}} = E\sqrt{2}$. Vermittelst des jetzt und in (105) erwiesenen hat man nun

$$A + B = E\sqrt{2}$$

und

$$AB = \frac{1}{4}\pi$$

woraus, weil $A > B$,

$$A = \frac{E\sqrt{2} + \sqrt{(2EE - \pi)}}{2}$$

$$B = \frac{E\sqrt{2} - \sqrt{(2EE - \pi)}}{2}$$

folgt. Sucht man also einen Winkel ψ so, daß $\sin\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{E\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{E} \sin 45^\circ$ ist, so wird

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \cot\frac{1}{2}\psi$$

$$B = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \tang\frac{1}{2}\psi.$$

Die Größe E kann man aus einer Tafel (Tab. VIII.) in Legendre's Exercices de calc. intégr. T. III nehmen. Sie ist $= 1{,}350643881048..$, und log. vulg. $E = 0{,}130540885400..$ zufolge Tab. I. eben daselbst. Damit finden sich A und B wie vorhin angegeben ist.

107. Es ist noch ein Weg übrig, die Summe unserer Reihe zu finden, nämlich die Darstellung der bestimmten Integrale durch die von Kramp (nach Arbogast) sogenannten Factoriellen (Facultäten), wobei Euler in seiner Integralrechnung, T. I. c. IX., und in vielen, den akademischen Sammlungen einverleibten Schriften gehandelt hat, und die von den Analysten nach ihm, unter andern von Legendre und Gauß, fleißig bearbeitet, zum Theil vereinfacht, und beträchtlich erweitert worden ist. Einen Fundamentalsatz dieses Theorie, welcher hier gebraucht wird, werde ich auf

eine andere Art, als von jenen Analysten geschehen ist, zu begründen suchen.

Es ist, wenn man $(1-x^r)^n$ nach dem Binomischen Lehrsatze entwickelt,

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^r)^n = \frac{x^m}{m} - \frac{n}{1}\cdot\frac{x^{m+r}}{m+r}$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{x^{m+2r}}{m+2r} - \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{x^{m+3r}}{m+3r}$$
$$+ \text{etc.} \ldots + C.$$

Sind also m und r positive Zahlen, so hat man innerhalb der Gränzen $x=0$ und $x=1$

$$\int x^{m-1}\partial x(1-x^r)^n = \frac{1}{m} - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{m+r} + \frac{n.n-1}{1.\ 2}\cdot\frac{1}{m+2r}$$
$$- \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{1}{m+3r} + \text{etc.}$$

d. i., vermöge des in der Anmerkung zu (39.) angeführten Satzes

$$= \frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n.r^n}{m(m+r)(m+2r)(m+3r)\ldots(m+nr)}$$

wo aber vorausgesetzt wird, daß n eine ganze positive Zahl ist. Schreibt man jetzt mr statt m, so wird

$$mr\int x^{mr-1}\partial x(1-x^r)^n = \frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)}$$

Soll n hier jeden beliebigen Werth erhalten können, so muß der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens eine solche Gestalt annehmen, wobey sein Werth zwar ungeändert, aber die Beschaffenheit von n, ob es eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist, ohne Einfluß bleibt. Nun bestimmt n in der jetzigen Gestalt des Ausdrucks die Zahl der Factoren im Zähler und Nenner desselben. Kann man also jenen Ausdruck dahin abändern, daß, unbeschadet seines Werthes, die Factorenreihe im Zähler und Nenner nicht abbricht, so kommt die Beschaffenheit von n weiter in keinen Betracht, indem für alle Werthe von n die

Anzahl der Factoren dieselbe (unendlich groß) ist. Jenes wird dadurch erhalten, daß man Zähler und Nenner mit $(n+1)(n+2)(n+3) \ldots\ldots$ etc. in inf. $\times (m+n+1)(m+n+2)(m+n+3) \ldots\ldots$ etc. in inf. multiplicirt. Dadurch wird nämlich

$$mr\int x^{mr-1}\partial x(1-x^r)^n$$

$$= \frac{1(m+n+1)2(m+n+2)3(m+n+3)\ldots\ldots \text{ etc. in inf.}}{(n+1)(m+1)(n+2)(m+2)(n+3)(m+3). \text{ etc. in inf.}}$$

wo n jede beliebige Zahl, nur keine ganze negative seyn kann, wenn der Werth des Integrals nicht unendlich werden soll.

Einen Beweis a posteriori von der Richtigkeit dieses Ausdrucks gewährt der bekannte, aus andern Gründen erweisbare, Wallisische Ausdruck für $\frac{\pi}{2}$. Wenn nämlich $mr-1=0$, $r=2$, $n=-\frac{1}{2}$, also $m=\frac{1}{2}$, $m+n=0$ ist, so wird $mr\int x^{mr-1}\partial x(1-x^r)^n$ $=\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$, welches von $x=0$ bis $x=1$ genommen nach (Integralformel, 64.) $=\frac{\pi}{2}$ ist. Vermöge unserer Formel ist also

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1.\ 1.\ 2.\ 2.\ 3.\ 3.\ \ldots\ldots \text{ etc.}}{\frac{1}{2}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{5}{2}.\ \frac{5}{2}.\ \frac{7}{2}.\ \ldots\ldots \text{ etc.}}$$

$$= \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ \ldots\ldots \text{ etc. in inf.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ \ldots\ldots \text{ etc. in inf.}}$$

welches Wallisens Ausdruck ist.

Bezeichnet man nun mit Gauß (in der unten angeführten Abhandlung) die Gränze, welcher sich die Größe

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots k \,.\, k^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots\ldots(z+k)}$$

bey unendlich wachsendem k ohne Ende nähert, durch Πz, so verwandelt sich die obige Gleichung in diese

$$mr\int x^{mr-1}\partial x(1-x^r)^n = \frac{\Pi m.\Pi n}{\Pi(m+n)}$$

Ist $mr - 1 = 0$, $r = 4$, $n = -\frac{1}{2}$, also $m = \frac{1}{4}$, $m + n = -\frac{1}{4}$, so entsteht hieraus

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\Pi(\frac{1}{4}).\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{4})}$$

und auf ähnliche Art, wenn $mr - 1 = 2$ ist,

$$\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\Pi(\frac{3}{4}).\Pi(-\frac{1}{2})}{3\Pi(\frac{1}{4})}$$

Die Werthe der Function Πz für negative gebrochene Werthe von z ergeben sich aus denen für positive gebrochene z. Da nämlich der obigen Erklärung zufolge

$$\frac{\Pi(z+1)}{\Pi z} = \frac{(z+1)k}{(z+1+k)} = \frac{z+1}{1+\frac{z+1}{k}}$$

für $k = \infty$ aber $1 + \frac{z+1}{k} = 1$ ist, so wird

$$\Pi(z+1) = (z+1)\Pi z$$

und hiernach, wenn $z = -\frac{1}{2}$ ist

$$\Pi(-\tfrac{1}{2}) = 2\Pi(\tfrac{1}{2})$$

und eben so

$$\Pi(-\tfrac{1}{4}) = \frac{4}{3}\Pi(\tfrac{3}{4})$$

Gauß hat seiner Abhandlung eine Tafel angehängt, welche die Werthe von $\log \Pi z$ von $z=0$ bis $z=1$ für alle Hunderttheile vermittelst der Formeln in (44) und (45) auf zwanzig Decimalstellen berechnet enthält. Eine ähnliche Tafel findet sich in Legendre's Exercices T. II. p. 86. et suivv. für alle Tausendtheile des Intervalls von $z=0$ bis $z=1$; doch sind die Logarithmen nur in 12 Decimalstellen angegeben. Zur Vergleichung ist zu bemerken, daß die Function, welche Gauß durch Πz bezeichnet, bey Legendre $\Gamma(z+1)$ heißt. Vermittelst der einen oder der andern dieser beiden Tafeln lassen sich nun die Werthe der bestimmten Integrale $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$; $\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, und damit die Summe der Reihe $1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} +$ etc. (105) leicht finden.

108. Die Reihe $1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}$ + etc. kommt in dem Ausdrucke für die Zeit des Falls eines schweren Körpers durch den Quadranten eines verticalen Halbkreises vor. Heißt nämlich die Zeit des Falls durch einen Bogen, dessen Endpunct in die Ruhelinie fällt, und dessen Sagitte oder Sinus versus c für den Halbmesser r ist, t, so ist

$$t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{\sqrt{(2r-c)g}} \left(1 - \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{c}{2r-c} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} \cdot \left(\frac{c}{2r-c}\right)^2 - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \left(\frac{c}{2r-c}\right)^3 + \text{etc.}\right)$$

wo g die Höhe des freyen Falls in einer Secunde anzeigt. Für den Quadranten ist $c=r$, daher die Zeit des Falls durch denselben

=

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}\right).\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Diese Zeit verhält sich also zu der Zeit des Falls durch einen unendlich kleinen Bogen, für welchen $c = 0$ ist, wie die Summe der eingeklammerten Reihe zu $\sqrt{\frac{1}{2}}$, d. i., wie 0,8346268 : 0,7071068 oder wie 59 : 50 nächstens. Huygens giebt im ersten Theile seines Horolog. oscillator. (Opp. var. T. I. p. 38) für jenes Verhältniß das annähernde 34:29 an, welches von dem 59:50 nicht sehr abweicht, sagt aber nirgends, wie er solches gefunden habe.

Aus dem gewöhnlichen Ausdrucke für die Zeit t des Falls durch einen Kreisbogen, welcher ist

$$t = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{c}{2r} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\left(\frac{c}{2r}\right)^2 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\left(\frac{c}{2r}\right)^3 + \text{etc.}\right).\sqrt{\frac{r}{2g}}$$

folgt das Verhältniß der Fallzeit durch den Quadranten zu derjenigen durch einen unendlich kleinen Bogen

$$\text{wie } 1 + \frac{1^2}{2^2}.\frac{1}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\frac{1}{4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\frac{1}{8} + \text{etc.} : 1.$$

Die Summe der Reihe im Vordergliede dieses Verhältnisses ergiebt sich aus (105), wenn man dort $u = -\frac{1}{2}$ macht, und ist =

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}.\sqrt{(1-x)(1-\frac{1}{2}x)}}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}.$$ Setzt man $1 - x = zz$, so wird

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}.\sqrt{(1-x)(1-\frac{1}{2}x)}}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

$$= -2^{\frac{1}{2}} \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)(1+zz)}} \begin{bmatrix} z=1 \\ z=0 \end{bmatrix}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}} \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} \begin{bmatrix} z=0 \\ z=1 \end{bmatrix}.$$

Das bestimmte Integral $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} \begin{bmatrix} z=0 \\ z=1 \end{bmatrix}$, welches in (105) als die Länge der rectangulären Elastica angegeben worden, ist auch die Länge eines Quadranten der Lemniscata. S. den Art., Lemniscata. Behält man die Bezeichnung von (105) bey, so wird das Verhältniß der Zeit des Falls durch den Quadranten eines Kreises zu der durch einen unendlich kleinen Bogen $\frac{2A\sqrt{2}}{\pi} : 1 = \frac{2A}{\pi} : \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, welches mit dem vorhin angegebenen einerley ist.

Noch folgt hieraus, daß

$$1 + \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{1}{8} + \text{etc. in inf.}$$
$$= \left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc. in inf.}\right)\sqrt{2}.$$

Ferner ergiebt sich noch leicht, daß die Summe der Reihe $1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} +$ etc. unendlich groß ist. Diese Summe wird nämlich aus (105), wenn man dort $u = -1$ macht, $=$
$\frac{1}{\pi} \int x^{-\frac{1}{2}} \partial x (1-x)^{-1} \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$. Es ist aber $\int \frac{\partial x}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$ so genommen, daß es für $x=0$ verschwindet, $= \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, welches, wenn man $x=1$ setzt, unendlich groß wird.

Wendet man auf die Reihe $1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} +$ etc. die in dem Art., Summirbare Reihe, 22., aus Maclaurin angeführte Regel an, indem man A, B, C das mte, (m+1)te und (m+2)te Glied seyn läßt, so findet sich $\frac{A}{C} = \frac{(2m)^2(2m+2)^2}{(2m-1)^2(2m+1)^2}$, $\frac{A-B}{B-C} = \frac{(2m+2)^2(4m-1)}{(2m-1)^2(4m+3)}$.
Soll $\frac{A}{C} > \frac{A-B}{B-C}$ seyn, so giebt dieses $\left(\frac{2m}{2m+1}\right)^2 > \frac{4m-1}{4m+3}$, d. i., $(2m)^2(4m+3) > (2m+1)^2(4m-1)$, oder $16m^3 + 12m^2 > 16m^3 + 12m^2 - 1$, welches offenbar für jeden Werth von m Statt hat. Nach jener Regel, die Montucla sehr rühmt, wäre also die Summe der Reihe endlich, welches sie doch nicht ist. Für die Anwendung der Gaußischen in jenem Art., 24., mitgetheilten Regel ist $\frac{M'}{M} = \frac{4mm - 4m + 1}{4mm} = \frac{mm - m + \frac{1}{4}}{mm}$, also $A = -1$, $a = 0$. Demnach nehmen, weil $A < a$ ist, zwar die Glieder der Reihe unendlich ab, allein die Summe der Reihe ist, weil $a - A = 1$, dennoch unendlich. Es muß indeß zur Ehre Maclaurin's hier angeführt werden, daß die obige von Montucla ihm zugeschriebene Regel nicht von ihm selbst herrührt. Er nennt aber den Urheber derselben nicht mit Namen.

109. Exempel. Die zu summirende Reihe sey

$$1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} u + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.\ 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} u^2$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} u^3$$
$$+ \text{etc. in inf.}$$

Nimmt man hier

$$z = 1 + \frac{\alpha}{1} ux + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} u^2x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.\ 2.\ 3} u^3x^3 + \text{etc.}$$

$$= (1 - ux)^{-\alpha}$$

so ist in (99.) $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{B} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{C} = \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} = \frac{\beta+1}{\gamma+1}\mathfrak{B}$; u. s. w., also $\mu = 1$, $\eta = \beta$, $\nu = 1$, $\vartheta = \gamma - 1$; ferner $\frac{\eta}{\mu} - 1 = \beta - 1$, $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} = \gamma - \beta - 1$. Damit also die Bedingungen $i + \frac{\eta}{\mu} - 1 > 0$, und $\frac{\vartheta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$, und zwar jene von $i = 1$ an, Statt haben, muß $\beta - 1 > 0$ und $\gamma - \beta > 0$ seyn. Folglich müssen β und γ positiv, und $\gamma > \beta$ seyn. Hat dieses Statt, so wird die Summe der Reihe

$$y = \frac{\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}}{\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\beta-1}}$$

die Integrale von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen, und u als Constante behandelt.

Die Summe σ für den bestimmten Werth $u = 1$ wird hiernach durch folgende Formel dargestellt.

$$\sigma = \frac{\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\beta-1}} \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}.$$

Aus (107) ist

$$\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix} = \frac{\Pi\beta . \Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\beta . \Pi(\gamma-\alpha-1)}$$

und, $\alpha = 0$ gemacht,

$$\int x^{\beta-1}\partial x(1-x)^{\gamma-\beta-1}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}=\frac{\Pi\beta.\Pi(\gamma-\beta-1)}{\beta.\Pi(\gamma-1)}$$

Dadurch wird

$$\sigma=\frac{\Pi(\gamma-1).\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1).\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

wo aber, damit σ nicht unendlich werde, noch erfordert wird, daß $\gamma-\alpha-\beta$ weder 0 noch eine ganze negative Zahl sey. — Der gefundene Ausdruck für σ stimmt mit dem von Gauß auf einem anderen Wege erhaltenen überein.

Ist $\alpha=1$, so wird hieraus

$$1+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\text{etc. in inf.}$$
$$=\frac{\Pi(\gamma-1).\Pi(\gamma-\beta-2)}{\Pi(\gamma-2).\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

folglich, da (107) $\Pi(\gamma-1)=(\gamma-1)\Pi(\gamma-2)$, und eben so $\Pi(\gamma-\beta-1)=(\gamma-\beta-1)\Pi(\gamma-\beta-2)$,

$$=\frac{\gamma-1}{\gamma-\beta-1}$$

wo nur erfordert wird, daß β und γ positiv, und $\gamma>\beta+1$ sey, wenn die Summe nicht unendlich werden soll. Dieses ist die oben in (97) versprochene allgemeinere Begründung der gegebenen Summe. Übrigens kann auch β eine negative ganze Zahl seyn, und dann folgt die Summirung entweder aus der schon mehrmals erwähnten Relation der Binomialcoefficienten, oder aus dem Eulerischen in (11) beygebrachten Satze auf folgende Art.

Es ist, $1-\frac{\beta}{1}x+\frac{\beta(\beta-1)}{1.\ 2}x^2-\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3$ + etc. für die dortige Reihe $a+a'x+a''x^2+$ etc. genommen, $S=(1-x)^\beta$; also $\frac{\partial S}{\partial x}=-\beta(1-x)^{\beta-1}$;

$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \beta(\beta-1)(1-x)^{\beta-2}$; $\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} = -\beta(\beta-1)(\beta-2)(1-x)^{\beta-3}$;

u. s. w. Ferner ist $A = 1$; $A' = \frac{1}{\gamma}$; $A'' = \frac{1.\ 2}{\gamma(\gamma+1)}$;

$A''' = \frac{1.\ 2.\ 3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}$; u. s. w., und es ergiebt sich

$\Delta A = -\frac{\gamma-1}{\gamma}$; $\Delta A^2 = +\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$; $\Delta^3 A = -\frac{\gamma-1}{\gamma+2}$;

überhaupt $\Delta^n A = \frac{\gamma-1}{\gamma+n-1}.(-1)^n$. Dadurch wird

Z oder die Summe der Reihe $1 - \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\beta(\beta-1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2$

$$-\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc.}$$

$$= (1-x)^\beta + \frac{(\gamma-1)}{\gamma}.\frac{\beta}{\gamma}.x(1-x)^{\beta-1}$$

$$+ \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.\frac{\beta(\beta-1)}{1.\ 2}x^2(1-x)^{\beta-2}$$

$$+ \frac{\gamma-1}{\gamma+2}.\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3(1-x)^{\beta-3} + \text{etc.}$$

Ist β eine ganze Zahl, so bricht diese Reihe mit dem

Gliede $\frac{\gamma-1}{\gamma+\beta-1}.x^\beta$ ab. Macht man nun $x=1$, so verschwinden alle Glieder in Z bis auf das letzte, und es wird

$$1 - \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\beta(\beta-1)}{\gamma(\gamma+1)} - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \text{etc.} = \frac{\gamma-1}{\gamma+\beta-1}$$

109[b]. Wenn von Reihen der Art, als von (85) an bis hieher summirt worden, nicht die ganze unendliche Summe, sondern nur die einer bestimmten Anzahl Glieder vom Anfang der Reihe an gesucht wird, so ist die

bisherige Methode so gut wie unausführbar. Wollte man z. E. von der in (92) summirten Reihe die Summe der ersten 1000 Glieder haben, so müßte die Reihe $1 + \frac{1}{4}x + \frac{1.3}{4.6}x^2 +$ etc. von dem Gliede an, welches in x^{1000} multiplicirt ist, summirt, und der Werth dieser Summe für $x = 1$ von dem in (92) gefundenen Totalwerthe abgezogen werden. Man müßte also die Summe von

$$\frac{1.3.5\ldots.1999}{4.6.8\ldots2002}x^{1000}\left(1 + \frac{2001}{2004}x + \frac{2001.2003}{2004.2006}x^2 + \text{etc. in inf.}\right)$$

suchen, wo die Summe der eingeklammerten Reihe $= y$ durch die Gleichung

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}x^{1001}y = 1001\int x^{1000}\partial x(1-x)^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}$$

bestimmt werden würde. Welche menschliche Geduld möchte aber hinreichen, die Entwickelung des Integrals zu vollführen! Man muß also zu den allgemeinen Gliedern dieser Reihen zurückkehren, und aus ihnen die Summe durch die umgekehrte Methode der Differenzen suchen. Die allgemeinen Glieder gehören freylich zu den sogenannten inexplicabeln Functionen, lassen sich aber doch, wie die Factoriellen mit gebrochenen Exponenten (man sehe hier, 58) gleichfalls vermittelst der umgekehrten Methode der Differenzen durch unendliche Reihen darstellen. Diese Reihen müssen aber nach den fallenden Potenzen der Stellenzahl x geordnet seyn, damit für große Werthe von x wenige Glieder der Reihe hinreichen den Werth des $x$ten Gliedes oder die Summe von x Gliedern der gegebenen Reihe zu berechnen, indem, wenn die Summe verlangt wird, für kleine Werthe von x der gemeine Weg der Addition einzuschlagen ist. Es wird also zuerst nöthig seyn, von der Erfindung der allgemeinen Glieder zu handeln.

110. Es seyen T und T′ zwey zunächst auf einander folgende Glieder einer Reihe, zwischen denen die Relation $\frac{x+n}{x} T = T'$, wo x die Stellenzahl von T oder T′, n aber eine unveränderliche Größe ist, Statt hat, man soll irgend ein Glied dieser Reihe angeben.

Da $(x+n)T = xT' = x(T+\Delta T)$, so wird $nT = x\Delta T$.

Man setze der Erinnerung in (109^b) gemäß

$$T = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + \text{etc.}$$

so wird, weil $\Delta x = 1$ ist,

$$\Delta T = A((x+1)^n - x^n) + B((x+1)^{n-1} - x^{n-1}) + C((x+1)^{n-2} - x^{n-2}) + \text{etc.}$$

also, wenn man nach dem Binomischen Lehrsatze entwickelt, und mit x multiplicirt,

$$\begin{aligned} x\Delta T = nAx^n &+ \frac{n(n-1)}{1.\ 2} Ax^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} Ax^{n-2} + \text{etc.} \\ &+ (n-1)B \qquad + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2} B \qquad + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad\qquad + (n-2)C \end{aligned}$$

Da nun

$nT = nAx^n + nBx^{n-1} + nCx^{n-2} + \text{etc.}$ ist, so giebt die Vergleichung der Coefficienten zu den gleichnamigen Potenzen von x,

$$B = \frac{n\,.\,n-1}{1.\ 2} A$$

$$C = \frac{n-1\,.\,n-2}{2.\ 2}\left(B + \frac{n}{3}A\right)$$

$$D = \frac{n-2\,.\,n-3}{3.\ 2}\left(C + \frac{n-1}{3}B + \frac{n(n-1)}{3.\ 4}A\right)$$

$$E = \frac{n-3\,.\,n-4}{4.\ 2}\left(D + \frac{n-2}{3}C + \frac{(n-1)(n-2)}{3.\ 4}B + \frac{n(n-1)(n-2)}{3.\ 4.\ 5}A\right)$$

etc.

wo das Gesetz des Fortgangs klar ist. Der Coefficient A bleibt unbestimmt, und muß in jedem Falle besonders bestimmt werden.

Die vorgetragene Auflösung giebt Stirling Method. diff. Prop. XXVI., und nach ihm Emerson Method. of increments, Probl. XVI. Keiner von beiden sagt, wie er zu der Annahme $T = Ax^n + \text{etc.}$ gekommen ist. Zu dem Ende bemerke ich, daß, da $nT = x\Delta T = x\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{1.2\partial x^2} + \text{etc.}\right)$ ist, man näherungsweise $nT = \frac{x\partial T}{\partial x}$ hat, woraus $T = Ax^n$ folgt, wo A die durch die Integration hereingebrachte Constans ist.

Auf den Fall $n = 1$ ist die gegebene Auflösung nicht anwendbar. Dieses gilt auch, wenn x nicht die Stellenzahl, sondern eine lineare Function derselben ist, weil der Factor $n - 1$ in allen Gliedern außer dem ersten bleibt. Wie man, wenn $n = 1$ ist, helfen kann, wird weiter unten (122) gezeigt werden.

111. Exempel. Die Reihe sey $1, \frac{1}{2}a, \frac{3}{4}b, \frac{5}{6}c, \frac{7}{8}d$, u. s. w., wo a, b, c, d die Glieder der Reihe nach der Ordnung anzeigen, so ist, wenn x die Stelle des Gliedes T ist, $T' = \frac{2x-1}{2x}T = \frac{x-\frac{1}{2}}{x}$ also in (110) $n = -\frac{1}{2}$, und man erhält

$$B = \frac{3}{8}A$$

$$C = \frac{15}{16}\left(B - \frac{1}{6}A\right) = \frac{25}{128}A$$

$$D = \frac{35}{24}\left(C - \frac{3}{6}B + \frac{1}{16}A\right) = \frac{105}{1024}A$$

$$E = \frac{63}{32}\left(D - \frac{5}{6}C + \frac{5}{16}B - \frac{1}{32}A\right) = \frac{1659}{32768}A$$

$$F = \frac{99}{40}\left(E - \frac{7}{6}D + \frac{35}{48}C - \frac{7}{32}B + \frac{7}{384}A\right) = \frac{6237}{262144}A$$

etc.

Mithin ist

$$T = \frac{A}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{3}{8x} + \frac{25}{128x^2} + \frac{105}{1024x^3} + \frac{1659}{32768x^4} + \frac{6237}{262144x^5} + \text{etc.}\right)$$

Um den Coefficienten A zu bestimmen, berechne man ein etwas weit vom Anfange der Reihe entferntes Glied nach dem bekannten Bildungsgesetze der Reihe wirklich, z. E. das 16te. Es ist $\frac{5.9.17.19.23.29}{2^{26}} =$ 0,144464448.... Diesen Werth schreibe man für T, und für x seinen entsprechenden Werth 16, so ist

$$0,144464448 = \frac{A}{4}\left(1 + \frac{3}{8.16} + \frac{25}{128.16^2} + \text{etc.}\right)$$

Die Summe der eingeschlossenen Reihe findet sich = 1,02422627, und dadurch A = 0,564189583.

Dieser Werth ist aber auch $= \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, wie folgen dergestalt erhellt. Man setze x = n, wo n unendlich groß ist, so ist der terminus infinitesimus dem gefundenen Ausdrucke zufolge $= \frac{A}{\sqrt{n}}$; vermöge des Ge

setzes der Reihe aber $= \frac{1.3.5.7 \ldots 2n-1}{2.4.6.8 \ldots 2n}$. Nun ist nach Wallis's bekanntem Ausdrucke $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ der letzte Werth von $\frac{1.3.5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n} \sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$; daher jenes Glied auch $= \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})}}$ ist. Für ein unendlich großes n ist aber $\sqrt{(n+\frac{1}{2})}$ von $\sqrt{n}$ nicht verschieden, daher $A = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,564189583547756 \ldots$

Man hat also

$$T = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left(1 + \frac{3}{8x} + \frac{25}{128x^2} + \frac{105}{1024x^3} + \frac{1659}{32768x^4} + \text{etc.}\right)$$

wodurch nun die etwas weit vom Anfange der Reihe abstehenden Glieder leicht gefunden werden können.

Da (Binomialcoefficienten, 13.) für ${}^{2n}\mathfrak{N}$, den mittelsten Coefficienten in der Potenz 2n, ist

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{1.3.5.7 \ldots 2n-1}{2.4.6.8 \ldots 2n}$$

die Größe rechter Hand aber das $(n+1)$te Glied unserer Reihe darstellt, so wird, wenn man $x = n+1$ macht,

$$\frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}\left(1 + \frac{3}{4(2n+2)} + \frac{25}{32(2n+2)^2} + \frac{105}{128(2n+2)^3} + \frac{1659}{2048(2n+2)^3} + \text{etc.}\right)$$

Hier sind die Coefficienten des Reihenausdrucks bis auf die Vorzeichen einerley mit denen in Laplace's Ausdruck für $\frac{^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ in (54), und lassen sich daher auch durch die daselbst gegebenen Formeln leicht weiter fortsetzen. Man erhält übrigens durch Vergleichung beider Ausdrücke für $\frac{^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)}}\left\{1+\frac{3}{4(2n+2)}+\frac{25}{32(2n+2)^2}+\frac{105}{128(2n+2)^3}+\text{etc.}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(n-\frac{1}{2})}}\left\{1-\frac{3}{4(2n-1)}+\frac{25}{32(2n-1)^2}-\frac{105}{128(2n-1)^3}+\text{etc.}\right\}$$

wo n jeden beliebigen Werth haben kann.

Auch ergiebt sich aus dem Werthe von $\log\frac{^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ woraus die Laplacische Formel für $\frac{^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ in (54) abgeleitet ist, noch leicht folgender Ausdruck für denselben Logarithmen

$$\log\frac{^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}=-\frac{1}{2}\log(n+1)\pi+\frac{3}{4(2n+2)}+\frac{1}{2(2n+2)^2}+\frac{3}{8(2n+2)^3}+\frac{1}{4(2n+2)^4}+\frac{3}{20(2n+2)^5}+\text{etc.}$$

so daß man also in allem vier Reihen für $\log\frac{^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ und eben so viele für $\frac{^{2n}\mathfrak{N}}{2^{2n}}$ hat.

112. Exempel. Die Reihe sey 1, $\frac{1}{4}a$, $\frac{3}{6}b$, $\frac{5}{8}c$, $\frac{7}{10}d$, u. s. w., wo a, b, c...., die vorhergehenden Glieder sind; man sucht den allgemeinen Ausdruck eines Gliedes der Reihe.

Wenn $x-1$ die Stelle von T, also x die Stelle von T' ist, so hat man $T' = \frac{2x-3}{2x}T = \frac{x-\frac{3}{2}}{x}T$; also in (110) $n = -\frac{3}{2}$, und es wird nach gehörig ausgeführter Rechnung

$$T = \frac{A}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x} + \frac{15}{8x^2} + \frac{385}{128x^3} + \frac{4725}{1024x^4} + \frac{228459}{32768x^5} + \frac{2747745}{262144x^6} + \text{etc.}\right)$$

Um A zu bestimmen, suche man das 19te Glied der Reihe, indem man $x-1=19$, also $x=20$ setzt. Es ist $\frac{5.23.29.31.33.35}{2^{34}} = 0{,}006950558$; und man erhält

$$0{,}006950558 = \frac{A}{\sqrt{20}}\left(\frac{1}{20} + \frac{15}{8.20^2} + \frac{385}{128.20^3} + \text{etc.}\right)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{20}} \cdot 0{,}0550947$$

woraus

$$A = 0{,}5641892$$

gefunden wird. Dieser Werth stimmt mit dem in (111) für das dortige A gefundenen in den ersten sechs

Decimalstellen überein, und es läßt sich auch, wie dort zeigen, daß derselbe genau $= \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ ist, in dem für ein unendlich groſses n

$$\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{4.6.8\ldots.2n+2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{(n+1)\sqrt{(n+\frac{1}{2})}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

ist.

113. Die Glieder einer Reihe sind durch die Gleichung $T' = \frac{xx+r}{xx}T$ verknüpft, wo x eine lineare Function der Stellenzahl ist, oder auch die Stellenzahl selbst seyn kann, man soll den allgemeinen Ausdruck eines Gliedes finden.

Da $(xx+r)T = xxT' = xx(T+\Delta T)$, so wird $rT = xx\Delta T$. Hieraus ist näherungsweise $rT = xx\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x$, folglich weil sich x mit der Stellenzahl gleichförmig ändert, also Δx constant ist, $\frac{r}{\Delta x}.\frac{\partial x}{xx} = \frac{\partial T}{T}$ woraus durch Integration $T = Ae^{-\frac{r}{\Delta x}.\frac{1}{x}} = A\left(1 - \frac{r}{\Delta x}.\frac{1}{x} + \text{etc.}\right)$ folgt.

Man setze also

$T = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \text{etc.}$ so ist, wenn man $\Delta x = \omega$ setzt,

$$\Delta T = -\frac{B\omega}{xx} + \frac{B\omega^2}{x^3} - \frac{B\omega^3}{x^4} + \frac{4}{x^5} - \text{etc.}$$
$$-\frac{2C\omega}{x^3} + \frac{3C\omega^2}{x^4} - \frac{4C\omega^3}{x^5} + \text{etc.}$$

$$-\frac{3D\omega}{x^4}+\frac{6D\omega^2}{x^5}-\text{etc.}$$

$$-\frac{4E\omega}{x^5}+\text{etc.}$$

$$-\text{etc.}$$

$$rT = rA + \frac{rB}{x} + \frac{rC}{x^2} + \frac{rD}{x^3} + \frac{rE}{x^4} + \text{etc.}$$

$$xx\Delta T = -B\omega + \frac{B\omega^2}{x} - \frac{B\omega^3}{x^2} + \frac{B\omega^4}{x^3} - \frac{B\omega^5}{x^4} + \text{etc.}$$

$$-\frac{2C\omega}{x}+\frac{3C\omega^2}{x^2}-\frac{4C\omega^3}{x^3}+\frac{5C\omega^4}{x^4}-\text{etc.}$$

$$-\frac{3D\omega}{x^2}+\frac{6D\omega^2}{x^3}-\frac{10D\omega^3}{x^4}+\text{etc.}$$

$$-\frac{4E\omega}{x^3}+\frac{10E\omega^2}{x^4}-\text{etc.}$$

$$-\frac{5F\omega}{x^4}+\text{etc.}$$

$$-\text{etc.}$$

und die Vergleichung der gleichnamigen Potenzen von $\frac{1}{x}$ giebt

$$B = -\frac{rA}{\omega}$$

$$C = \frac{\omega\omega - r}{2\omega}B = -\frac{\omega\omega - r}{2\omega\omega}rA$$

$$D = \frac{(3\omega\omega - r)C - B\omega^3}{3\omega}$$

$$E = \frac{(6\omega\omega - r)D - 4C\omega^3 + B\omega^4}{4\omega}$$

$$F = \frac{(10\omega\omega - r)E - 10D\omega^3 + 5C\omega^4 - B\omega^5}{5\omega}$$

$$G = \frac{(15\omega\omega - r)F - 20E\omega^3 + 15D\omega^4 - 6C\omega^5 + B\omega^6}{6\omega}$$

etc.

wo man das Gesetz des Fortgangs leicht bemerken wird.

Eine andere Auflösung erhält man so. Man bezeichne die successiven Werthe der unbestimmten x, welche sind x, $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, u. s. w., durch x, x_1, x_2, x_3, u. s. w., so ist

$$\Delta \frac{1}{x x_1 x_2 \ldots . x_n} = \frac{1}{x_1 x_2 \ldots . x_n}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x_1 x_2 \ldots . x_n}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+(n+1)\omega}\right)$$

$$= \frac{(n+1)\omega}{x x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}$$

Nun sey

$$T = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x x_1} + \frac{D}{x x_1 x_2} + \frac{E}{x \ldots . . x_3} + \text{etc.}$$

so wird

$$\Delta T = -\frac{B\omega}{x x_1} - \frac{2C\omega}{x x_1 x_2} - \frac{3D\omega}{x \ldots x_3} - \frac{4E\omega}{x \ldots . x_4} - \text{etc.}$$

also

$$xx\Delta T = -\frac{Bx^2\omega}{x x_1} - \frac{2Cx^2\omega}{x x_1 x_2} - \frac{3Dx^2\omega}{x \ldots . x_3} - \frac{4Ex^2\omega}{x \ldots x_4}$$

$$- \text{etc.}$$

Hier sind nun noch $\frac{x^2}{x x_1}$, $\frac{x^2}{x x_1 x_2}$, u. s. w. in andere Brüche, deren Zähler unveränderliche Größen sind, zu zerlegen, damit die Coefficienten A, B, C..... unab-

hän-

ängig von der unbestimmten x ausgedruckt werden önnen. Zu dem Ende sey

$$\frac{xx}{x x_1 x_2 \ldots x_n} = \frac{\mathfrak{A}}{x x_1 x_2 \ldots x_{n-2}} + \frac{\mathfrak{B}}{x x_1 \ldots x_{n-1}} + \frac{\mathfrak{C}}{x x_1 \ldots x_n}$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ noch zu bestimmende Coefficienten sind. Bringt man rechter Hand alles auf einerley Benennung, und setzt statt x_n, x_{n-1} ihre Werthe $x + n\omega$, $x + (n-1)\omega$, so wird

$$\begin{array}{lllll} x^2 = \mathfrak{A}x^2 & + (2n-1)\omega\mathfrak{A} & x & + n(n-1)\omega^2 & \mathfrak{A} \\ & + \mathfrak{B} & & + n\omega & \mathfrak{B} \\ & & & + & \mathfrak{C} \end{array}$$

Hieraus wird $\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{B} = -(2n-1)\omega$, $\mathfrak{C} = nn\omega^2$; so daß

$$\frac{x^2}{x x_1 x_2 \ldots x_n} = \frac{1}{x x_1 \ldots x_{n-2}} - \frac{(2n-1)\omega}{x x_1 \ldots x_{n-1}} + \frac{nn\omega^2}{x x_1 \ldots x_n}$$

Um die Zerlegung von $\frac{xx}{xx_1}$ zu haben, multiplicire man beiderseits mit $x_2 x_3 \ldots x_n$, so wird

$$\frac{xx}{xx_1} = \frac{x_{n-1} x_n}{xx_1} - \frac{(2n-1)\omega x_n}{xx_1} + \frac{nn\omega^2}{xx_1}$$

und wenn man nun $n = 1$ macht, und sich erinnert, daß $x_0 = x$,

$$\frac{xx}{xx_1} = 1 - \frac{\omega}{x} + \frac{\omega^2}{xx_1}$$

Die übrigen Fälle geben sich durch die allgemeine Formel.

Man hat nun

$$rT = rA + \frac{rB}{x} + \frac{rC}{xx_1} + \frac{rD}{xx_1x_2} + \text{etc.}$$

und, wenn man auf die gewiesene Art reducirt,

$$xx\Delta T = -B\omega + \frac{B\omega^2}{x} - \frac{B\omega^3}{x x_1} - \frac{2.4C\omega^3}{x x_1 x_2} - \text{etc.}$$

$$- \frac{2C\omega}{x} + \frac{2.3C\omega^2}{x x_1} + \frac{3.5D\omega^2}{x x_1 x_2} + \text{etc.}$$

$$- \frac{3D\omega}{x x_1} - \frac{4E\omega}{x x_1 x_2} - \text{etc.}$$

woraus durch Vergleichung der Coefficienten zu $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x x_1}$ u. s. w. entsteht

$$B = -\frac{rA}{\omega}$$

$$C = \frac{\omega\omega - r}{2\omega}B$$

$$D = \frac{(2.3\omega\omega - r)C - B\omega^3}{3\omega}$$

$$E = \frac{(3.5\omega\omega - r)D - 2.4C\omega^3}{4\omega}$$

$$F = \frac{(4.7\omega\omega - r)E - 3.9D\omega^3}{5\omega}$$

$$G = \frac{(5.9\omega\omega - r)F - 4.16E\omega^3}{6\omega}$$

etc.

wo das Gesetz des Fortgangs nicht schwer zu über sehen ist.

114. Exempel. Den allgemeinen Ausdruck ei nes Gliedes der Reihe $1, \frac{2.4}{3.3}a, \frac{4.6}{5.5}b, \frac{6.8}{7.7}c, \frac{8.10}{9.9}d,$ u. s. w. zu finden.

Es sey z die Stelle von T, also $z+1$ die von T' so ist

$$T' = \frac{2z(2z+2)}{(2z+1)^2}T$$

Macht man $2z+1=x$, wodurch Δx oder $\omega = 2\Delta z = 2$ wird, so hat man

$$T' = \frac{(x-1)(x+1)}{xx}T$$

$$= \frac{xx-1}{xx}T$$

folglich r in (113) $= -1$. Nach der ersten Auflösung wird nun

$$B = \frac{1}{2}A$$

$$C = \frac{5}{4}B = \frac{5}{8}A$$

$$D = \frac{13C-8B}{6} = \frac{11}{16}A$$

$$E = \frac{25D-32C+16B}{8} = \frac{83}{128}A$$

$$F = \frac{41E-80D+80C-32B}{10} = \frac{143}{256}A$$

$$G = \frac{61F-160E+240D-192C+64B}{12} = \frac{625}{1024}A$$

u. s. w.

Mithin

$$T = A\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{5}{8xx} + \frac{11}{16x^3} + \frac{83}{128x^4} + \frac{143}{256x^5} + \frac{625}{1024x^6} + \text{etc.}\right)$$

Zur Bestimmung von A berechne man das 10te Glied der Reihe wirklich. Es ist $\frac{8^{11}}{5.11^2.13^2.17^2.19^2}$ $= 0{,}80527224$. Durch die Formel für T es zu erhalten, hat man $z = 10$, folglich $x = 21$. Es wird also jenes Glied $= A\left(1 + \frac{1}{2.21} + \frac{5}{8.21.21} + \text{etc.}\right)$ $= A \times 1{,}02530447$, mithin $A = \frac{80527224}{102530447} =$ $0{,}78539816\ldots$ Dieses ist sehr genau der Werth von $\frac{1}{4}\pi$, so daß $A = \frac{1}{4}\pi$, und

$$T = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{5}{8xx} + \frac{11}{16x^3} + \frac{83}{128x^4} + \text{etc.}\right)$$

ist. Wenn x unendlich groß ist, so ergiebt sich hieraus, daß das letzte Glied der Reihe oder das Product $1 \times \frac{8}{9} \times \frac{24}{25} \times \frac{48}{49} \times \frac{80}{81}$ etc. in inf. $= \frac{1}{4}\pi$ ist, welches der von Wallis gefundene Satz ist, den man also auf diese Weise hätte herausbringen können, wenn er noch nicht bekannt gewesen wäre.

Nach der zweyten Auflösung wird

$$B = \frac{1}{2}A$$

$$C = \frac{5}{4}B = \frac{5}{8}A$$

$$D = \frac{25C - 8B}{6} = \frac{31}{16}A$$

$$E = \frac{61D - 64C}{8} = \frac{1251}{128}A$$

$$F = \frac{113E - 216D}{10} = \frac{17559}{256}A$$

$$G = \frac{181F - 512E}{12} = \frac{632385}{1024}A$$

etc.

Demnach ist

$$T = A\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{5}{8xx_1} + \frac{31}{16xx_1x_2} + \frac{1251}{128x\ldots x_3} + \frac{17559}{256x\ldots x_4} + \frac{632385}{1024x\ldots x_5} + \text{etc.}\right)$$

Das 12te Glied der Reihe ist $\frac{16^{10}}{3.(7.13.17.19.23)^2}$ $= 0{,}8019275$. Da für dasselbe $z = 12$ ist, so wird $x = 2z + 1 = 25$, mithin $x_1 = x + \omega = 27$, $x_2 = x + 2\omega = 29$, u. s. w.; daher

$$0{,}8019275 = A\left(1 + \frac{1}{2.25} + \frac{5}{8.25.27} + \frac{31}{16.25.27.29} + \text{etc.}\right)$$

$$= A \times 1{,}0210457$$

woraus A wie vorhin $= 0{,}785398 = \frac{1}{4}\pi$ sich ergiebt.

Da A sich hier, wie in (112) auch noch auf andere Art bestimmen läßt, so zeigt sich, daß, ohngeachtet des starken Anwachsens der Coefficienten in der Reihe für T sowohl hier als in (112) die Reihe in ihrem convergenten Theile sicher zur Berechnung von T gebraucht werde. Man vergleiche oben (39).

115. Wenn die Glieder einer Reihe durch die Gleichung $T' = \frac{xx}{xx + r}T$, wo x dasselbe, wie in

(114) ist, bestimmt werden, den allgemeinen Ausdruck eines Gliedes der Reihe durch x, x_1, x_2, x_3 u. s. w. zu finden.

Da $T' = \frac{xx}{xx + r} T$, so wird $xxT' + rT' = xxT$ oder $xx(T + \Delta T) + rT' = xxT$, woraus $rT' + xx\Delta T = 0$ folgt.

Man setze nun,

$$T = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{xx_1} + \frac{D}{xx_1x_2} + \frac{E}{x \ldots x_3} + \text{etc.}$$

welche Annahme sich auf ähnliche Weise, wie in (113) rechtfertigen läßt, so wird, $x + \Delta x$ oder $x + \omega$ statt x gesetzt

$$T' = A + \frac{B}{x_1} + \frac{C}{x_1x_2} + \frac{D}{x_1x_2x_3} + \frac{E}{x_1 \ldots x_4} + \text{etc.}$$

also

$$rT' = rA + \frac{rB}{x_1} + \frac{rC}{x_1x_2} + \frac{rD}{x_1x_2x_3} + \frac{rE}{x_1 \ldots x_4} + \text{etc.}$$

Ferner ist

$$\Delta T = -\frac{B\omega}{xx_1} - \frac{2C\omega}{xx_1x_2} - \frac{3D\omega}{x \ldots x_3} - \frac{4E\omega}{x \ldots x_4} - \text{etc.}$$

also

$$xx\Delta T = -\frac{Bx\omega}{x_1} - \frac{2Cx\omega}{x_1x_2} - \frac{3Dx\omega}{x_1x_2x_3} - \frac{4Ex\omega}{x_1 \ldots x_4} - \text{etc.}$$

Um hier die unbestimmte x aus den Zählern wegzuschaffen, und zugleich $xx\Delta T$ auf die Form von rT' zu bringen, bemerke man, daß

$$\frac{x}{x_n} = \frac{x}{x + n\omega} = 1 - \frac{n\omega}{x + n\omega} = 1 - \frac{n\omega}{x_n}$$

also

$$\frac{x}{x_1} = 1 - \frac{\omega}{x_1}$$

$$\frac{x}{x_2} = 1 - \frac{\omega}{x_2}$$

u. s. w. ist. Hierdurch wird

$$xx\Delta T = -B\omega + \frac{B\omega^2}{x_1} + \frac{4C\omega^2}{x_1 x_2} + \frac{9D\omega^2}{x_1 x_2 x_3} + \text{etc.}$$
$$- \frac{2C\omega}{x_1} - \frac{3D\omega}{x_1 x_2} - \frac{4E\omega}{x_1 x_2 x_3} - \text{etc.}$$

und vermöge der Gleichung $rT' + xx\Delta T = 0$ erhält man

$$B = \frac{rA}{\omega}$$

$$C = \frac{\omega\omega + r}{2\omega} B = \frac{r(\omega\omega + r)}{\omega.\ 2\omega} A$$

$$D = \frac{4\omega\omega + r}{3\omega} C = \frac{r(\omega\omega + r)(4\omega\omega + r)}{\omega.\ 2\omega.\ 3\omega} A$$

$$E = \frac{9\omega\omega + r}{4\omega} D = \frac{r(\omega\omega + r)(4\omega\omega + r)(9\omega\omega + r)}{\omega.\ 2\omega.\ 3\omega.\ 4\omega} A$$

etc.

wo das Gesetz des Fortgangs klar ist.

Demnach ist

$$T = A\left(1 + \frac{r}{\omega x}\mathfrak{A} + \frac{\omega\omega + r}{2\alpha x}\mathfrak{B} + \frac{4\omega\omega + r}{3\omega x}\mathfrak{C} + \text{etc.}\right)$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ u. s. w. die nächstvorhergehenden Glieder anzeigen.

Stirling hat die Aufgabe und ihre Auflösung, Method. diff., Prop. XXVII; Emerson, Method of Increments, Probl. XVIII.

116. Exempel. Den Werth des Products

$$\frac{2.\,2.\,6.\,6.\,10.\,10.\,14.\,14.\ \text{etc. in inf.}}{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13.\,15.\ \text{etc. in inf.}}$$

zu finden.

Man formire die Reihe 1, $\frac{2.2}{1.3}a$, $\frac{6.6}{5.7}b$, $\frac{10.10}{9.11}c$, $\frac{14.14}{13.15}d$, u. s. w., und suche den allgemeinen Ausdruck eines Gliedes derselben.

Da, wenn z die Stelle des Gliedes T ist,

$$T' = \frac{(4z-2)^2}{(4z-3)(4z-1)}$$

so wird, wenn man $4z-2=x$ macht, wodurch $\omega = \Delta x = 4\Delta z = 4$ ist,

$$T' = \frac{xx}{xx-1}T$$

und man erhält aus (115), wo $r=-1$ ist,

$$T = A\left(1 - \frac{1}{4x}\mathfrak{A} + \frac{15}{8x_1}\mathfrak{B} + \frac{63}{12x_2}\mathfrak{C} + \frac{143}{16x_3}\mathfrak{D} + \frac{255}{20x_4}\mathfrak{E} + \text{etc.}\right)$$

Um A zu bestimmen, berechne man das 13te Glied der Reihe. Es ist $\frac{7.\,17.\,19.\,23.\,2^{24}}{9.\,15.\,29.\,31.\,33.\,37.\,41.\,43} = 1{,}4068706$. Nach dem gefundenen Ausdrucke für T erhält man dafür

$$A\left(1 - \frac{1}{4.50} - \frac{1.15}{4.8.50.54} - \frac{1.15.63}{4.8.12.50.54.58} - \text{etc.}\right)$$

$= A \times 0{,}9948079$. Dieses giebt $A = 1{,}414213\ldots$ oder $=\sqrt{2}$. Wenn z, also auch x unendlich gros wird, so ist das letzte Glied der Reihe $= A$, d. i.,

$$\frac{2.2.6.6.10.10.14.14.\text{ etc. in inf.}}{1.3.5.7.\ 9.11.13.15.\text{ etc. in inf.}} = \sqrt{2}.$$

wie sich aus dem Werthe von $\cos\frac{m\pi}{2n}$ in Cyklometrie (27), wenn man $m = 1$, $n = 2$ nimmt, ergiebt. Kehrt man den Bruch um, und multiplicirt auf beiden Seiten mit $\frac{2}{1}$, so wird

$$\frac{3.5.7.\ 9.11.13\ldots\text{ etc.}}{2.6.6.10.10.14\ldots\text{ etc.}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

wie in dem Art., Summirbare Reihe, 24, III. angegeben ist.

117. Exempel. Die Glieder einer Reihe sind 1; $\frac{2.2}{1.3}a$, $\frac{4.4}{3.5}b$, $\frac{6.6}{5.7}c$, $\frac{8.8}{7.9}d$, u. s. w., den allgemeinen Ausdruck für ein Glied dieser Reihe zu finden.

Es bezeichne z die Stelle des Gliedes T, so ist

$$T' = \frac{4zz}{(2z-1)(2z+1)}T$$

und wenn man $2z = x$ macht,

$$T' = \frac{xx}{xx-1}T$$

Demnach ist in (115) $r = -1$, ferner $\omega = \Delta x = 2\Delta z = 2$, $\underset{1}{x} = x + 2$, $\underset{2}{x} = x + 4$, u. s. w., mithin

$$T = A\left(1 - \frac{1}{2x}\mathfrak{A} + \frac{3}{4(x+2)}\mathfrak{B} + \frac{15}{6(x+4)}\mathfrak{C} + \frac{35}{8(x+6)}\mathfrak{D} + \text{etc.}\right)$$

Zur Bestimmung von A suche man das 10te Glied der Reihe. Es ist $\frac{4^{16}}{5^2.\ 11^2.\ 13^2.\ 17^2.\ 19} =$

1,5300172735. Nach der Formel wird es, weil $x = 2z = 20$ ist, $= A\left(1 - \frac{1}{2.20} - \frac{1.3}{2.4.20.22} - \frac{1.3.15}{2.4.6.20.22.24} - \text{etc.}\right) = A \times 0,9740392454$.

Hieraus folgt $A = 1,57079633 = \frac{1}{2}\pi$; so daß

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ \text{etc. in inf.}}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ \text{etc. in inf.}}$$

wie bekannt.

118. Es lassen sich noch mehrere Sätze, wie die in (110), (113), (115) sind, finden, je nachdem man andere und andere Relationen zwischen den Gliedern der Reihe annimmt; es mag aber an den beygebrachten genug seyn. Es ist noch übrig zu zeigen, wie die summatorischen Glieder solcher Reihen, als von (110) bis hierher betrachtet sind, gefunden werden können.

119. Das summatorische Glied einer Reihe, für welche $T' = \frac{x+n}{x}T$, wo x, wie in (110), die Stelle von T oder T' anzeigt, zu finden.

Es sey die Summe der Reihe bis mit zu dem Gliede ′T, welches T zunächst vorhergeht, s, so erhält aus (13), daß

$$\Delta s = T$$

also $x + 1$ statt x gesetzt

$$\Delta s_1 = T' = \frac{x+n}{x}T$$

mithin

$$\Delta s_1 - \Delta s = \frac{n}{x}T$$

d. i.

$$\Delta\Delta s = \frac{n}{x}\Delta s$$

der

$$x\Delta\Delta s = n\Delta s$$

lso

$$\Sigma(x\Delta\Delta s) = ns$$

st. Um das Integral $\Sigma(x\Delta\Delta s)$ zu finden, integrire
uan theilweise nach der Formel

$$\Sigma u\Delta t = ut - \Sigma \underset{1}{t}\Delta u$$

velche man leicht aus (Differenzenrechnung, 6.) ablei-
tet. Man setze nämlich $u = x$, $\Delta t = \Delta\Delta s$, so ist
$\Delta u = \Delta x = 1$, $t = \Delta s$, $\underset{1}{t} = \underset{1}{\Delta s}$, und

$$\Sigma(x\Delta\Delta s) = x\Delta s - \Sigma \underset{1}{\Delta s}$$

$$= x\Delta s - \underset{1}{s} + C.$$

Folglich ist

$$ns = xT - (s + \Delta s) + C$$
$$= xT - s - T + C$$

und

$$(n+1)s = (x-1)T + C.$$

Die Bestimmung der Constans hängt nun davon ab, ob x die Stelle von T oder T' ist. Ist das erste, so ist für $x = 1$, $T = a$, dem ersten Gliede, und s (die Summe der ersten $x - 1$ Glieder) $= 0$, daher $C = 0$, und

$$s = \frac{n-1}{n+1}T.$$

Bezeichnet x die Stelle von T', so ist s die Summe von $x - 2$ Gliedern der Reihe, also für $x = 2$, $T = a$, $s = 0$, mithin $C = -a$, und

$$s = \frac{(x-1)T - a}{n+1}$$

120. Exempel. Die Summe einer Anzahl der ersten Glieder der Reihe $1 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b + \frac{5}{6}c + \text{etc.}$,

wo a, b, c, u. s. w. die nächstvorhergehenden Glieder sind, zu finden.

Für diese Reihe ist, wenn x die Stelle von T ist, $T' = \frac{x - \frac{1}{2}}{x} T$ (111). Also bezeichnet s in (119) die Summe der ersten x — 1 Glieder, und man erhält, wenn man statt n seinen Werth $-\frac{1}{2}$, und statt T den in (111) gefundenen Werth setzt

$$s = \frac{2x - 2}{\sqrt{\pi x}} \left(1 + \frac{3}{8x} + \frac{25}{128x^2} + \frac{105}{1024x^3} + \text{etc.} \right)$$

Hiernach ist die Summe der 100 ersten Glieder

$$= \frac{200}{\sqrt{101\pi}} \left(1 + \frac{3}{8.101} + \frac{25}{128.101^2} + \frac{105}{1024.101^3} + \text{etc.} \right)$$

$= 11,12696955.....$

Wenn x sehr groß ist, so ist sehr nahe s $= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$. Die Summe der ganzen ins Unendliche fortgesetzten Reihe ist unendlich groß.

120[b]. Exempel. Von der Reihe $1 + \frac{1}{4}a$ $+ \frac{3}{6}b + \frac{5}{8}c + \frac{7}{10}d +$ etc. eine beliebige (aber etwas große) Anzahl Glieder vom Anfange der Reihe an zu summiren.

Für diese Reihe ist, wenn x die Stelle des Gliedes T′, also x — 1 die von T anzeigt, aus (112)

$$T' = \frac{x - \frac{3}{2}}{x} T$$

Bezeichnet also s die Summe von x — 2 Gliedern, so hat man aus (120), $n = -\frac{3}{2}$, und $a = 1$ gemacht,

$$s = 2 - 2(x-1)T$$

und, wenn man statt T seinen Werth aus (112) setzt,

$$s = 2 - \frac{2x-2}{\sqrt{\pi x}}\left(\frac{1}{x} + \frac{15}{8x^2} + \frac{385}{128x^3} + \text{etc.}\right)$$

$$= 2 - \frac{2x-2}{x\sqrt{\pi x}}\left(1 + \frac{15}{8x} + \frac{385}{128x^2} + \text{etc.}\right)$$

Die Summe der ersten 1000 Glieder der Reihe, wo $x = 1002$ ist, wird hiernach

$$= 2 - \frac{2002}{1002\sqrt{1002\pi}}\left(1 + \frac{15}{8.1002} + \frac{385}{128.1002^2} + \text{etc.}\right)$$

$$= 2 - 0{,}03567447.. = 1{,}96432552.. .$$

Ist x sehr groß, so hat man sehr nahe $s = 2 - \frac{2}{\sqrt{\pi x}}$. Die Summe der ganzen ins Unendliche fortgesetzten Reihe aber, für welche $x = \infty$ ist, ist $= 2$, wie schon in (92) gefunden worden.

120°. Die Reihe $1 + \frac{2.4}{3.3}a + \frac{4.6}{5.5}b + \frac{6.8}{7.7}c + \frac{8.10}{9.9}d + \text{etc.}$ allgemein zu summiren.

Es sey s die Summe von z — 1 Gliedern der Reihe, T das Glied in der Stelle z, so ist $\Delta s = T$. Diese Gleichung bleibt, wenn auch statt z eine neue Variable x gesetzt wird, welche eine Function jener ist, nur muß dann freylich darauf Rücksicht genommen

werden, daß nun Δx nicht $= 1$ ist, wie sonst, wo x die Stellenzahl selbst bezeichnet.

In (114) wo $2z + 1 = x$ gesetzt ward, wodurch Δx oder $\omega = 2\Delta z = 2$ ist, ist gefunden

$$T = A\left(1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{\underset{1}{xx}} + \frac{\gamma}{\underset{1\,2}{xxx}} + \frac{\delta}{\underset{3}{x\ldots x}} + \text{etc.}\right)$$

wo $A = \frac{1}{4}\pi$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{5}{8}$; $\gamma = 1{,}9375$; $\delta = 9{,}7734$; $\varepsilon = 68{,}59$; $\zeta = 617{,}56$; u. s. w. ist.

Man hat also

$$\Delta s = A\left(1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{\underset{1}{xx}} + \frac{\gamma}{\underset{1\,2}{xxx}} + \frac{\delta}{\underset{3}{x\ldots x}} + \text{etc.}\right)$$

mithin

$$s = \text{Const.} + A\left(\Sigma x^0 + \alpha\Sigma\frac{1}{x} + \beta\Sigma\frac{1}{\underset{1}{xx}} + \gamma\Sigma\frac{1}{\underset{1\,2}{xxx}} + \delta\Sigma\frac{1}{\underset{3}{x\ldots x}} + \text{etc.}\right)$$

Da (113)

$$\Delta\frac{1}{\underset{1}{x}x\ldots\ldots\underset{n}{x}} = -\frac{(n+1)\omega}{\underset{1\,2}{xxx}\ldots\ldots\underset{n+1}{x}}$$

so ist umgekehrt

$$\Sigma\frac{1}{\underset{1}{x}x\ldots\ldots\underset{n+1}{x}} = -\frac{1}{(n+1)\omega}\cdot\frac{1}{\underset{1}{x}x\ldots\ldots\underset{n}{x}}$$

Hieraus ergeben sich $\Sigma\frac{1}{\underset{1}{xx}}$, $\Sigma\frac{1}{\underset{1\,2}{xxx}}$, u. s. w. Was Σx^0 betrifft, so ist, weil $\Delta x = \omega = \omega x^0$; $\omega\Sigma x^0 = \Sigma\Delta x = x$, also $\Sigma x^0 = \frac{x}{\omega}$. Noch ist $\Sigma\frac{1}{x}$ übrig

Dieses hat man mittelst der in (36^b.) angeführten allgemeineren Formel, nach welcher

$$\Sigma y = \frac{\int y \partial x}{\omega} - \frac{1}{2} y + \frac{1}{12} \Delta y - \frac{1}{24} \Delta^2 y + \frac{19}{720} \Delta^3 y - \frac{3}{160} \Delta^4 y + \text{etc.}$$

zu suchen, indem man $y = \frac{1}{x}$ setzt. Dadurch wird

$$\Sigma \frac{1}{x} = \frac{\log x}{\omega} - \frac{1}{2x} - \frac{\omega}{12 x x_1} - \frac{\omega^2}{12 x x_1 x_2} - \frac{19 \omega^3}{120 x \ldots x_3} - \frac{9 \omega^4}{20 x \ldots x_4} - \text{etc.}$$

Auf diese Weise entsteht

$$s = \text{Const.} + A\left(\frac{x}{\omega} + \frac{\alpha \log x}{\omega} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{\omega}\right)\frac{1}{x} - \left(\frac{\alpha\omega}{12} + \frac{\gamma}{2\omega}\right)\frac{1}{x x_1} - \left(\frac{\alpha\omega^2}{12} + \frac{\delta}{3\omega}\right)\frac{1}{x x_1 x_2} - \left(\frac{19\alpha\omega^3}{120} + \frac{\varepsilon}{4\omega}\right)\frac{1}{x \ldots\ldots x_3} - \text{etc.}\right)$$

und, wenn man statt A, α, β, γ, u. s. w. ihre Werthe, und für ω seinen Werth 2 substituirt,

$$s = \text{Const.} + \frac{1}{4}\pi\left(\frac{x}{2} + \frac{\log x}{4} - \frac{9}{16x} - \frac{6{,}8125}{12 x x_1} - \frac{10{,}7734}{6 x x_1 x_2} - \frac{9{,}207}{x \ldots\ldots x_3} - \frac{65{,}36}{x \ldots\ldots x_4} - \text{etc.}\right)$$

Die Constans zu bestimmen, suche man die Summe der ersten 12 Glieder der Reihe durch wirkliche Berechnung; sie ist = 10,0649126. Da für dieselbe

$z - 1 = 12$, also $z = 13$ ist, so wird $x = 27$, also $x_1 = 29$, $x_2 = 31$, u. s. w., und

$$10{,}0649126 = \text{Const.} + \frac{1}{4}\pi\left(\frac{27}{2} + \frac{\log 27}{4} - \frac{9}{16.27} - \frac{6{,}8125}{12.27.29} - \frac{10{,}7734}{6.27.29.31} - \text{etc.}\right)$$

Die ausgeführte Rechnung giebt Const. $= 1{,}1680971$, so daß

$$s = -1{,}1680971 + \frac{1}{4}\pi\left(\frac{x}{2} + \frac{\log x}{4} - \frac{9}{16x} - \frac{6{,}8125}{12xx_1} - \frac{10{,}7734}{6xx_1x_2} - \text{etc.}\right)$$

ist.

Für ein sehr großes x hat man näherungsweise

$s = -1{,}1680971 + \frac{\pi(2x + \log x)}{16}$. Die Summe der ganzen ins Unendliche fortgesetzten Reihe aber ist unendlich groß. Zu vergleichen, Summirbare Reihe, 24. II.

121. Auf dieselbe Art, wie die Reihe $1 + \frac{2.4}{3.3}a + \frac{4.6}{5.5}b + \frac{6.8}{7.7}c + \text{etc.}$ jetzt summirt worden, lassen sich die Reihen $1 + \frac{2.2}{1.3}a + \frac{6.6}{5.7}b + \frac{10.10}{9.11}c + \text{etc.}$; $1 + \frac{2.2}{1.3}a + \frac{4.4}{3.5}b + \frac{6.6}{5.7}c + \text{etc.}$; $1 + \frac{3.3}{2.4}a + \frac{5.5}{4.6}b + \frac{7.7}{6.8}c + \text{etc.}$ summiren. Das allgemeine Glied der ersten ist in (116), dasjenige der anderen in (117) gefunden. Für die dritte Reihe wird das allgemeine

gemeine Glied ganz so ausgedrückt, wie bey der andern, wofern $z+1$ die Stelle des Gliedes T ist, und $2z+3=x$ gemacht wird. Die Constante ist $\frac{4}{\pi}$.

122. Die Reihe $\frac{2}{1}+\frac{4}{3}a+\frac{6}{5}b+\frac{8}{7}c+\frac{10}{9}d$ + etc. zu summiren.

Es sey z die Stelle des Gliedes T, so hat man

$$T'=\frac{2z+2}{2z+1}T$$

also, wenn $2z+1=x$ gesetzt wird, wodurch Δx oder $\omega=2$ wird,

$$T'=\frac{x+1}{x}T.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch eine ganz ähnliche Rechnung wie in (119), nur mit dem Unterschiede, daß Δx dort $=1$ war, hier aber $=2$ ist,

$$3s=(x-2)T+C.$$

wo s die Summe von $z-1$ Gliedern der Reihe anzeigt. Da also für $z=1$, $s=0$ werden muß, x aber alsdann $=3$ und $T=a$ ist, so wird $o=a+C=2+C$, folglich $C=-2$, und

$$s=\frac{(x-2)T-2}{3}$$

Weil T sich durch x der Bemerkung in (110) zufolge nicht darstellen läßt, so quadrire man die Gleichung

$$T'=\frac{x+1}{x}T$$

so wird

$$T'T'=\frac{xx+2x+1}{xx}TT$$

Der Coefficient A ist $\frac{\pi}{2}$, wie es theils die unmit-telbare Berechnung aus dem Falle z=10, wo x=21, $x_1 = 23$, $x_2 = 25$, u. s. w. ist, lehrt, theils sich daraus ergiebt, daß für ein unendlich großes z nach dem Wallisischen Ausdrucke

$$\frac{2.4.6.....2z}{1.3.5....2z-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}(2z+1)} = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}$$

ist. Man hat also

$$s = -\frac{2}{3} + \frac{x-2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{16xx} + \text{etc.}\right)$$

Hiernach erhält man die Summe der 100 ersten Glieder der Reihe, wo z − 1 = 100, also z = 101, und x = 2z + 1 = 203 ist, = 1194,2783. Für ein sehr großes z ist die Summe näherungsweise $\frac{1}{3}x\sqrt{\frac{1}{2}\pi x} = \frac{2}{3}z\sqrt{\pi z}$. Die Summe der ganzen in's Unendliche fortlaufenden Reihe ist unendlich groß.

123. Die Reihe $1 + \frac{1.1}{2.3}a + \frac{3.3}{4.5}b + \frac{5.5}{6.7}c + \frac{7.7}{8.9}d +$ etc., deren Totalwerth, wie sich aus (101) oder aus (Cyklometrie, 1.) ergiebt, $\frac{1}{2}\pi$ ist, allgemein zu summiren.

Es sey z die Stelle des Gliedes T der Reihe, so ist

$$T' = \frac{(2z-1)^2}{2z(2z+1)}T$$

oder, wenn man $2z = x$ setzt, wo dann ω oder $\Delta x = 2$ ist,

$$T' = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} T$$

Bezeichnet s die Summe der $z-1$ ersten Glieder der Reihe, so ist $\Delta s = T$, und, wenn z in $z+1$ übergeht, $\underset{1}{\Delta s} = T'$, mithin

$$\underset{1}{\Delta s} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} \Delta s$$

woraus, wenn statt $\underset{1}{\Delta s}$ sein Werth $\Delta s + \Delta\Delta s$ gesetzt wird, folgt

$$(3x-1)\Delta s + x(x+1)\Delta\Delta s = 0$$

Um diese Gleichung zu integriren, sey $s = v\Delta s$, wo v eine Function von x ist, so wird

$$\begin{aligned} \Delta s &= (v+\Delta v)(\Delta s + \Delta\Delta s) - v\Delta s \\ &= \Delta v \Delta s + (v+\Delta v)\Delta\Delta s \\ &= \Delta v \Delta s + \underset{1}{v}\Delta\Delta s \end{aligned}$$

also

$$\Delta s = \frac{\underset{1}{v}\Delta\Delta s}{1-\Delta v}$$

Wird dieser Werth von Δs in die obige Gleichung gebracht, so entsteht

$$(3x-1)\underset{1}{v} + x(x+1)(1-\Delta v) = 0$$

oder

$$\left(3 - \frac{1}{x}\right)\underset{1}{v} + (x+1)(1-\Delta v) = 0.$$

Für ein großes x ist näherungsweise

$$3\underset{1}{v} + x(1-\Delta v) = 0$$

oder, wenn man $\underset{1}{v} = v + \Delta v = v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x =$

$v + \frac{2\partial v}{\partial x}$, also $\Delta v = \frac{2\partial v}{\partial x}$ macht,

$$3v + 6\frac{\partial v}{\partial x} + x - 2x\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Läßt man hier noch $6\frac{\partial v}{\partial x}$, als unbeträchtlich gegen $2x\frac{\partial v}{\partial x}$ weg, so kommt

$$3v + x - 2x\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

oder

$$\partial v - \frac{3}{2x}v\partial x = \frac{1}{2}\partial x$$

der integrirende Factor für diese Gleichung ist $x^{-\frac{3}{2}}$ und es wird

$$vx^{-\frac{3}{2}} = C - x^{-\frac{1}{2}}$$

also

$$v = -x + Cx^{\frac{3}{2}}$$

Man kann das Glied $Cx^{\frac{3}{2}}$ nicht zum Anfangsgliede der Reihe für v machen, weil sonst in dem Ausdruck für s durch T zufolge der Gleichung $s = v\Delta s + \text{Const.} = vT + \text{Const.}$ zwey willkührliche Constanten kommen würden, welches nicht seyn darf, da wenn s durch T vermittelst der Gleichung $\Delta s = T$ bestimmt wird, nur eine solche hineinkommt. Daß man $v = -x +$ etc. setzen müsse, ergiebt sich ganz offenbar aus Zuziehung des Werthes von T. Es ist nämlich

$$T = 1 \times \frac{1.1.3.3.5.5\ldots(2z-3)(2z-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots(2z-2)(2z-1)}$$

$$= \frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2z-3}{2.4.6.8\ldots\ldots 2z-2} \cdot \frac{1}{2z-1}$$

In (111) setze man $n = z - 1$, so wird

$$\frac{1.3.5.....2z-3}{2.4.6.....2z-2} = \frac{1}{\sqrt{\pi z}}\left(1 + \frac{3}{4.2z} + \frac{25}{32.(2z)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{105}{128.(2z)^3} + \frac{1659}{2048(2z)^4} + \text{etc.}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}\left(1 + \frac{3}{4x} + \frac{25}{32x^2}\right.$$
$$\left. + \frac{105}{128x^3} + \frac{1659}{2048x^4} + \text{etc.}\right)$$

weil $2z = x$. Mithin wird

$$T = \frac{1}{(x-1)\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}\left(1 + \frac{3}{4x} + \frac{25}{32x^2} + \frac{105}{128x^3}\right.$$
$$\left. + \text{etc.}\right)$$

also für ein sehr großes x nahe $T = \frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} . x^{-\frac{3}{2}}$. Aus der Gleichung $\Delta s = T$ hat man

zu einer ersten Annäherung $\frac{\partial s}{\partial x} . \Delta x = T$ d. i. $2\partial s =$

$T\partial x$, also $\partial s = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} . x^{-\frac{3}{2}}\partial x$ und $s = \text{Const.} -$

$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} . x^{-\frac{1}{2}} = \text{Const.} - xT$, welches zeigt, daß $-x$
das erste Glied in v ist.

Es sey also

$$v = Ax + B + \frac{C}{x} + \frac{D}{\underset{1}{xx}} + \frac{E}{\underset{1\;2}{xxx}} + \text{etc.}$$

so ist

$$\Delta v = A\omega \quad - \frac{C\omega}{\underset{1}{xx}} - \frac{2D\omega}{\underset{1\;2}{xxx}} - \frac{3E\omega}{\underset{3}{x...x}} - \text{etc.}$$

und

$$\underset{1}{v} = A\underset{1}{x} + B + \frac{C}{\underset{1}{x}} + \frac{D}{\underset{1}{x}\underset{2}{x}} + \frac{E}{\underset{1}{x}\underset{2}{x}\underset{3}{x}} + \text{etc.}$$

$$= Ax + A\omega + B + \frac{C}{x} + \frac{D - C\omega}{x\underset{1}{x}} + \frac{E - 2D\omega}{x\underset{1}{x}\underset{2}{x}}$$

$$+ \frac{F - 3E\omega}{x \ldots \underset{3}{x}} + \text{etc.}$$

und $\left(3 - \frac{1}{x}\right)\underset{1}{v} = 3Ax + 3(A\omega + B) + \frac{3C}{x}$

$$+ \frac{3(D - C\omega)}{x\underset{1}{x}} + \text{etc.}$$

$$- A - \frac{A\omega + B}{x} - \frac{C}{x\underset{1}{x}} - \text{etc.}$$

$$= 3Ax + (3\omega - 1)A + 3B + \frac{3C - A\omega - B}{x}$$

$$+ \frac{3D - (3\omega + 1)C}{x\underset{1}{x}} + \frac{3E - (6\omega + 1)D}{x\underset{1}{x}\underset{2}{x}}$$

$$+ \frac{3F - (9\omega + 1)E}{x \ldots \underset{3}{x}} + \text{etc.}$$

Ferner

$$x(1 - \Delta v) = (1 - A\omega)x + \frac{C\omega x}{x\underset{1}{x}} + \frac{2D\omega x}{x\underset{1}{x}\underset{2}{x}} + \frac{3E\omega x}{x \ldots \underset{3}{x}} + \text{etc.}$$

$$= (1 - A\omega)x + \frac{C\omega}{x} + \frac{(2D - C\omega)\omega}{x\underset{1}{x}} + \frac{(3E - 4D\omega)\omega}{x\underset{1}{x}\underset{2}{x}}$$

$$+ \frac{(4F - 9E\omega)\omega}{x \ldots \underset{3}{x}} + \text{etc.}$$

und

$$(x+1)(1-\Delta v) = (1-A\omega)x + 1 - A\omega + \frac{C\omega}{x}$$
$$+ \frac{(2D - C\omega + C)\omega}{x x_1} + \frac{(3E - 4D\omega + 2D)\omega}{x x_1 x_2}$$
$$+ \frac{(4F - 9E\omega + 3E)\omega}{x, \ldots . x_3} + \text{etc.}$$

Werden die reducirten Werthe von $\left(3 - \frac{1}{x}\right)v_1$ und $(x+1)(1-\Delta v)$ in die Gleichung $\left(3 - \frac{1}{x}\right)v_1 + (x+1)(1-\Delta v) = 0$ gebracht, und statt ω sein Werth 2 gesetzt, so erhält man $A = -1$, $B = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{4}{15}$, $D = \frac{9}{7}C = -\frac{12}{35}$, $E = \frac{25}{9}D = -\frac{20}{21}$, $F = \frac{49}{11}E = -\frac{140}{33}$, $G = \frac{81}{13}F = -\frac{3780}{143}$, u. s. w. Demnach ist

$$v = -x + \frac{2}{3} - \frac{4}{15x} - \frac{12}{35 x x_1} - \frac{20}{21 x x_1 x_2} - \frac{140}{33 x .. x_3} - \text{etc.}$$

und $s = C + v\Delta s = C + vT$

$$= C - T\left(x - \frac{2}{3} + \frac{4}{15x} + \frac{12}{35 x x_1} + \frac{20}{21 x x_1 x_2} + \text{etc.}\right)$$

Will man den Totalwerth der Reihe, welcher $\frac{1}{2}\pi$ ist, nicht als bekannt annehmen, so suche man zur

Bestimmung der Constans auf dem gewöhnlichen Wege der Addition die Summe der ersten 10 Glieder der Reihe. Sie ist 1,39169464, und das 11te Glied = 0,008390336. Diese Werthe setze man für s und T, und für $z-1$ seinen entsprechenden Werth 10, also $z = 11$, und $x = 2z = 22$, so wird

$$1{,}39169464 = C - 0{,}008390336\left(22 - \frac{2}{3} + \frac{4}{15.22} + \frac{12}{35.22.24} + \text{etc.}\right)$$

$$= C - 0{,}008390336 \times 21{,}34618781$$

$$= C - 0{,}17910168$$

und

$$C = 1{,}39169464 + 0{,}17910168 = 1{,}57079632$$

Dieses ist sehr genau der Werth von $\frac{1}{2}\pi$, so daß demnach

$$s = \frac{1}{2}\pi - T\left(x - \frac{2}{3} + \frac{4}{15x} + \frac{12}{35xx} + \text{etc.}\right)$$

ist, wo man zur Berechnung von T entweder die vorhin gegebene Reihe braucht, oder auch den logT vermittelst der Formel

$$\text{log. vulg. } T = -\text{log.vulg.}(x-1) - \frac{1}{2}\text{log.vulg}\frac{1}{2}\pi$$

$$+ k\left(\frac{3}{4x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^3} + \frac{1}{4x^4} + \text{etc.}\right)$$

sucht, in welcher $k = 0{,}4342944819\ldots$ ist.

Die Summe der ersten 1000 Glieder der Reihe, wo $z - 1 = 1000$, $x = 2002$, und log. vulg. T = 8,2513707 ist, findet sich hiernach = 1,552954. Man sieht hieraus, wie langsam die Reihe an den Totalwerth convergirt, und daß man eine sehr große Anzahl Glieder zusammenrechnen müßte, um $\frac{1}{2}\pi$ mittelst

der Reihe in 7 Decimalstellen genau zu erhalten. Man kann dieses so überschlagen. Da für ein großes x

sehr nahe $s = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}$, so findet sich, daß wenn

$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} < 0{,}00000005$ seyn soll, $x > 254647908947032\frac{1}{2}$

seyn muß, welches über 127 Billionen Glieder giebt. Auf ähnliche Art läßt sich in andern Fällen den Überschlag machen, wovon hier noch ein Beyspiel stehen mag, um eine Behauptung in dem Artikel, Reihe,

30., rücksichtlich der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

zu rechtfertigen. Es seyen nämlich von derselben 2x Glieder zusammengenommen, so beträgt die Ergänzung

zu dem Totalwerthe $\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2x+3} -$ etc.

oder $\frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} +$ etc.

Nach (52) ist dieses $= \frac{1}{4x+1} - \frac{1}{(4x+1)^3}$

$+ \frac{5}{(4x+1)^5} -$ etc., also für ein großes x sehr

beynahe $\frac{1}{4x+1}$. Soll dieses kleiner seyn als

0,0000000005, so wird erfordert, daß $4x+1 > 2.10^9$

und $2x > 999999999\frac{1}{2}$ also wenigstens $= 1000.10^6$ sey.

124. Läßt sich eine Reihe durch die bekannten Methoden entweder gar nicht, oder nur auf eine sehr verwickelte Art summiren, so kann man zuweilen eine Annäherung zu der Summe dadurch erhalten, daß

man sie als eine geometrische oder arithmetische betrachtet, wovon hier noch ein Beyspiel beygefügt werden soll.

Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel von p Seiten in q Würfen n bestimmte Seiten zu werfen ist

$$\frac{p^q - \left[\frac{n}{1}\right](p-1)^q + \left[\frac{n}{2}\right](p-2)^q - \left[\frac{n}{3}\right](p-3)^q + \text{etc.}}{p^q}$$

wo die Reihe im Zähler, bey welcher der Kürze wegen die Eulerische Bezeichnungsart der Binomialcoefficienten gebraucht ist, so lange fortgesetzt wird, bis sie irgendwo abbricht.

Wird nun die Zahl der Würfe gesucht, in denen Jemand mit gleicher Aussicht auf Gewinn oder Verlust es unternehmen kann, n Seiten zu werfen, d. i., wo die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wird, so ist der vorige Ausdruck $= \frac{1}{2}$ zu setzen, und q aus der so erhaltenen Gleichung zu bestimmen. Da dieses direct nicht geschehen kann, das Probiren aber höchst langweilig ist, so muß man die Summe der Reihe im Zähler des Ausdrucks auf eine annähernde Weise zu bestimmen suchen, zumal da die Frage die höchste Genauigkeit nicht verlangt. Man erhält dieses am kürzesten dadurch, daß man mit Moivre (Doctrine of Chances, p. 111. sec. ed.) die Reihe p, p — 1, p — 2, ... als eine abnehmende geometrische Reihe mit dem Exponenten $\frac{p-1}{p}$ ansieht. Dadurch verwandelt sich der obige Ausdruck in diesen $1 - \left[\frac{n}{1}\right]\left(\frac{p-1}{p}\right)^q$

$$+ \left[\frac{n}{2}\right]\left(\frac{p-1}{p}\right)^{2q} + \left[\frac{n}{3}\right]\left(\frac{p-1}{p}\right)^{3q} + \text{etc.}$$

$= \left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^q\right)^n$, welcher $= \frac{1}{2}$ gesetzt,

$$q = \frac{\log \frac{1}{1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}}}{\log p - \log(p-1)}$$

giebt. Zu einem Zahlenbeyspiele sey $p = 6$, $n = 6$ oder es werde gefragt, in wie viel Würfen Jemand, 1 gegen 1 setzend, es unternehmen kann, mit einem gemeinen Spielwürfel alle sechs Seiten zu werfen. Man erhält $q = \frac{0,9621700}{0,0791813} = 12\frac{1}{7}$ circa; also zwischen 12 und 13 Würfen. In der That ist auch die Wahrscheinlichkeit das Verlangte in 12 Würfen zu leisten $= \frac{953029440}{2176782336} < \frac{1}{2}$, und in 13 Würfen dasselbe zu thun $= \frac{6709904640}{13060694016} > \frac{1}{2}$.

Bey einer ähnlichen Frage in Betreff des Zahlenlotto läßt sich dasselbe Mittel zur Erhaltung einer genäherten Summe anwenden. Laplace Théorie des probabilités, Liv. II. nro. 4., wo man aber auch die vollkommnere Methode findet.

Einige hieher zu ziehende Beyspiele sind noch folgende.

Moivre nahm, um die Berechnung der Leibrenten, sowohl der einfachen als der zusammengesetzten, zu erleichtern, an, daß das Absterben gleichmäßig erfolge, d. h., er betrachtete die Zahlen der Sterblichkeitstafeln, welche angeben, wie viel von einer Anzahl zugleich Lebender eines gewissen Alters nach ein, zwey, drey u. s. w. Jahren noch übrig sind, als die Glieder einer abnehmenden einfachen arithmetischen Reihe, wodurch freylich die Berechnung leicht genug wird, das

Ergebniß derselben sich aber doch zu sehr von der Wahrheit entfernt. Thom. Simpson verbesserte Moivre's Hypothese auf eine scharfsinnige Art, wodurch der Fehler vermindert wird. S. Tetens Einleit. zu der Berechn. der Leibrenten, Th. I. S. 103 u. folgg. Kramp hat die Zahlen der Sterblichkeitstafeln als Glieder einer rücklaufenden Reihe der ersten Ordnung betrachtet in dem Leipziger Magazine für reine und angewandte Mathematik von 1787., S. 130. u. folgg.

Bey der genäherten Bestimmung des Verhältnisses der Summe der Glieder des entwickelten Binomiums $(m+n)^{rm+rn}$, wo rm und rn sehr große Zahlen sind, von dem Gliede an, das in der Stelle $nr \mp q + 1$ steht, bis mit zu dem größten der Entwickelung, dessen Stelle $rn + 1$ ist, zu der Summe aller Glieder hat Nikol. Bernoulli sich auf eine ähnliche Art, wie von Moivre eben jetzt angeführt ist, verhalten. Er sah nämlich die Factoren

$$\frac{rm+q}{rn-q+1}, \frac{rm+q-1}{rn-q+2}, \ldots\ldots \frac{rm+1}{rn}$$

des Products $\frac{(rm+q)(rm+q-1)(rm+q-2)..(rm+1)}{(rn+q+1)(rn-q+2)(rn-q+3)..rn}$, wodurch das Verhältniß des größten Gliedes zu dem in der Stelle $rn - q + 1$ ausgedrückt wird, als die Glieder einer abnehmenden geometrischen Reihe an, deren Logarithmen also in arithmetischer Progression sind, wodurch dann allerdings ein genäherter Werth jenes Products sehr leicht erhalten werden kann. Moivre bestimmte den Werth dieses Products weit genauer, Doctrine of Chances, p. 242. sec. ed. Laplace hat Moivre's Bestimmung vervollkommnet, Théorie des probabilités, Liv. II. ch. III. nro. 16.

125. Hutton hat in seinen Tracts on mathematical and philosophical subjects Vol. I. p. 176. eine Summirungsart bestimmter Reihen mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder angegeben, welche

arin besteht, daß man zuerst eine größere oder ge-
ingere Anzahl Glieder, je nachdem der Grad der Con-
ergenz der Reihe es mit sich bringt, vom Anfange
er Reihe an wirklich zusammenzieht, und dadurch
ine Reihe von Werthen bildet, welche abwechselnd
rößer und kleiner sind, als die wahre Summe. Man
immt alsdann zwischen je zwey dieser Gränzen, wo-
on die eine größer, die andere kleiner ist, als die ge-
uchte Summe, das arithmetische Mittel, und bildet
o eine neue Reihe von Werthen, zwischen welchen die
Summe enthalten ist, die aber nicht so weit aus ein-
nder liegen als die vorigen Gränzen. Auf diese so
rhaltenen neuen Gränzen wendet man wieder das vo-
ige Verfahren an, und setzt dieses so lange fort, als
ie Gränzen noch ungleich sind, oder bis nur noch ein
inziges Paar übrig ist. In jenem Falle giebt jedes
er zuletzt erhaltenen gleichen arithmetischen Mittel die
erlangte Summe genau, in diesem erhält man in
em arithmetischen Mittel des übriggebliebenen Paars
Gränzen einen genäherten Werth der Summe, welcher
m so genauer seyn wird, je näher die zuletzt zugezo-
enen Gränzen einander kommen. Hutton bringt die-
es Verfahren auf allgemeine Formeln, indem er dar-
ach die successiven genäherten Werthe der Summe der
Reihe $a - b + c - d + e - f +$ etc. sucht, welche
ind $\frac{1}{2}a$; $\frac{3a - b}{4}$; $\frac{7a - 4b + c}{8}$; u. s. w., von wel-
hen Formeln er auch das allgemeine Gesetz angiebt.
Diese Formeln ergeben sich leicht daraus, daß, wenn
$a - b + c - d + e -$ etc. $= s$ gesetzt wird, man
uch, wie in dem Artikel, Umwandlung der Reihen,
gezeigt werden wird, hat

$$s = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta a + \frac{1}{8}\Delta^2 a - \frac{1}{16}\Delta^3 a + \text{etc.}$$

wo Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, ... die Anfangsglieder der aus
der Grundreihe a, b, c, d.... abgeleiteten Differenz-
reihen sind.

Hutton bringt bey seiner Methode noch einige Modificationen an, um sie auch auf stark divergirende Reihen anwendbar zu machen. Da man aber nach dieser Methode nichts findet, was man nicht auch durch die in diesem Art. vorgetragenen Summirungsmethoden, und zwar weit vollkommner erhalten kann, so gebe ich kein Beyspiel zur Erläuterung derselben, sondern überlasse es jedem, sich nach dem hier gegebenen Abriß selbst eins zu machen. Montucla hat übrigens ein solches, Histoire des mathém. T. III. p. 242. sec. ed.

126. In den Phil. Transact. von 1784 ist ein Aufsatz von Waring befindlich, worin mehrere Summirungsarten kurz durchgegangen werden. Sie sind sämmtlich unter den von mir erklärten begriffen bis auf eine, welche hier noch eine Erwähnung verdient, und auf folgendes hinauskommt. Es sey S die Summe einer Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3 +$ etc., und es seyen α, β, γ u. s. w. die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$. Wenn nun A, B, C, u. s. w. die Werthe sind, worin sich S verwandelt, wenn darin αx, βx, γx, u. s. w. statt x geschrieben werden, so ist $\frac{A + B + C + \text{etc.}}{n}$ die Summe einer Reihe, deren Glieder das erste, $(n+1)$te, $(2n+1)$te, u. s. w. der zum Grunde gelegten Reihe sind. Wegen des Beweises dieses Satzes, welcher auf den Eigenschaften der Wurzeln der zweygliedrigen Gleichung $x^n - 1 = 0$ beruht, muß ich die Liebhaber auf einen über eben diesen Gegenstand sehr klar abgefaßten Aufsatz von Thom. Simpson in den Phil. Transact. von 1757 verweisen. Die Reihen, welche durch diese Methode summirbar sind, können zwar auch durch die Leibnitz-Bernoullische Methode summirt werden, allein man erhält sie nach jener Art doch leichter. Ja man wird hierdurch oft das Integral einer Differentialgleichung finden können, welches auf dem gewöhnlichen Wege nur sehr

mühsam zu erhalten steht. Z. B. die Summirung der Reihe $1 + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}x^6$ + etc., deren Summe $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x)}} + \frac{1}{\sqrt{(1+x)}}\right)$ ist, hängt von der Integration der Gleichung $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} - \frac{3x}{1-xx} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{3}{4(1-xx)} y = 0$, wo ∂x constant ist, ab. Die Gleichungen $y = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, und $y = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ sind particuläre Integrale jener Gleichung; das vollständige Integral ist $y = C(1-x)^{-\frac{1}{2}} + C'(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, wo C und C' ein Paar willkührliche Constanten sind.

Supplement, eigentlich so viel als Complement, Ergänzung. Es ist aber jetzt fast durchgängig eingeführt, unter Supplement dasjenige zu verstehen, was einem Bogen oder Winkel an 180° fehlt, und Complement allein auf das einzuschränken, was mit einem Bogen oder Winkel zusammen 90° ausmacht.

Schon Albert Girard hat in seinen, 1629 zu Haag erschienenen, trigonometrischen Tafeln an eine verschiedene Benennung der beiden Ergänzungen gedacht. Supplementum als Ergänzung zu 180° kommt in Caswells Trigonometrie, welche sich am Ende des zweyten Bandes von Wallis's Werken befindet, vor.

Supplementardreyeck heißt in der Sphärik und sphärischen Trigonometrie ein Kugeldreyeck in Beziehung auf ein anderes, dessen Winkelpuncte die Pole der größten Kreise sind, welche durch ihren Durchschnitt jenes bilden. Da aber auf diese Weise acht Dreyecke auf der Kugelfläche entstehen, indem jene Kreise einander in sechs Punkten, welche wiederum die Pole der

Seiten des Grunddreyecks sind, schneiden, so bedarf die obige Erklärung noch einer näheren Bestimmung. Zuerst also ist zu bemerken, daß, da jene acht Dreyecke paarweise in den Seiten und Winkeln übereinkommen, nur die vier dem ursprünglichen Dreyecke nächsten, und die halbe Kugelfläche einnehmenden, Dreyecke in Betracht zu kommen brauchen. Unter diesen Dreyecken ist das Supplementardreyeck zwischen denjenigen Polen der Seiten des Grunddreyecks enthalten, welche in Ansehung der zugehörigen Kreisbogen mit den Winkeln des Grunddreyecks, welche denselben gegenüber liegen, an einerley Seite fallen.

Das Supplementardreyeck, welches auch aus einem leicht abzunehmenden Grunde Polardreyeck genannt wird, steht mit dem Grunddreyecke in einer solchen Wechselbeziehung, daß die Seiten des einen die Supplemente der Winkel des andern (versteht sich bloß in Rücksicht der Gradanzahl) sind. Durch Zuziehung des Supplementardreyecks lassen sich manche Sätze der Sphärik und sphärischen Trigonometrie leichter erweisen, als es sonst wohl geschehen könnte. Phil. Lansberg scheint sich des Supplementardreyecks oder vielmehr des zwischen den einander nächsten Polen der Seiten des Grunddreyecks enthaltenen in dieser Absicht zuerst bedient zu haben. Aber abgesehen hiervon, ist die Beziehung schon an und für sich merkwürdig.

Surdesolidum, eine in der ältern Algebra gebräuchliche, jetzt abgekommene Benennung der fünften Potenz einer Zahl. Davon surdesolidalisch, die fünfte Potenz angehend. Man findet auch Sursolidum in derselben Bedeutung.

Surdus numerus, surdische Zahl, eine veraltete Benennung der Irrationalzahlen, die aber noch

n England gebräuchlich ist. Die Rechnung mit der=
gleichen Zahlen in dem Artikel, Wurzelgröße.

Sursolidum s. hypersolidum problema ist ein solches, zu dessen Auflösung Linien von einer höheren Ordnung als der zweyten erfordert werden. Solida problemata hießen nämlich bey den älteren Geometern, wie Pappus in der Vorrede zum siebenten Buche seiner mathem. Samml. bey der Inhaltsanzeige von des Apollonius Büchern de inclinationibus anführt, Aufgaben, zu deren Auflösung die Kegelschnitte zuzuziehen sind. Huygens und die ihm gleichzeitigen Geometer, wie Jak. Bernoulli, bedienen sich der angegebenen Benennungen noch. Jetzt werden sie nicht mehr gebraucht.

Was aber die Sache selbst betrifft, so merke ich noch an, daß Huygens bey der Auflösung von Aufgaben, welche auf cubische Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln führen, der Theilung des Winkels in drey gleiche Theile den Vorzug vor den Kegelschnitten gab. Et haec construendi ratio (per trisectionem anguli scil.), sagt er in dem Anfange zu der Schrift de circuli magnitudine inventa, quodammodo simplicissima videtur atque ad usum maxime accommodata.

Von Jak. Bernoulli ist in den Act. erudit. 1689 eine sinnreiche Construction der cubischen Gleichungen durch Kreis und gerade Linie enthalten, woben das gesuchte durch einen nach demselben Gesetz zu wiederholenden Cyclus einfacher Constructionen gefunden wird, und zwar nach Vollendung eines Cyclus immer genauer, und durch eine ohne Ende fortgesetzte Reihe von Constructionen völlig genau. Die Gründe des Verfahrens, welche Bernoulli a. a. O. nicht angezeigt hatte, machte er nachher im zweyten Theile der Positionum de seriebus infinitis bekannt. Man sehe die

Sammlung seiner Werke T. I. Nro. XXXVII. und LIV., auch die sections coniques von L'Hopital, S. 351—358. Hier mag als Beyspiel dieser Annäherungsmethode die durch fortgesetztes Ausziehen der Quadratwurzel zu Stande gebrachte Erfindung zweyer Mittelproportionalen x und y zwischen zwey gegebenen Größen a und b Platz finden.

Es sey nämlich $\sqrt{b} = p$, $\sqrt{ap} = p'$, $\sqrt{bp'} = p''$, $\sqrt{ap''} = p'''$, $\sqrt{bp'''} = p^{IV}$, u. s. w., so ist x das letzte Glied der ohne Ende fortgesetzten Reihe p', p''', p^{V}, u. s. w., y aber dasjenige der Reihe p'', p^{IV}, p^{VI} etc. in inf.

Denn es seyen $p^{(2z-1)}$ und $p^{(2z+1)}$ zwey nächste Glieder der Reihe p', p''', p^{V}, u. s. w., so ist nach dem Bildungsgesetz dieser Reihe $p^{(2z+1)} = \sqrt{(a(\sqrt{bp^{(2z-1)}}))}$. Näheren sich nun die Glieder p', p''', p^{V}, u. s. w. ohne Aufhören einer gewissen Gränze x, so ist für ein unendlich großes z, $p^{(2z-1)} = p^{(2z+1)} = x$, d. i. $x = \sqrt{(a(\sqrt{bx}))}$, also $xx = a\sqrt{bx}$, und $x^4 = aabx$, folglich $x^3 = aab$; demnach x die erste zweyer Mittelproportionalen zwischen a und b. Eben so erhellt, daß $y^3 = abb$, also y die andere der beiden Mittelproportionalen ist.

Der Beweis läßt sich auch so führen. Es ist $p' = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}$; $p''' = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}$; $p^{V} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}} b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}}$;

überhaupt $p(2z+1) = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2.4^z}} b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\frac{1}{4^{z+1}}}$

$= a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3.2^{2z+1}}} b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3.2^{2z+2}}}$, also für ein unendlich

großes z, $= a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} = x$, daher $x^3 = a^2b$. Eben so wird $y = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$.

Nähme man anfangs $\sqrt{a} = q$, und dann $\sqrt{bq} = q'$, $\sqrt{aq'} = q''$, $\sqrt{bq''} = q'''$, u. s. w., so würde x das letzte Glied der Reihe q'', q^{IV}, q^{VI}, u. s. w.

, aber das der Reihe q', q''', q^{v}, etc. in. inf. verden.

Zu einem Beyspiele in Zahlen sey $a = 8$, $b = 27$. Vermittelst der Logarithmen wird gefunden $\log p^{xxiii} = \log p^{xxv} = \log x = 1{,}0791813 = \log 12$, und $\log p^{xxiv} = \log p^{xxvi} = 1{,}2552725 = \log y = \log 18$. Dieses dient, einen Begriff von dem bey dieser Methode Statt habenden Grade der Convergenz zu geben. Man kann aber die Rechnung in diesem Falle, so wie in ähnlichen Fällen, durch folgenden Satz von Stirling (Meth. differ. Prop. XXX) beträchtlich abkürzen. Es seyen A, B, C, D, u. s. w., in umgekehrter Ordnung genommene Glieder einer Reihe, deren Differenzen nahe in geometrischer Progression, nämlich wie $1, r, r^2, r^3$ u. s. w. sind, so ist das letzte Glied der Reihe $= A + \frac{A - B}{r - 1}$

$$+ \frac{rA - (r+1)B + C}{(r-1)(r^2-1)} + \frac{r^3A - r(r^2+r+1)B + (r^2+r+1)C - D}{r-1 \,.\, r^2-1 \,.\, r^3-1 \,.}$$

etc. — In dem obigen Beyspiele ist $\log p' = 0{,}8093859346 = D$; $\log p''' = 1{,}0177324182 = C$; $\log p^{v} = 1{,}0623190392 = B$; $\log p^{vii} = 1{,}0749656943 = A$; und in Zehntausendmilliontheilchen $A - B = 126466551$, $B - C = 505866210$, $C - D = 2023464836$, welche Unterschiede sich sehr nahe wie $1, 4, 16$ verhalten. Daher wird das letzte Glied der Reihe, d. i.

$$\log x = A + \frac{A - B}{3} + \frac{4A - 5B + C}{3 \,.\, 15} + \text{etc.}$$

$$= 1{,}0749656943 + \frac{0{,}0126466551}{3}$$

$$+ \frac{0{,}0000000006}{3 \,.\, 15} + \text{etc.}$$

$$= 1{,}0791812460 = \log 12.$$

Stirlings Formel folgt übrigens aus einer sehr allgemeinen Formel von Laplace zur Interpolation der Reihen, in denen die letzte Relation der Glieder die einer rücklaufenden Reihe von irgend einer Ordnung ist. Théorie des probabilités, Livr. I. Nro. 6.

Es verdient noch angemerkt zu werden, daß Buteo, der auch sonst als ein scharfsinniger Kopf bekannt ist, die Verdoppelung eines Würfels durch ein ganz ähnliches Verfahren, wie das obige, gesucht hat. Kästners Gesch. der Math. Bd. I. S. 470.

Symmetrie, Eben- oder Gleichmaß, ist die gehörige Übereinstimmung der Theile eines Ganzen unter einander. Davon symmetrisch, jene Übereinstimmung beobachtend oder darin gegründet. Symmetrie kann sowohl bey arithmetischen als geometrischen Zusammensetzungen Statt finden. Die Symmetrie arithmetischer Zusammensetzungen besteht in der übereinstimmigen Bildung der sämmtlichen oder gruppweise genommenen Theile eines Aggregats aus gewissen formlosen oder eintheiligen Größen, und sie ist vollständig, wenn die Auswahl der in die Zusammensetzung der einzelnen Theile eingehenden einfachen Größen aus der ganzen in dem Aggregate enthaltenen Reihe derselben keiner fremdartigen Bedingung unterliegt, unvollständig hingegen, wenn dieses der Fall ist. Jene findet bey den symmetrischen Functionen, wovon ein eigener Artikel handelt, diese bey den symmetrischen Formeln Statt. Ein Beyspiel einer solchen Formel ist folgendes.

Es seyen a, c, f, d die vier Seiten eines ebenen geradlinigen Vierecks, b und e die beiden Diagonalen desselben, und zwar b diejenige, welche die Puncte verbindet, in denen die Seiten a und c, so wie d und f zusammentreffen, so ist

$$\left.\begin{array}{l} a^2 f^2(-a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-f^2) \\ +b^2 e^2(\ \ a^2-b^2+c^2+d^2-e^2+f^2) \\ +c^2 d^2(\ \ a^2+b^2-c^2-d^2+e^2+f^2) \\ -a^2 b^2 c^2-a^2 d^2 e^2-b^2 d^2 f^2-c^2 e^2 f^2 \end{array}\right\} = 0$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist eine symme-
rische Formel. Die erste Gruppe der Glieder, welche die
rey ersten Zeilen einnimmt, ist die Summe der Pro-
ucte, welche entstehen, wenn das Product aus den Qua-
raten je zweyer nicht (mit den Endpuncten) zusammen-
toßenden Linien des Vierecks in den Überschuß der Qua-
rate der vier übrigen über jene beiden multiplicirt wird,
ie zweyte in der letzten Zeile stehende Gruppe enthält die
ubtractiven Quadrate der Producte aus je dreyen zu
inem Dreyeck sich vereinigenden Linien. Die Formel
ntsteht übrigens, wenn man die in dem Art., Pyramide,
7., für den Inhalt einer dreyseitigen Pyramide aus den
echs Seitenlinien derselben gegebene $= 0$ setzt, wo-
on man den Grund leicht auffinden wird. Durch die
n ihr herrschende Symmetrie wird eine Formel leichter
u übersehen und aufzufassen. In Carnot's Mém.
ur la relation, qui existe entre les distances re-
pectives de cinq points quelconques pris dans
'espace, kommt §. 58. eine symmetrische Formel vor,
elche 130 Glieder hat, die sich aber in fünf Gruppen
ringen lassen, in deren jeder einerley Bildungsgesetz
errscht.

Die Symmetrie geometrischer Zusammensetzungen
esteht, wie die in der Baukunst geforderte, in der über-
instimmigen Lage ähnlicher und gleicher Theile zu beiden
Seiten eines ungleichen Mittels, welches hier eine gerade
inie oder eine Ebene ist. Wenn z. B. in den beiden die
Grundlinie AD gemein habenden Vierecken ABCD und
AEFD (Fig. 64.) AB=AE, CD=DF, BAD=DAE,
CDA=ADF, so ist auch ABC=AEF, BC=EF, und

BCD=EFD. Ferner sind BE, CF senkrecht auf AD, und werden von ihr in G und H halbirt, so daß B und E, so wie C und F gegen die beiden Seiten der AD ähnliche Lage haben. Die Figur ABCDFEA ist also ein symmetrisches Ganze, und ABCDA und AEFDA können ihre symmetrischen Hälften heißen. Der ganze Unterschied der beiden Figuren ABCDA und AEFDA kommt darauf hinaus, daß bey denselben rechts und links verwechselt werden, wie wenn AD der Durchschnitt einer auf der Ebene des Papiers senkrechten ebenen Spiegelfläche mit dieser Ebene wäre, wo dann AEFDA das Bild von ABCDA seyn würde. Die Folge hiervon ist, daß, wenn man sich innerhalb der genannten Figuren gestellt, und das Auge nach und nach gegen alle Seiten der Figur gewandt denkt, die gleichen Umfangsstücke von A ab gezählt in der Figur ABCDA von der rechten zur linken, in der Figur AEFDA aber von der linken zur rechten auf einander folgen, so daß man von A ausgehend den Umfang beider nach entgegengesetzten Richtungen durchgehen muß, um die gleichen Seiten in derselben Ordnung zu durchschreiten, und beym Übergange aus einer derselben in die nächste gleichviel, aber nach entgegengesetzten Seiten, abzuweichen. Stellt man sich die Figur AEFDA um A nach der Seite, wo E und F liegen, gedreht vor, bis AD einen Winkel von 180° beschrieben hat, so hat man ein Paar gleiche und ähnliche, aber nicht ähnlich liegende Figuren. Dennoch können beide leicht zum Decken oder zwischen dieselben Gränzen gebracht, und eben dadurch ihre Gleichheit erwiesen werden, daher es nicht nöthig ist, auf den angegebenen Unterschied zu achten. Bey körperlichen Figuren aber verhält sich die Sache anders, wie das folgende zeigen wird.

Es sey ABCD (Fig. 65.) eine dreyseitige Pyramide, ABC ihre Grundfläche, D ihre Spitze, von welcher auf die Ebene der Grundfläche der Perpendikel

DE gefällt und an der andern Seite derselben nach D′ verlängert sey, bis DE′ = ED ist. Werden nun D′A, D′B, D′C verbunden, so ist DACBD′ ein symmetrisches Hexaeder (Körper von sechs Seitenflächen eingeschlossen), indem in demselben auf der einen Seite der Ebene ABC alles ist, wie auf der andern. Es ist nämlich $\Delta ABD \cong \Delta ABD'$, $\Delta ACD \cong \Delta ACD$, $\Delta BCD \cong \Delta BCD'$; auch sind die Flächenwinkel an AB, BC, CA, so wie an AD und AD′, BD und BD′, CD und CD′ gleich, ferner die Neigungswinkel der Linien DA und D′A, DB und D′B, DC und D′C gegen die Ebene ABC gleich. Dennoch aber können im Allgemeinen die beiden Pyramiden ABCD und ABCD′ nicht zwischen dieselben Gränzen oder zum Decken gebracht werden, wie folgendergestalt erhellt.

Man verlängere CA, BA, DA, EA über A hinaus nach C′, B′, D″, E′, bis AC′ = AC, AB′ = AB, AD″ = AD, AE′ = AE geworden ist, und verbinde C′B′, C′D″, B′D″, D″E′, so ist AC′B′D″ die Pyramide ABCD′ nur in einer anderen Lage, welche aus der ursprünglichen entsteht, wenn die Grundfläche ABC in in ihrer Ebene um A aus der Lage ABC in die AB′C′ gedreht wird, wodurch D′E in D″E′ zu liegen kommt u. s. w. Läßt man nun die Pyramide AC′B′D″ sich nach einer Richtung fort so um A drehen, daß das $\Delta AD''E'$ immer in der Ebene ADE bleibt, so werden zwar, wenn die Ebene AB′C′ wieder mit der ABC zusammenfällt, AD″ und AD, aber im Allgemeinen nicht die Dreyecke AB′C′ und ABC einander decken, außer wenn AB = AC, und dadurch auch AB′ = AC′ ist, und AE, AE′ die Winkel BAC und B′AC′ halbiren. Die Pyramiden ABCD und AB′C′D″ congruiren also im allgemeinen nicht, folglich auch nicht ABCD′ und ABCD.

Dieses Umstandes ohngeachtet sind beide Pyramiden einander gleich, wie aus Elem. XII., 5. folgt.

Hier also wird eine Unterscheidung zwischen Körpern, die gleich und ähnlich aus oder mit Congruenz, und solchen, die gleich und ähnlich ohne Congruenz sind, nöthig. Will man bloß letztere symmetrisch nennen, so ändert man die ursprüngliche Bedeutung des Worts ab. Denn wenn AB=AC, und BAE=CAE ist, so hören die Pyramiden ABCD und ABCD' nicht auf, in dem eigentlichen Wortverstande, symmetrisch zu seyn, sie congruiren aber auch. Daß sie allgemein nicht congruiren, hängt von dem Umstande ab, daß bey den dreyseitigen Ecken an A die gleichen ebenen Winkel, welche DA und D'A mit AB und AC einschließen, ihre Lage gegen den dritten BAC verwechselt haben. Man könnte also die Pyramiden BACD und BACD' verkehrt ähnlich nennen, um diese Ähnlichkeit von der, wo die gleichen ebenen Winkel der Ecken an A in derselben Ordnung liegen, zu unterscheiden. Euklides hat diesen Unterschied nicht beachtet. Er erklärt ähnliche (eckige) Körper überhaupt als solche, welche von gleich vielen ähnlichen Ebenen begränzt werden. Vielleicht ist er zu der Vernachlässigung jenes Unterschiedes dadurch bewogen worden, daß solcher bey den Parallelepipeden wegfällt. Diese sind, wenn sie bey einerley Bestimmungsstücken verkehrt ähnlich (symmetrisch in der eingeschränkten Bedeutung des Worts) sind, allemal congruent. Indeß hängt diese Nichtbeachtung eines an sich nicht sehr bedeutenden Unterschiedes mit etwas anderem, welches wichtiger ist, zusammen. Euklides macht von der Congruenz gar keinen Gebrauch, um die Gleichheit zweyer Körper, die zu einerley Classe der von ihm betrachteten eckigen Körper gehören, als zweyer Parallelepipeden, zweyer Prismen oder zweyer Pyramiden unter gewissen vorausgesetzten Bedingungen zu erweisen, sondern er leitet ihre Gleichheit aus einem sehr allgemeinen, in der 10. Def. des eilften Buchs enthaltenen Satze ab. Und doch konnte — so scheint es — ihm nicht entgehen, daß die körperlichen Winkel,

velche er XI, 26. gleich nennt, congruent sind. Wie
ommt es also, daß Euklides die Congruenz in den
Beweisen der Sätze über die Gleichheit der Körper ganz
urückgesetzt hat, da Archimedes in einem an sich ziemlich
ffenbaren Falle, Prop. XX de Sphaeroidibus et
Conoidibus, sie anwendet? Man kann nicht anders
ermuthen, als daß Euklides, da er einsah, daß die
Stereometrie keine dem Gange, den die Planimetrie
iimmt, ganz adäquate Behandlungsweise zuläßt, eine
veitläufige, für Elemente, seiner Meinung nach, zu um-
ländliche Behandlung der Lehren von der Gleichheit der
ckigen Köper vermeiden wollte. Auch ist es in der That
iur ein einziger Satz, welcher Anstoß erregt hat, der
:8ste des eilften Buchs, die Gleichheit der beiden Pris-
nen betreffend, worein ein Parallelepipedon durch die
Diagonalfläche zerlegt wird; alles Übrige ist leicht zu
rgänzen.

Daß übrigens die älteren Geometer den Unterschied
wischen Gleichheit aus Congruenz und ohne Congruenz
ey denselben Bestimmungsstücken gar wohl gekannt ha-
en, beweiset ihre Behandlungsart der Sphärik, wo bey den
phärischen Dreyecken jener Unterschied wieder hervor-
ritt. Man darf nur die ersten Sätze im dritten Buche
es Theodosius, und einige der ersten im ersten Buche
es Menelaus ansehen, um sich davon zu überzeugen.
Wolf muß diese beiden Schriftsteller gar nicht zu Rathe
ezogen haben, weil er im zweyten Kapitel seiner Sphä-
ik (in den lateinischen Elementen) ihr Verfahren so
venig nachgeahmt hat. Segner scheint zuerst unter
ins darauf aufmerksam gemacht zu haben, daß ein Paar
reyseitige Ecken bey denselben Bestimmungsstücken gleich
eyn können, ohne congruent zu seyn. Er zeigt dieses auf
ine sehr einleuchtende Weise in der 1741 herausge-
ebenen Defensio adversus censuram Berolinen-
em S. 32. Man sehe auch seine Vorlesungen über
ie Rechenkunst und Geometrie, S. 591 und 592 der

2ten Ausg. Dadurch wurde Karsten veranlaßt, in seiner Mathesis theoretica, Rostoch., 1760. im Zusatze zu §. 296. der Geom. S. 146 jenes Unterschiedes gleichfalls zu erwähnen, und den angefochtenen Satz in Euklids Elementen (XI, 28.) auf eine andere Weise, durch die Exhaustionsmethode nämlich, zu begründen. In den später herausgegebenen Anfangsgründen hat er dieses noch bündiger geleistet. Kästner hat den oft erwähnten Unterschied entweder gar nicht gekannt, oder nicht für beachtungswerth gehalten. Man sehe seine Anfangsgründe der Geom., 59 Lehrs. und die geometr. Abhandl. II, 31, No. 23. Kästners Beyspiel hat die Verfasser mehrerer deutscher Lehrbücher, welche nach den Kästnerschen erschienen sind, verleitet, jenen Unterschied gleichfalls zu vernachlässigen.

Symmetrische Function irgend welcher unbestimmten Größen a, b, c etc. ist eine solche, worin diese Größen alle auf dieselbe Art vorkommen, die also ungeändert bleibt, man mag jene Größen unter einander vertauschen, wie man will. Z. E. $a + b + c$; abc; $ab^2 + a^2 b + bc^2 + b^2 c + ac^2 + a^2 c$, sind rationale ganze symmetrische Functionen der Größen a, b, c; hingegen ist $\frac{abc}{ab + bc + ac}$ eine rationale gebrochene symmetrische Function derselben Größen. Die Area eines Dreyecks $\frac{1}{4}\sqrt{(2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2a^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$ ist eine irrationale symmetrische Function der drey Seiten a, b, c desselben. Aber $(a - b)(b - c)(c - a)$ ist keine symmetrische Function der Größen a, b, c, weil, wenn man a und b gegenseitig vertauscht, sie in $(b - a)(c - b)(a - c)$ übergeht, welches das Entgegengesetzte des vorigen Werths ist.

Unter den rationalen symmetrischen Functionen verdienen vor allen diejenigen zuerst untersucht zu werden, deren Glieder die Form $M a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots$ haben,

vo M ein von den Grundgrößen a, b, c.... unab-
hängiger Coefficient ist, und α, β, γ.... ganze positive
oder negative Zahlen bedeuten. Denn aus solchen
Functionen sind nicht allein alle ganze symmetrische
Functionen der Größen a, b, c...., wenn man ihre
Glieder gruppweise zusammennimmt, sondern auch eine
große Menge gebrochener symmetrischer Functionen zu-
sammengesetzt. Eine symmetrische Function der an-
gegebenen Art, für welche $M a^\alpha b^\beta c^\gamma$.... die Stelle
des allgemeinen Gliedes vertritt, indem daraus durch
gehörige Vertauschung der Größen a, b, c... gegen
einander alle übrigen abgeleitet werden können, kann
nun, wie es bisher in diesem Wörterbuche geschehen ist,
füglich durch $\int M a^\alpha b^\beta c^\gamma$..., oder weil M von a, b, c....
nicht abhängt, durch $M \int a^\alpha b^\beta c^\gamma$.... bezeichnet werden.
Sie begreift, wenn der gemeinschaftliche Factor M bey
Seite gesetzt wird, wie man sieht, alle Combinations-
formen einer gewissen Gattung, nämlich die, worin von
den Elementen a, b, c.... ein Element α mal, ein an-
deres β mal, ein drittes γ mal u. s. w. vorkommt, und
kann in so fern **einförmig** heißen. Nach der Zahl
der in dem allgemeinen Gliede $a^\alpha b^\beta c^\gamma$..... enthaltenen
Elemente a, b, c... aber, oder der Zahl der Wieder-
holungsexponenten α, β, γ.... kann sie **unarisch**,
binarisch, **ternarisch** u. s. w. genannt werden.
So ist $\int a^\alpha b^\beta = a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha + b^\alpha c^\beta + b^\beta c^\alpha + a^\alpha c^\beta$
$+ a^\beta c^\alpha$ eine einförmige binarische Function der Grö-
ßen a, b, c; **abcd** hingegen eine quaternarische der
Größen a, b, c, d.

1. Die einförmigen symmetrischen Functionen,
für welche alle Wiederholungsexponenten $= 1$, sind
nichts anders, als die Summen von Combinationen
der Grundgrößen ohne Wiederholungen. In den Ar-
tikeln, Combination, 43, und Combinationslehre, 53,
sind sie durch die Symbole A, B, C, D u. s. w. be-
zeichnet worden. Eben daselbst ist gezeigt, wie die sym-

metrischen Functionen von der Form $\int a^m$ oder die Potenzensummen der Grundgrößen a, b, c..... im Fall eines ganzen positiven Exponenten m durch A, B, C, D u. s. w. sowohl abhängig als unabhängig ausgedruckt werden. Vermittelst eben dieser Formeln lassen sich aber auch die Summen der reciproken Potenzen der Grundgrößen, d. i., die symmetrischen Functionen von der Form $\int a^m$ in dem Falle eines ganzen negativen m durch A, B, C u. s. w. ausdrucken, wenn die Zahl der Grundgrößen bekannt ist. Sind derselben z. E. fünf a, b, c, d, e, so hat man

$$\int\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{e}=\frac{abcd+abce+\ldots+bcde}{abcde}$$

$$=\frac{D}{E}$$

$$\int\frac{1}{ab}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\ldots+\frac{1}{de}=\frac{abc+abd+\ldots+cde}{abcde}$$

$$=\frac{C}{E}$$

$$\int\frac{1}{abc}=\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\ldots+\frac{1}{cde}=\frac{ab+ac+\ldots+de}{abcde}$$

$$=\frac{B}{E}$$

$$\int\frac{1}{abcd}=\frac{1}{abcd}+\frac{1}{abce}+\ldots+\frac{1}{bcde}=\frac{a+b+\ldots+e}{abcde}$$

$$=\frac{A}{E}$$

$$\int\frac{1}{abcde}=\frac{1}{abcde}=\frac{1}{E}.$$

Wenn also in den Formeln

$$\int a = a + b + \ldots\ldots + e = A$$
$$\int ab = ab + ac + \ldots + de = B$$
$$\int abc = abc + abd + \ldots + cde = C$$

u. s. w., statt a, b, c, d, e ihre reciproken $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ gesetzt werden, so verwandelt sich A in $\frac{D}{E}$, B in $\frac{C}{E}$, C in $\frac{B}{C}$ u. s. w. Diese Substitutionen sind also auch n den Formeln für $\int a^m$, welche gelten, die Größen , b, c, ... mögen seyn, was man nur will, zu nachen, um die für $\int a^{-m}$ zu erhalten. Dadurch entstehen also zuerst folgende abhängige Formeln

$$a^{-1} = \frac{D}{E}$$

$$a^{-2} = \frac{D}{E}\int a^{-1} - 2\frac{C}{E}$$

$$a^{-3} = \frac{D}{E}\int a^{-2} - \frac{C}{E}\int a^{-1} + 3\frac{B}{E}$$

$$a^{-4} = \frac{D}{E}\int a^{-3} - \frac{C}{E}\int a^{-2} + \frac{B}{E}\int a^{-1} - 4\frac{A}{E}$$

tc.

rner diese unabhängigen

$$\int a^{-1} = \frac{D}{E}$$

$$\int a^{-2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{C}{E} - \frac{2}{2}\cdot\frac{D^2}{E^2} = \frac{\frac{2}{1}.CE - \frac{2}{2}.D^2}{E^2}$$

$$+\int a^{-3} = \frac{3}{1}\cdot\frac{B}{E} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2CD}{EE} + \frac{3}{3}\cdot\frac{D^3}{E^3}$$

$$= \frac{\frac{3}{1}\cdot BE^2 - \frac{3}{2}\cdot 2CDE + \frac{3}{3}D^3}{E^3}$$

$$-\int a^{-4} = \frac{4}{1}\cdot\frac{A}{E} - \frac{4}{2}\cdot\frac{2BD+CC}{EE} + \frac{4}{3}\cdot\frac{3CD^2}{E^3}$$

$$- \frac{4}{4}\cdot\frac{D^4}{E^4}$$

$$= \frac{\frac{4}{1}AE^3 - \frac{4}{2}(2BDE^2 + C^2E) + \frac{4}{3}.3CD^2E - \frac{4}{4}D^4}{E^4}$$

u. s. w.

Die unabhängigen Formeln für $\int a^{-m}$ ergeben sich bey fünf Grundgrößen auch aus den gleichartigen Formeln für $\int a^m$, wenn man in diesen statt A, B, C, D, E die Größen D, CE, BE^2, AE^3, E^4 schreibt, F, G u. s. w. aber $= 0$ setzt, und das so erhaltene Resultat mit E^m dividirt. Daß F, G, H u. s. w. auch aus den abhängigen Formeln für dieselbe Anzahl Grundgrößen wegfallen, braucht wohl kaum erinnert zu werden.

2. Umgekehrt lassen sich A, B, C, D u. s. w. durch $\int a$, $\int a^2$, $\int a^3$ u. s. w., oder wenn man die Bezeichnung von 53. des Art., Combinatorische Analysis, beybehält, durch P, Q, R, S u. s. w. ausdrucken. Da nämlich nach dem, was dort gezeigt ist,

$$\log(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.})$$

$$= Pz - \tfrac{1}{2}Qz^2 + \tfrac{1}{3}Rz^3 - \tfrac{1}{4}Sz^4 + \text{etc.}$$

also

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.} = e^{Pz - \frac{1}{2}Qz^2 + \frac{1}{3}Rz^3 - \text{etc.}}$$

so

so wird aus 49. desselben Art., wenn man daselbst $n = 0$ setzt, wodurch $\alpha = e'' = 1$ wird, a aber $= P$, $b = -\frac{1}{2}Q$, $c = +\frac{1}{3}R$ u. s. w. macht,

$$A = P$$

$$2B = P^2 - 2 . \frac{Q}{2}$$

$$6C = P^3 - 3 . \frac{2PQ}{1 . 2} + 6 . \frac{R}{3}$$

$$24D = P^4 - 4 . \frac{3P^2Q}{1^2 . 2} + 12\left(\frac{2PR}{1 . 3} + \frac{Q^2}{2^2}\right) - 24 . \frac{S}{4}$$

$$120E = P^5 - 5 . \frac{4P^3Q}{1^3 . 2} + 20\left(\frac{3P^2R}{1^2 . 3} + \frac{3PQ^2}{1 . 2^2}\right)$$

$$- 60\left(\frac{2PS}{1 . 4} + \frac{2QR}{2 . 3}\right) - 120 . \frac{T}{8}$$

u. s. w.

Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke ist folgendes: Die Summe der ntionen multiplicirt in $n(n-1)(n-2)\dots 1$. enthält alle Combinationen der Größen P, Q, R, S u. s. w., deren Localsumme für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \dots \\ P, & Q, & R, & S \dots \end{pmatrix} = n$. Jede Combination wird mit der Versetzungszahl ihrer Elemente multiplicirt, und durch die ihr entsprechende Zahlencomplexion, als Product der Elemente betrachtet, dividirt. Außerdem bekommt noch jede Classe der Combinationen einen numerischen Factor, welcher für die höchste Classe $= 1$, für jede andere mte Classe aber $= n(n-1)\dots m+1$ ist. Die Vorzeichen wechseln mit den Classen von der höchsten bis zur niedrigsten ab.

Die abhängigen Formeln, welche A, B, C, D u. s. w. durch P, Q, R, S u. s. w. geben, werden aus (50) des

angeführten Artikels, oder noch leichter aus dem Art. Combination, 43., erhalten. Sie sind

$$A = P$$
$$2B = AP - Q$$
$$3C = BP - AQ + R$$
$$4D = CP - BQ + AR - S$$
$$5E = DP - CQ + BR - AS + T$$

u. s. w.

3. Einen Hauptgegenstand in der Lehre von den symmetrischen Functionen macht die Zurückführung der einförmigen symmetrischen Functionen mit mehreren Exponenten auf bloße Potenzensummen oder einförmige unarische Functionen aus. Diese Reduction ist immer möglich, wie das folgende übersehen lassen wird.

4. Es ist $\int a^\alpha . \int a^\beta = \int a^{\alpha+\beta} + \int a^\alpha b^\beta$

Denn zu den Partialproducten, welche das Product der beiden Reihen

$$\int a^\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + d^\alpha + \text{etc.}$$
$$\int a^\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + d^\beta + \text{etc.}$$

enthält, liefert jede Reihe einen Factor. Beide Factoren werden nun entweder in derselben Stelle oder an verschiedenen Stellen genommen. In jenem Falle ist das Partialproduct von der Form $a^{\alpha+\beta}$, in diesem von der Form $a^\alpha b^\beta$, welches den Satz giebt.

5. Es ist $\int a^\alpha . \int a^\beta . \int a^\gamma = \int a^{\alpha+\beta+\gamma} + \int a^{\alpha+\beta} b^\gamma$
$$+ \int a^{\alpha+\gamma} b^\beta + \int a^{\beta+\gamma} b^\alpha$$
$$+ \int a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Denn zu den Partialproducten, woraus das Product der drey Reihen

$$\int a^\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + d^\alpha + \text{etc.}$$
$$\int a^\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + d^\beta + \text{etc.}$$
$$\int a^\gamma = a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma + d^\gamma + \text{etc.}$$

besteht, wird aus jeder Reihe ein Factor genommen. Diese drey Factoren befinden sich nun entweder alle in einerley Stelle, oder zwey von ihnen sind gleichstellig und der dritte mit diesen ungleichstellig, oder alle drey sind ungleichstellig. Im ersten Falle ist das Product von der Form $a^{\alpha+\beta+\gamma}$, im andern ist es, je nachdem die beiden gleichstelligen Factoren entweder aus der ersten und zweyten, oder aus der ersten und dritten, oder aus der zweyten und dritten Reihe genommen werden, entweder von der Form $a^{\alpha+\beta} b^\gamma$, oder $a^{\alpha+\gamma} b^\beta$, oder $a^{\beta+\gamma} b^\alpha$; im dritten und letzten Falle endlich hat das Product die Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, welches der Satz ist.

6. Auf ähnliche Art kann man die Zusammensetzung der Producte von vier und mehr Potenzensummen entwickeln. Man wird aber hierbey bald gewahr werden, daß man nur die Exponenten der verschiedenartigen Theile zu kennen braucht, um sogleich den ganzen Complexus derselben hinschreiben zu können. Diese Exponenten aber lehrt die folgende involutorische Anordnung kennen.

$$\begin{array}{l}
\alpha \mid \beta \mid \gamma \mid \delta \\
\alpha + \beta \mid \gamma \mid \delta \\
\hline
\alpha + \gamma,\ \beta \mid \delta \\
\beta + \gamma,\ \alpha \mid \delta \\
\alpha + \beta + \gamma \mid \delta \\
\hline
\alpha + \delta,\ \beta,\ \gamma \\
\beta + \delta,\ \alpha,\ \gamma \\
\gamma + \delta,\ \alpha,\ \beta \\
\alpha + \beta + \delta,\ \gamma \\
\alpha + \beta,\ \gamma + \delta \\
\alpha + \gamma + \delta,\ \beta \\
\alpha + \gamma,\ \beta + \delta \\
\beta + \gamma + \delta,\ \alpha \\
\beta + \gamma,\ \alpha + \delta \\
\alpha + \beta + \gamma + \delta \\
\hline
\end{array} \quad \text{etc.}$$

etc.

Diese Involution zeigt, so weit sie hier fortgesetzt ist, die verschiedenen Arten, auf welche die Summe $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ aus den Größen α, β, γ, δ und ihren Verbindungen zu zwey, drey, vier, ohne eine derselben zu wiederholen, gebildet werden kann. Die in dieser Art möglichen Zusammensetzungsweisen einer Summe werden aus denen für die nächstniedrige Summe, welche der Winkelhaken absondert, erhalten, wenn man allen Complexionen zu der vorhergehenden Summe rechter Hand das nächsthöhere Element beyfügt, und den so entstandenen Complexionen noch diejenigen zusetzt, welche aus der Verbindung dieses nächsthöheren Elements mit jedem der in den Complexionen der niedern Summe schon vorhandenen zu einem hervorgehen, die übrigen Elemente aber ungeändert hinschreibt.

Hiernach ist nun

$$\int a^{\alpha}.\int a^{\beta}.\int a^{\gamma}.\int a^{\delta} = \int a^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} + \int a^{\alpha+\beta+\gamma} b^{\delta}$$
$$+ \int a^{\alpha+\beta+\delta} b^{\gamma} + \int a^{\alpha+\gamma+\delta} b^{\beta}$$
$$+ \int a^{\beta+\gamma+\delta} b^{\alpha} + \int a^{\alpha+\beta} b^{\gamma+\delta}$$
$$+ \int a^{\alpha+\gamma} b^{\beta+\delta} + \int a^{\alpha+\delta} b^{\beta+\gamma}$$
$$+ \int a^{\alpha+\beta} b^{\gamma} c^{\delta} + \int a^{\alpha+\gamma} b^{\beta} c^{\delta}$$
$$+ \int a^{\alpha+\delta} b^{\beta} c^{\gamma} + \int a^{\beta+\gamma} b^{\alpha} c^{\delta}$$
$$+ \int a^{\beta+\delta} b^{\alpha} c^{\gamma} + \int a^{\gamma+\delta} b^{\alpha} c^{\beta}$$
$$+ \int a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta}.$$

7. Es ist

$$\int a^{\alpha} b^{\beta} = \int a^{\alpha}.\int a^{\beta} - \int a^{\alpha+\beta}$$

ergiebt sich sogleich durch Transposition aus (4).

8. Es ist

$$\int a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} = \int a^{\alpha}.\int a^{\beta}.\int a^{\gamma} - \int a^{\alpha+\beta}.\int a^{\gamma} - \int a^{\alpha+\gamma} \int a^{\beta}$$
$$- \int a^{\beta+\gamma}.\int a^{\alpha} + 2\int a^{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Denn aus (5) ist

$$\int a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} = \int a^{\alpha}.\int a^{\beta}.\int a^{\gamma} - \int a^{\alpha+\beta} b^{\gamma} - \int a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}$$
$$- \int a^{\beta+\gamma} b^{\alpha} - \int a^{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Drückt man die hier vorkommenden binarischen Functionen nach (7) aus, indem man

$$\int a^{\alpha+\beta} b^{\gamma} = \int a^{\alpha+\beta}.\int a^{\gamma} - \int a^{\alpha+\beta+\gamma}$$

u. s. w. macht, so entsteht nach gehöriger Reduction der angegebene Ausdruck.

9. Es ist auf ähnliche Art

$$\int a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} = \int a^{\alpha}.\int a^{\beta}.\int a^{\gamma}.\int a^{\delta} - \int a^{\alpha+\beta} \int a^{\gamma}.\int a^{\delta}$$
$$- \int a^{\alpha+\gamma}.\int a^{\beta}.\int a^{\delta} - \int a^{\alpha+\delta}.\int a^{\beta}.\int a^{\gamma}$$
$$- \int a^{\beta+\gamma}.\int a^{\alpha}.\int a^{\delta} - \int a^{\beta+\delta}.\int a^{\alpha}.\int a^{\gamma}$$
$$- \int a^{\gamma+\delta}.\int a^{\alpha}.\int a^{\beta} + 2\int a^{\alpha+\beta+\gamma}.\int a^{\delta}$$
$$+ 2\int a^{\alpha+\beta+\delta}.\int a^{\gamma} + 2\int a^{\alpha+\gamma+\delta} \int a^{\beta}$$

$$+ 2 \int a^{\beta+\gamma+\delta} . \int a^{\alpha} + \int a^{\alpha+\beta} . \int a^{\gamma+\delta}$$
$$+ \int a^{\alpha+\gamma} . \int a^{\beta+\delta} + \int a^{\alpha+\delta} . \int a^{\beta+\gamma}$$
$$- 6 \int a^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

10. Die Ausdrücke in (7), (8) und (9) zeigen allgemein die Zusammensetzung der einförmigen binarischen, ternarischen und quaternarischen symmetrischen Functionen aus unarischen oder bloßen Potenzensummen. Das allgemeine Gesetz dieser Zusammensetzungen betreffend, so sind die Exponenten dieselben, wie in (4), (5) und (6), also durch die Involution in (6) gegeben, es bleiben also nur noch die Vorzeichen und die Coefficienten zu bestimmen übrig. Das Gesetz für diese hat Waring in seinen Miscellan. analyt. und Meditat. algebraic. ganz allgemein, aber ohne Beweis, angegeben, welchen Paoli in dem Supplemento agli elementi di Algebra (Pisa, 1804), Op. II. §. 28. ersetzt und durch die umgekehrte Methode der Differenzen geführt hat. Meier Hirsch hat in seiner Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, Berlin, 1809. §. 25. einen mehr elementarischen Beweis durch den Schluß von m auf m + 1 gegeben, der aber, wie der Kästnersche Beweis des binomischen Lehrsatzes, im Grunde gleichfalls auf der Differenzenmethode beruhet.

11. Die vorigen Sätze erleiden einige Modificationen, wenn in dem allgemeinen Ausdrucke einer einförmigen symmetrischen Function $\int a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \dots$ zwey oder mehrere der Exponenten α, β, γ, $\delta \dots$ gleich werden, und zwar aus einem zwiefachen Grunde. Erstens nämlich werden dadurch mehrere Glieder des Summenausdrucks $\int a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \dots$ selbst gleich und in eins zusammengezogen. Wenn z. E. in $\int a^{\alpha} b^{\beta} = a^{\alpha} b^{\beta} + a^{\beta} b^{\alpha} + a^{\alpha} c^{\beta} + a^{\beta} c^{\alpha} + \dots + b^{\alpha} c^{\beta} + b^{\beta} c^{\alpha} +$ etc. $\alpha = \beta$ wird, so verwandelt sich $\int a^{\alpha} b^{\beta}$ in $a^{\alpha} b^{\alpha} + a^{\alpha} b^{\alpha} + a^{\alpha} c^{\alpha} + a^{\alpha} c^{\alpha} + \dots + b^{\alpha} c^{\alpha} + b^{\alpha} c^{\alpha} +$ etc. $= 2 a^{\alpha} b^{\alpha}$

- $2a^\alpha c^\alpha + \ldots + 2b^\alpha c^\alpha +$ etc., d. i., in $2\int a^\alpha b^\alpha$.
ben so geht $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma$, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ wird, in
$\int a^\alpha b^\alpha c^\alpha$ über. $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon$ hingegen verwandelt
h in $12\int a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\delta e^\delta$, wenn $\alpha = \beta = \gamma$, und $\delta = \varepsilon$
ird, wie daraus sich ergiebt, daß jede Combinations-
rm wie a b c d e, wenn alle Exponenten ungleich sind,
$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon$ durch Versetzung der Exponenten
. 2 . 3 . 4 . 5 Glieder, wenn aber $\alpha = \beta = \gamma$ und $\delta = \varepsilon$,

$\int a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\delta e^\delta$ nur $\dfrac{1.2.3.4.5.}{1.2.3.1.2}$ Glieder liefert.

veytens werden aber auch in der Zusammensetzung von
$^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots$ aus Potenzensummen und Producten
n Potenzensummen durch Gleichsetzung zweyer oder
ehrerer Exponenten mehrere Glieder gleich, und in eins
sammengezogen. So werden z. B. in $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$,
enn $\alpha = \beta = \gamma$ wird, die drey Glieder $-\int a^{\alpha+\beta}.\int a^\gamma.\int a^\delta$;
$-\int a^{\alpha+\gamma}.\int a^\beta.\int a^\delta$; $-\int a^{\beta+\gamma}.\int a^\alpha.\int a^\delta$ gleich, und jedes
$= -\int a^{2\alpha}.\int a^\alpha.\int a^\delta$; sie vereinigen sich also zu dem ein-
jen Gliede $- 3\int a^{2\alpha}.\int a^\alpha.\int a^\delta$, so daß aus beiden
ründen die Gleichung in (9), wenn $\alpha = \beta = \gamma$ wird,
d man überall statt δ wieder β schreibt, in folgende
ergeht.

$$
\begin{aligned}
6\int a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\beta = (\int a^\alpha)^3 &- 3\int a^{2\alpha}.\int a^\alpha.\int a^\beta \\
&- 3\int a^{\alpha+\beta}.(\int a^\alpha)^2 + 2\int a^{3\alpha}\int a^\beta \\
&+ 6\int a^{2\alpha+\beta}.\int a^\alpha + 3\int a^{2\alpha}.\int a^{\alpha+\beta} \\
&- 6\int a^{3\alpha+\beta}.
\end{aligned}
$$

oraus nun

$$
\begin{aligned}
a^\alpha b^\alpha c^\alpha d^\beta = \tfrac{1}{6}(\int a^\alpha)^3 &- \tfrac{1}{2}\int a^{2\alpha}.\int a^\alpha.\int a^\beta - \tfrac{1}{2}\int a^{\alpha+\beta}.(\int a^\alpha)^2 \\
&+ \tfrac{1}{3}\int a^{3\alpha}.\int a^\beta + \int a^{2\alpha+\beta}.\int a^\alpha + \tfrac{1}{2}\int a^{2\alpha}.\int a^{\alpha+\beta} \\
&- \int a^{3\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

rvorgeht.

Das allgemeine Gesetz, nach welchem solche einför-
ige symmetrische Functionen mit wiederholten Expo-
enten aus Potenzensummen zusammengesetzt werden,

hat Meier Hirsch in der vorhin (10) angezogenen Schrift, §. 26—31., sehr gut entwickelt. Früher hat Vandermonde dasselbe in einem den Mém. de Paris für 1771 einverleibten Aufsatze, der auch sonst viel merkwürdiges zur Theorie und Auflösung der algebraischen Gleichungen enthält, in einer einfachen und schicklichen Bezeichnung, welche Meier Hirsch angenommen hat, aber ohne Beweis, vorgetragen, nur daß er die Involution nicht gebraucht, sondern statt ihrer die Auflösung unbestimmter Gleichungen setzt. Begreiflich enthält die allgemeine Auflösung, wobey die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ beziehungsweise a, b, c, d.... mal wiederholt angenommen werden, auch den Fall unter sich, wo jeder Exponent nur einmal vorkommt, also alle verschieden sind. Vandermonde's Auflösung giebt daher auch die Formeln in (7) = (9), und die ihnen ähnlichen höheren. Übrigens hat Vandermonde den Ausdruck für $\int a^m$ durch A, B, C, D, etc. in dem Falle eines ganzen positiven m gleichfalls von der Auflösung einer unbestimmten Gleichung, einer sogenannten Bedingungsgleichung, abhängig gemacht.

12. Das von (4) bis hierher beygebrachte wird hinreichen, die Behauptung in (3), daß jede einförmige symmetrische Function $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ sich für irgend welche Beschaffenheit der Exponenten α, β, γ, $\delta \ldots$ durch bloße Potenzensummen ausdrucken lasse, zu rechtfertigen.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen und in letzterem Falle die Anzahl der Grundgrößen a, b, c, d.... bekannt, so lassen sich, wie aus dem obigen erhellet, die Potenzensummen, mithin auch $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ durch A, B, C, D, u. s. w. rational ausdrucken. Insbesondere wird $\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ eine rationale ganze Function der Größen A, B, C, D, u. s. w., wenn die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ lauter positive ganze Zahlen sind. Und da jede ganze sym-

metrische Function der Größen a, b, c, d .... entweder selbst eine einförmige symmetrische Function, oder aus solchen einförmigen Functionen zusammengesetzt ist, so folgt, daß alle ganze symmetrische Functionen der Größen a, b, c, d..... durch rationale ganze Functionen der Größen A, B, C, D, u. s. w. dargestellt werden können.

13. Der Satz, daß jede (ganze) unveränderliche oder symmetrische Function der Größen a, b, c, d.... sich durch A, B, C, D, u. s. w. rational darstellen lasse, findet sich zuerst in einer Abhandlung Eulers in den Berliner Memoiren für 1748, **Démonstration sur le nombre des points d'intersection de deux lignes courbes**, allgemein aufgestellt, und an einigen besonderen Fällen dargethan. Nachher hat Cramer am Ende seiner Introduction die Darstellung einförmiger symmetrischer Functionen durch Formeln mit den Größen A, B, C, D, u. s. w. umständlicher ausgeführt und insbesondere für die Entwickelung der Producte zweyer solcher Functionen, die er **Facteurs-seconds** nennt, Vorschriften gegeben. Einen durch seine Kürze und Bündigkeit ausgezeichneten Beweis des letzten Satzes in (12) trifft man in der Abhandlung von Gauß, **Demonstratio altera noua theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram vnius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolui posse**, §. 4. an.

14. Zur Erläuterung des eben erwähnten Satzes dienen die Formeln in dem Artikel, Combination, 48., welche aus den Sätzen in (7) und folgg. sich ergeben.

Es ist, wenn man in (7) $\alpha = \beta = 2$ macht, und (11) in Anwendung bringt

$$\int a^2 b^2 = \frac{(\int a^2)^2 - \int a^4}{2}$$

und, wenn man für $\int a^2$, $\int a^4$ ihre Werthe durch A, B, C, D aus (Combinatorische Analysis, 53.) setzt

$$= \frac{(AA-2B)^2 - A^4 + 4A^2B - 4AC - 2BB + 4D}{2}$$

$$= BB - 2AC + 2D$$

Eben so wird mit Zuziehung von (11) aus (8)

$$\int a^2 b^2 c^2 = \frac{(\int a^2)^3 - 3\int a^4 . \int a^2 + 2\int a^6}{6}$$

und nach Substitution der Werthe von $\int a^2$, $\int a^4$, $\int a^6$

$$= CC - 2BD + 2AE - 2F.$$

u. s. w. Dieselben Formeln werden auch erhalten, wenn man in (2) die formlosen Größen a, b, c, d, u. s. w. mit ihren Quadraten a^2, b^2, c^2, d^2, u. s. w. vertauscht, wodurch $A = \int a^2$, $B = \int a^2 b^2$, $C = \int a^2 b^2 c^2$, u. s. w., P aber $= \int a^2$, $Q = \int a^4$, $R = \int a^6$, u. s. w. wird.

15. Die symmetrischen Functionen spielen eine Hauptrolle in der Theorie der algebraischen Gleichungen, bey der Verwandlung und Auflösung derselben, bey dem Elimnationsproceß, und der Wegschaffung der Wurzelgrößen aus denselben. Darüber ertheilt die mehrmals angeführte Schrift von Meier Hirsch sehr guten Unterricht. Aber auch sonst, wo Größen vorkommen, welche aus anderen so bestimmt werden, daß keine derselben dabey vor den übrigen etwas voraus hat, bietet die Lehre von den symmetrischen Functionen Abkürzungen und Reductionen dar. Ein Beyspiel dieser Art giebt eine Abhandlung von Euler Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum in den Nov. Commentar. Petrop. T. XI, worin er die Entfernungen je zweyer der vier merkwürdigen Puncte eines Dreyecks, des Schwerpuncts, der beiden Mittel-

uncte des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises,
und des Durchschnittspuncts der drey Perpendikel von den
Winkelspitzen auf die gegenüber liegenden Seiten durch
, q, r, wo p der Umfang des Dreyecks, q die Summe
er Producte aus je zwey Seiten, und r das Product
ller drey Seiten ist, ausdrückt, und die dadurch ent-
tehenden Ausdrücke mittelst des Ausdrucks für die Area
es Dreyecks durch p, q, r, noch weiter vereinfacht.

In Kramps Elémens d'Arithmétique uni-
verselle enthält das 30ste Kap. das wichtigste der
ehre von den symmetrischen Functionen in einem kur-
en, aber doch lichtvollen Vortrage. Zur Ergänzung
iniger mehr angedeuteten als ausführlich entwickelten
Sätze, so wie zur Kenntniß der Anwendungen dient
as Werk von Meier Hirsch, dessen Studium also
nit dem des Krampischen nützlich verbunden wird.

Posselts Abhandlung De functionibus qui-
busdam symmetricis, Goettingae, 1818, betrifft
inige von Euler zuerst im 2ten Bande der Integralrech-
nung §. 1168. aufgestellten Sätze über gewisse rationale
gebrochene symmetrische Functionen, welche der Verfasser
hier auf eine elementarische Weise darthut, erweitert, und
hnen noch andere neue Sätze derselben Art beyfügt. Mit
en Eulerischen Sätzen hat sich auch Fuß, Act. Acad.
Petropol. T. I. beschäfftigt.

Syntaktik ist einerley mit Combinationslehre.
orenz hat diese Benennung derselben eingeführt und
ebraucht.

Synthesis (compositio, Zusammensetzung) ist
as Verfahren, wobey man in der Erforschung und
Mittheilung von Erkenntnissen von den Gründen zu
en Folgen fortschreitet, so wie man umgekehrt bey der
Analysis von den Folgen zu den Gründen zurückgeht.
Nach der Synthesis wird also ein Satz directe (a priori)
mittelst einer Combination von Sätzen bewiesen, die als

richtig anerkannt werden, und eine Aufgabe so aufgelöset, daß man bloß aus den gegebenen Größen und den mittelbar durch sie gegebenen die unbekannte findet, und diese aus jenen zusammensetzt. Nach der Analysis hingegen (a posteriori) beweiset man einen Satz dadurch, daß man zeigt, daß man von demselben auf einen als wahr ausgemachten Satz kommt, und löset eine Aufgabe so auf, daß man von dem gesuchten auf etwas gegebenes geführt wird. Beide Verfahrungsarten sind in dem Vortrage mathematischer Erkenntnisse anwendbar und üblich.

Zur Erläuterung des angegebenen Unterschiedes in der Beweisführung mag der Satz dienen, daß, wenn man an je zwey von drey ungleichen Kreisen ein Paar gemeinschaftlicher Berührungslinien so zieht, daß jede derselben die Kreise an einerley Seite der die Mittelpuncte verbindenden geraden berührt, und solche bis zu ihrem Durchschnitt verlängert, die drey Durchschnittspuncte in gerader Linie liegen.

Synthetisch wird dieser Satz so bewiesen:

Es seyen (Fig. 66.) C, C′, C″ die Mittelpuncte der drey Kreise, deren Halbmesser beziehungsweise r, r′, r″ sind, und M, M′, M″ die Durchschnittspuncte der drey Paare berührender HM, IM; H′M′, I′M′; H″M″, I″M″, so soll bewiesen werden, daß M, M′, M″ in gerader Linie sind.

Zu dem Ende werde CK, welche der C′M″ in K begegnet, der MM″ parallel gezogen, so ist nach einem bekannten Satze (Elem. VI, 2.)

$$C'M : CM = C'M'' : KM''$$

Nun ist, wenn man sich von C und C′ Halbmesser an die Berührungspuncte der Kreise um C und C′ mit MH gezogen vorstellt,

$$C'M : CM = r' : r$$

Daher $\qquad r' : r = C'M'' : KM''$

nd $\qquad r' : C'M'' = r : KM''$

Denkt man sich von C und C'' gleichfalls Halb-
nesser an die Berührungspuncte auf H'M' gezogen,
) ergiebt sich

$$r' : C'M'' = r'' : C''M''$$

lglich ist

$$r'' : C''M'' = r : KM''$$

der $\qquad r'' : r = C''M'' : KM''$

i. $\qquad C''M' : CM' = C''M'' : KM''$

Daher ist M''M' der CK parallel, und folglich
IM''M' eine einzige gerade Linie, weil nämlich hier-
ıch $MM''C'' + C''M''M' = M''KC + C''KC =$
oey rechten Winkeln.

Dieser Beweis ist synthetisch, indem bloß bekannte
äße, welche sich theils durch Anwendung allgemeiner
ometrischer Lehrsäße auf die vorliegende Größenver-
ndung ergeben, theils aus der allgemeinen Propor-
)nslehre entlehnt sind, darin so verbunden werden,
ß der zu beweisende Saß das Ergebniß des leßten
chlußsaßes ist.

Ein analytischer Beweis desselben Saßes nimmt
, daß M, M'', M' in gerader Linie sind, und folgert
raus, daß, wenn nun von den Puncten M'', M' die
erpendikel M''m'', M'm' auf MC gefällt werden,

$$Mm' : Mm'' = M'm' : M''m''$$

, welches auch in der That so befunden wird, wie
in in Meier Hirsch's Sammlung geometrischer
ıfgaben, Th. 2. §. 271., ersehen kann, wo der Be-
is auf diese Art geführt ist. Freylich ist er da-
rch nicht zum kürzesten ausgefallen.

Die Synthesis bleibt wesentlich dasselbe Verfahren, man mag sich algebraischer Zeichen bedienen oder die in einem geometrischen Schema vorkommenden Größen unmittelbar andeuten.

Indeß muß man doch zwey Arten derselben unterscheiden, diejenige, deren sich die Alten bedienten, und die algebraische, welche bey den Neueren die üblichste ist.

Die Synthesis der Alten gebraucht gleichsam als Bindemittel bey der Zusammensetzung der schon gefundenen Sätze und Auflösungen nichts als die Addition, Subtraction und die geometrischen Proportionen. Multiplication und Division kommen nur vor, wo Vielfache einer Größe zu nehmen sind, oder eine Größe in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen ist. Ausziehung einer Quadratwurzel ist Erfindung einer mittleren geometrischen Proportionalgröße zwischen zwey gegebenen; und die Ausziehung einer Cubikwurzel ist die Erfindung von zwey mittleren Proportionalgrößen zwischen zwey gegebenen. Was nach der neueren Rechnungsart ein Product aus zwey Linien heißt, ist in der alten Geometrie Rechteck; ein Product aus drey Linien oder aus einer Linie in eine Fläche — rechtwinkliges Parallelepipedon. Ein Product von vier Linien, einer Linie in einen Körper, oder von zwey Flächen, von Flächen in Körper, und dergleichen Producte von mehr als drey Dimensionen konnten gar nicht vorkommen. Bey diesen wenigen und einfachen Hülfsmitteln zur Verknüpfung der Größen war es viel schwerer die Relationen derselben zu entdecken, als nach dem Verfahren der Neueren. Die Algebra und Analysis bieten uns einen reichen Vorrath von allgemeinen Sätzen und Auflösungen dar, aus denen man nur die passenden auszuheben, und mit den besonderen Bestimmungen jedes Falles einer Relation zu verbinden braucht. Daher hat der Gang der neueren mathematischen Methode viel gleichförmiges, welches in manchen Fällen leicht nachgeahmt werden kann. Die Alten mußten

fast für jeden Satz einen eigenen Weg auffinden. Desto mehr muß man sich wundern, wie sie bey so wenigen und so einfachen Hülfsmitteln so vieles haben leisten können.

Ein Umstand, der mit dem Verfahren der alten Geometer, es mochte dasselbe Synthesis oder Analysis in der vorhin angegebenen Bedeutung dieser Ausdrücke seyn, nothwendig verbunden war, ist die ununterbrochene Betrachtung der Figur, und die Aufmerksamkeit auf dieselbe vom Anfange der Schlußkette bis zu Ende. Das algebraische Verfahren der Neueren erfordert diese Aufmerksamkeit nur bis zu einem gewissen Puncte, bis dahin nämlich, wo die in der Voraussetzung der aufgestellten Frage, es mag dadurch der Erweis eines Lehrsatzes oder die Auflösung einer Aufgabe gesucht werden, enthaltenen Bedingungen analytisch oder durch Gleichungen ausgedruckt sind. Von diesem Puncte an nämlich beginnt das eigentliche Geschäft der Algebra, wobey man der Betrachtung der Figur sich ganz überheben kann, und nicht eher zu derselben zurückzukehren braucht, als um das Resultat der algebraischen Operationen auf dieselbe zu beziehen und geometrisch zu deuten. In den neuesten Zeiten hat man die algebraische Behandlung geometrischer Gegenstände dadurch von der Betrachtung der Figur noch unabhängiger zu machen gesucht, daß man die Lage aller Puncte im Raume, und damit auch den Zug gerader sowohl als krummer Linien, und die Verbreitung ebener und gekrümmter Flächen in demselben durch Coordinaten, wozu man in der Regel rechtwinklige wählt, bestimmt, übrigens aber dieselbe Maxime, welche die alten Geometer rücksichtlich der Einmischung der Arithmetik in die Geometrie beobachteten, in Hinsicht der Zuziehung der Geometrie befolgt, d. h., nur die zur Aufstellung der Fundamentalgleichungen unumgänglich nöthigen allgemeineren Sätze der Geometrie, welche unmittelbaren Bezug auf die Coordinatenmethode haben, in Anwendung bringt,

ohne erst vorläufige Constructionen zu machen, und dadurch die Anwendung speciellerer Sätze vorzubereiten. Dieses Verfahren ist es, welches man jetzt gewöhnlich unter der Benennung des analytischen versteht, und solches dem geometrischen ganz auf Betrachtung der Figur gegründeten Verfahren der alten Geometer, das den Namen des synthetischen bekommt, entgegensetzt. Es ist durch seine Einfachheit und Gleichförmigkeit, so wie durch die Eleganz, die es in der Behandlung zuläßt, gleich bewundernswerth, durch seine große Ausdehnung und Stärke aber verdient es den Vorzug vor dem synthetischen Verfahren der Alten. Dieser Vorzug verdankt es unter andern mit dem Gebrauch der entgegengesetzten Größen.

Die Einfachheit der Constructionen nämlich, wodurch nach der alten Synthesis die Bestandtheile eines Beweises verbunden werden oder das Gesuchte herausgebracht wird, macht es nothwendig, jeden Fall einer Größenverbindung, worin die Lage der Linien eine andere ist, besonders vorzunehmen. Die neuere Mathematik begreift durch den Gebrauch des Entgegengesetzten alle verwandten Fälle unter einer einzigen Untersuchung, die an einem der verwandten Fälle angestellt und mit der gehörigen Veränderung der Vorzeichen + und — auf alle übrigen angewandt wird. Dieses Verfahren kürzt die Untersuchungen sehr ab, wogegen die Betrachtung der einzelnen Fälle augenscheinlicher ist, weil sie jeden sinnlich darstellt. Überhaupt, und die Synthesis der Alten keine Rechnungsformeln gebraucht, sondern jeden Schritt zur Anschauung bringt, ist sie befriedigender als die Methode der Neueren, die aber dennoch eben die Gewißheit gewährt, wenn man sie gehörig gefaßt hat, und einsieht, wie das Besondere im Allgemeinen enthalten ist, und daher wieder aus der Betrachtung eines besonderen Falls jeden anderen sich darstellen kann.

Dadurch, daß bey der Behandlungsart in der Mathematik der Alten der Beweis jedes Satzes und die Auflösung jeder Aufgabe eine eigene Verknüpfung von Sätzen und Constructionen hat, ist es oft schwer, den Weg, auf welchem ein Beweis oder eine Auflösung gefunden sind, aufzuspüren. Daher heißt Synthesis auch überhaupt das Verfahren, wobey die Kette von Schlüssen, die zu einem Satze oder einer Auflösung geführt haben, nicht bemerkbar ist, so wie Analysis im Gegensatze die Darlegung der ganzen Folge von Sätzen und Constructionen, in welcher das Vorgetragene gefunden ist.

In dieser Rücksicht ist Analysis mit der heuristischen Methode einerley. Newtons Principien sind ein synthetisch abgefaßtes Werk, indem ihr Verfasser ganz und gar keine Spur des Weges gelassen hat, auf welchem er zu seinen großen und wichtigen Entdeckungen gelangt ist, sondern bloß die Sätze und Auflösungen mit ihren auf die Betrachtung der Figur gegründeten Beweisen aufstellt, die aber Wolfs Urtheile nach doch nicht die ächte Form der synthetischen Beweise der alten Geometer haben. In einem noch höheren Grade gilt dieses Urtheil von Hermanns Phoronomie. Euler klagt daher in der Vorrede zum ersten Theile seiner älteren Mechanik, daß er durch das Studium dieser Werke nicht in den Stand gesetzt worden sey, Aufgaben, welche nur in etwas von den in ihnen aufgelös'ten verschieden gewesen wären, für sich aufzulösen, ohngeachtet er die gegebenen Auflösungen sehr wohl gefaßt zu haben geglaubt hätte. Mit dem, was hier über Newtons Principien erinnert ist, stimmt Laplace's Urtheil in der Exposition du systême du monde, Liv. V., Chap. 5., wo dieser große Mathematiker zugleich die Synthesis mit der Analysis vergleicht, überein. Man darf jedoch hierdurch sich nicht etwa auf die Meinung bringen lassen, als ob Newton das analytische Verfah-

ren nicht in seiner Gewalt gehabt hätte. Die Auflösungen, welche er in der Arithm. univers. Probl. LXI. von einigen die Beschreibung der Kegelschnitte betreffenden Aufgaben giebt, zeigen das Gegentheil. Sie sind rein analytisch und haben eine große Eleganz. Indeß sind Newtons Vorliebe für das synthetische Verfahren der Alten, seine Empfehlung desselben und eigenes Beyspiel Veranlassung geworden, daß die Engländer lange Zeit fast ausschließlich jenes Verfahren auch außerhalb der Geometrie angewandt, und die Rechnung immer gern mit der Zeichnung verbunden haben. So ist Smiths Optik ein durchaus synthetisches Werk, welches Kästner in den algebraischen Vortrag gebracht hat.

Um das, was vorhin über das Wesen der analytischen Geometrie bemerkt worden, durch ein Beyspiel zu erläutern, soll der in dem Artikel, Kreis, 49. enthaltene Satz, daß die Summe der Quadrate von den Segmenten zweyer sich rechtwinklig schneidenden Sehnen des Kreises so groß ist als das Quadrat des Durchmessers, dienen, indem hier ein analytischer Beweis desselben folgt.

Man lege also die Abscissenlinie durch den Mittelpunct des Kreises, und nehme den Mittelpunct selbst zum Anfange der rechtwinkligen Coordinaten x, y, so ist die Gleichung für den Kreis, wenn r den Halbmesser bezeichnet

$$\text{I. } xx + yy = rr$$

Die Gleichung für eine gerade, deren Abstand vom Anfangspuncte der Coordinaten d ist, und bey welcher d mit der Abscissenlinie den Winkel α einschließt, ist

$$\text{II. } x\cos\alpha + y\sin\alpha = d$$

Eben so ist die Gleichung für eine andere gerade, für welche d', α' das sind, was für die erste d, α waren,

$$x\cos\alpha' + y\sin\alpha' = d'$$

Da die zweyte Linie die erste rechtwinklig schneiden soll, o ist $\alpha' = 90° + \alpha$, also die Gleichung für die zweyte Linie

$$\text{III.} \; -x \sin\alpha + y \cos\alpha = d'$$

Aus II. und III. ergeben sich die Coordinaten a, b es Durchschnitts der beiden geraden

$$a = d \cos a - d' \sin\alpha$$
$$b = d \sin\alpha + d' \cos\alpha$$

Aus I. und II. aber erhält man für die Coordinaten X, Y des Durchschnitts der ersten geraden mit dem Kreise

$$X = d \cos\alpha \pm (rr - dd)^{\frac{1}{2}} \sin\alpha$$
$$Y = d \sin\alpha \mp (rr - dd)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha$$

welches zeigt, daß zur Möglichkeit zweyer Durchschnitts-puncte, dergleichen bei einer Sehne Statt haben, $d < r$ eyn muß. Die Quadrate von den Stücken der ersten geraden, welche zwischen den Durchschnittspuncten derselben mit dem Kreise und dem gemeinsamen Durchschnitt beider geraden enthalten sind, sind $(X' - a)^2 + (Y' - b)^2$ und $(X'' - a)^2 + (Y'' - b)^2$, wo X', Y' ich auf den einen, X'', Y'' auf den andern Durchschnittspunct beziehen.

Es ist nach Substitution der obigen Werthe

$$(X'' - a)^2 + (Y' - b)^2 = (d' + \sqrt{(rr - dd)})^2$$
$$\text{und} \; (X'' - a)^2 + (Y'' - b)^2 = (d' - \sqrt{(rr - dd)})^2$$

Daher

$$(X' - a)^2 + (Y' - b)^2 + (X'' - a)^2 + (Y'' - b)^2$$
$$= 2d'd' + 2rr - 2dd.$$

Um die Summe der Quadrate von den Stücken er zweyten geraden, welche zwischen den Durchschnitts-

puncten derselben mit dem Kreise und dem Puncte des Durchschnitts beider geraden enthalten sind, zu haben, darf man in dem eben gefundenen Ausdruck nur d und d′ mit einander vertauschen, und es wird diese Summe $= 2dd + 2rr - 2d'd'$. Daher ist die Summe von den Quadraten aller vier zwischen dem Durchschnitte der beiden geraden und ihren Durchschnittspuncten mit dem Kreise enthaltenen Segmente $= 4rr = (2r)^2$, welches zu beweisen war.

Dieser Beweis gründet sich bloß auf die bekannte Grundeigenschaft des Kreises und auf die Lehre von der Ähnlichkeit der Dreyecke, vermittelst welcher der angezogene Pythagorische Lehrsatz bekanntlich dargethan werden kann *). Zugleich erhellt, daß, da rücksichtlich der Coordinaten a, b weiter keine Bedingung Statt hat, als $a^2 + b^2 = d^2 + d'^2$, d. i. $< 2r^2$, der Durchschnittspunct der beiden geraden auch außerhalb des Kreises fallen kann, wofern nur sein Abstand vom Mittelpuncte nicht größer als die Seite des eingeschriebenen Quadrats ist.

Vergleicht man mit diesem Beweise den geometrischen in dem angezogenen Art., so erscheint der letztere viel kürzer. Allein es sind auch bey demselben mehr Hülfssätze gebraucht, und die durch den Pythagorischen Lehrsatz schon reducirte Summe von $AE^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$ (Th. III., Fig. 20,) noch weiter reducirt worden. Fällt man übrigens vom Mittelpuncte des Kreises auf die Chorden oder Secanten Perpendikel, so läßt sich dem obigen algebraischen Beweise vermittelst des 9ten und 10ten Satzes im zweyten Buche des Euklides eine mehr geometrische Form geben.

---

*) Nicht umgekehrt, wie man wohl glauben könnte. Die In-commensurabilität steht dieser Herleitung im Wege.

Als ein Beyspiel einer wahrhaft analytischen Auflösung einer geometrischen Aufgabe weiß ich kein besseres anzuführen, als die Auflösung, welche Gauß in der Monatl. Corresp. B. XXII. S. 112 u. folgg. von der Aufgabe, in ein gegebenes Viereck die größte Ellipse, welche die vier Seiten des Vierecks berührt, zu beschreiben, gegeben hat. Es ist dabey von den Eigenschaften der Ellipse weiter keine in Betracht gezogen, als die, welche der von Euler in der Introduction, B. II. §. 144. zuletzt erwiesene Satz aussagt. Die von mir ebendaselbst S. 227 mitgetheilte Auflösung braucht mehr vorbereitende Constructionen und Hülfssätze von der Ellipse, und darunter einen entfernteren; sie kann daher nicht als rein analytisch angesehen werden.

Wenn die zur Erfindung der gesuchten Größe einer Frage nöthigen Bestimmungen von dieser Größe selbst wieder abhängen, dann ist die Aufgabe eigentlich analytisch, und kann nur durch die algebraische Methode auf dem kürzesten Wege aufgelöset werden. Um z. B. die Kraft zu bestimmen, welche der Grundlinie einer schiefen Ebene parallel wirkend einer gegebenen Last auf derselben und zugleich der Statt habenden Reibung das Gleichgewicht hält, muß man zur Bestimmung der Reibung den Normaldruck auf die schiefe Ebene kennen. Dieser Druck hängt aber mit von der gesuchten Kraft ab. Will man hierbey so verfahren, daß man sucht, um wie viel die zum Gleichgewicht ohne Reibung erforderliche Kraft vermehrt werden muß, um zugleich die Reibung zu überwältigen, so verfällt man auf eine unendliche Reihe, weil das, was man der Kraft zulegt, um die von ihr und der Last herrührende Reibung zu überwinden, wieder neuen Druck und damit auch neue Reibung hervorbringt. Die Bestimmung der Zeit des Auf- und Untergangs des Mondes gehört gleichfalls hierher. Um sie zu machen, muß die Abwei-

chung des Mondes zur Zeit des Auf- und Unterganges, welche aber noch gesucht wird, bekannt seyn. Man sehe hierüber eine Bemerkung Jak. Bernoulli's zu Huygens Schrift, De ratiociniis in ludo aleae, Prop. XIV. in der Ars conjectandi S. 47 u. 48. Lambert rechnet in dem Astron. Jahrb. für 1780, S. 47, II., die Frage nach der Zeit, wo ein Paar Planeten einander bedecken oder nahe bey einander vorbeygehen, zu den umgekehrten oder eigentlich analytischen Aufgaben der Sternkunde.

System, wissenschaftliches, ist eine geordnete Sammlung in einander gegründeter Wahrheiten von einerley Art und Beschaffenheit. So begreift ein System der Astronomie alle bekannten Hauptsätze über die Bewegung der Himmelskörper in ihrem natürlichen Zusammenhange, d. i. von den einfachsten und allgemeinsten Erscheinungen der täglichen Bewegung an bis zu der zusammengesetzteren des durch gegenseitige Anziehung mannichfaltig gestörten und modificirten Planetenlaufs.

Der Hauptzweck eines wissenschaftlichen Systems geht auf die Verknüpfung der Wahrheiten unter einander und zu einem Ganzen. Hieraus ergeben sich die Haupteigenschaften desselben, welche sind: Gründlichkeit, Ordnung und Deutlichkeit. Die erste ist durch die Benennung, wissenschaftliches System, selbst bedingt, und kann ohne Ordnung oder Methode, wo durch das Begründende dem dadurch Begründeten, das Einfachere dem Zusammengesetzteren, das Allgemeinere dem Besonderen vorangeht und zur Grundlage dient, nicht bestehen. Eben so wenig aber auch ohne Deutlichkeit. Denn ohne deutliche Grundbegriffe und ohne klare Einsicht in den Zusammenhang der Wahrheiten findet keine Gewißheit Statt; ungewisse Erkenntnisse sind aber ganz unbrauchbar.

In einem wissenschaftlichen System muß so wenig als möglich unbewiesen bleiben. Dieses erfordert der Begriff der Wissenschaft. Daher darf die Anzahl der Axiome nicht ohne Noth vermehrt, sondern sie muß vielmehr auf die möglich kleinste gebracht werden. Diese sind aber beym Vortrage des Systems insgesammt deutlich und bestimmt anzugeben, damit jeder in den Stand gesetzt werde, die Tüchtigkeit des Grundes, worauf das Gebäude ruht, selbst zu untersuchen. Archimedes hat dieses unter andern in den Büchern vom Gleichgewichte sorgfältig beobachtet, und die Principien, worauf er die Lehren des Gleichgewichts am Hebel und vom Schwerpuncte gründet, genau und vollständig angegeben. Die neueren Lehrbücher der Statik verfahren hierin nicht immer so gewissenhaft.

Zur leichteren Einsicht in den Zusammenhang der Wahrheiten eines wissenschaftlichen Systems dient es gar sehr, daß jeder Satz abgesondert für sich und so viel als möglich rein, d. h., ohne Bezug auf einen individuellen Fall, vorgetragen werde, weil dadurch die Verbindung zwischen der Hypothesis und Thesis oder zwischen den Datis und dem Gesuchten bemerklicher, und so die Anwendung des Satzes erleichtert wird. Die Art des Vortrages, welche die alten Geometer erwählt haben, ist keine Pedanterey, wie manche vornehmthuende mathematische Schriftsteller vorgeben, sondern befördert in der That das richtige Auffassen der Wahrheiten. Euler hat dieselbe in seinen wissenschaftlichen Systemen überall, wo es anging, fast unverändert beybehalten.

Die Anordnung der verschiedenen Theile eines Systems wird am besten durch die Eintheilung des Hauptobjects bestimmt. Je natürlicher und einfacher der Eintheilungsgrund ist, desto faßlicher und besser zu übersehen wird das Ganze, und desto leichter fügen

sich die einzelnen Theile an einander. Eulers älteres Werk über die Mechanik, worin bloß die Bewegung der Puncte abgehandelt ist, giebt ein Muster einer einfachen und natürlichen Anordnung. Daß die einfacheren Theile vor den zusammengesetzteren abgehandelt werden, kann nur in so fern zur Regel gemacht werden, als sich jene ohne diese gründlich abhandeln lassen.

Beym Vortrage der einzelnen Sätze des Systems muß oft der speciellere Satz dem allgemeineren vorausgehen, und ihm zur Grundlage dienen, wenn das allgemeinere zusammengesetzter ist als das besondere. Euklides beweiset den allgemeineren Satz, daß Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und von einerley Höhe einander gleich sind, vermittelst des specielleren, daß Parallelogramme auf derselben Grundlinie und von einerley Höhe einander gleich sind. Der speciellere Satz ist durchaus nöthig, um den allgemeineren darzuthun, wenn man nicht etwa den allgemeineren Satz auf die von Segner angewandte, minder strenge Art darthun will. Alphons. Borelli hat in seinem Euclides restitutus den specielleren Satz nicht besonders aufgestellt, kann ihn aber doch nicht entbehren, sondern ist genöthigt, den Beweis desselben in den Beweis des allgemeineren Satzes zu verflechten, und überdies noch einen Satz, die Congruenz der Parallelogramme betreffend, vorauszuschicken, wodurch sein Verfahren in der That weitläufiger und minder nett als das Euklidische geworden ist. Übrigens wird man immer suchen müssen, bald die allgemeineren Sätze zu gewinnen und aufzustellen, aus denen die besonderen als eben so vielen Corollarien und Anwendungen fließen. Z. B. In der Statik sind die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts unter einer beliebigen Anzahl von Kräften, welche nach irgend welchen Richtungen an den verschiedenen Puncten eines Systems wirken, vor allen Dingen festzusetzen, und mit ihnen alsdann die beson-

deren Bestimmungen jedes Falls, wo Gleichgewicht Statt findet, zu verbinden. Die neuesten französischen Lehrbücher und Systeme der Statik sind Muster dieser ächt wissenschaftlichen Behandlungsart, welche in ihnen mit großer Consequenz durchgeführt wird, ohne durch eine zu umständliche Auseinandersetzung in ermüdende Weitläufigkeiten auszuarten.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 23 Zeile 2 ist die 3 zu durchstreichen.
— 28 — 3 ist statt 20 in dem mittelsten Fache des zweyten Hülfsquadrats 6 zu setzen 10.
— 136 — 13 lies $\int y \partial x$ für $\int y \partial y$.
— 141 — 8 v. u. l. $\int y \partial x$ f. $s y \partial x$.
— 148 — 4 l. $\left(\frac{y^{(0)} + y^{(n)}}{2}\right) R$ f. $\left(\frac{y^{(0)} + y^{(n)}}{2}\right) R^2$
— 198 — 5 u. S. 201 Z. 3 l. (Fig. 22.) f. (Fig. 23.).
— 300 — 5 l. BAB f. RAB.
— 325 sind in No. 3. die Ordnungszahlen der arithmetischen Reihen durchaus um 1 zu groß angegeben.
— 329 Zeile 6 l. $M = \mathfrak{A} p^m + \mathfrak{B} q^m$ f. $M + \mathfrak{A} p + \mathfrak{B} q^m$.
— — — 1 v. u. fehlt die Klammer hinter $\frac{1}{q}$
— 335 — 6 v. u. schalte man nach: dieser, das Wort: Weg, ein.
— 400 — 5 v. u. l. $+ \frac{1}{2a^2} \int \frac{\partial u}{a^2 - e^2 u^2}$ f. $+ \frac{1}{2a^2} \int \frac{\partial u}{a^2 - e^2}$.
— 455 — 2 l. Stereótomie f. Stereónomie.
— 467 — 17 v. u. l. Entwerfungslinien f. Entwerfungslinie.
— 475 — 3 v. u. l. KM f. LM.
— 490 — 4 v. u. l. PY f. Py.
— 503 — 6 v. u. schalte nach: und, das Wort: hier, ein.
— 513 — 15 fehlt die Hinweisung auf (Fig. 55.).
— 549 — 18 l. (Fig. 63.) f. (Fig. 62.)
— — — 27 l. ansehen f. ansetzen.
— 566 — 10 schalte man nach: Gliede, das Wort: an, ein.
— 567 — 7 u. 8 v. u. } l. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \text{etc.}$ f. $1 + \frac{1}{2}x^2$
— 567 — 13 v. u. } $+ \frac{1}{3}x^3 + \text{etc.}$
— 568 — 8 l. $a = 1$ f. $x = 1$.
— 569 — 11 l. $\frac{c}{b}$ f. $\frac{c}{a}$.
— 576 — 12 l. $(n+1)^2 x^n$ f. $(n+1)^2 x$.
— 631 — 7 v. u. l. Summen f. Summe.
— 633 — 9 l. $\frac{1}{3}(x-1)x(x+1)$ f. $\frac{1}{3}(x-1)(x+1)$
— 653 — 7 l. $- \frac{19}{720} \cdot \frac{1}{4}$ f. $+ \frac{19}{720} \cdot \frac{1}{4}$.
— 656 — 4 fehlt das Minus-Zeichen zwischen $e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}$ und $e^{-\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}$ im Nenner des Bruchs.
— 662 — 4 l. h f. k.
— 719 — 8 l. $+ 1.2.x^{-3}$ f. $+ 1.2.x^3$
— 728 — 8 l. $\frac{1}{\omega} \int \frac{x^{p-1} \partial x (1 - x^{\omega})}{1 - x^r}$ f. $\frac{1}{\omega} \int \frac{x^{p-1} \partial x (1 - x)}{1 - x^r}$
— 777 — 7 v. u. l. $\nu + \vartheta$ f. $\eta + \vartheta$.
— 780 — 8 v. u. l. $\frac{\eta}{\mu}$ f. $\frac{\mu}{\eta}$.

Fig: 4.

Fig: 8.

Fig. 151. zu Th: III. §. 850.

Fig: 152: zu Th: III. §. 851.

Fig. 18

Fig. 22

Fig. 21

Fig. 23

Fig. 27

Fig. 31

Fig. 18

Fig. 22

Fig. 21

Fig. 23

Fig. 27

Fig

Fig. 31

Fig. 32

Fig. 36

Fig. 38

Fig. 39

Fig. 41

Fig. 44.

A C G Q P F B H m M S s Z H p

z
R
H
p
B
M
E
E
Fig.
Z
t
r
n
Fig. 50
N
Y
A
M
C
q
u
s
Q
M
m
A
X
P
p

Fig. 51.

54

Fig. 55

Fig. 59

Fig. 61.

Fig. 64.

(Fig. 60. folgt auf Tab. XXXI.)

Fig. 56

Fig. 55

Digitized by Google